$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Cadernos de Práticas de Ensino de Matemática

UFABC

Organização

Zenildo Santos

Francisco José Brabo Bezerra

Vivilí Maria Silva Gomes

Vol. 6

2024

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CADERNOS DE PRÁTICAS DE ENSINO DE MATEMÁTICA DA UFABC
VOLUME 6

PLANOS DE AULA DO ENSINO MÉDIO

Zenildo Santos
Francisco José Brabo Bezerra
Vivilí Maria Silva Gomes

Santo André
2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

S122c Santos, Zenildo
Cadernos de Práticas de Ensino de Matemática da UFABC [recurso eletrônico] / Zenildo Santos ... [et al.].
Santo André, SP : Universidade Federal do ABC, 2024.

127 p. : il. color

v.6

ISBN: 978-65-5719-081-4

1. Educação matemática. 2.Práticas de ensino. 3.Licenciatura em matemática. . 4.Ensino fundamental e médio. 5.Francisco José Brabo Bezerra 6. Vivilí Maria Silva Gomes I.Título.

CDD 22 ed. – 419

Elaborado por Wilberte Ribeiro – CRB-8/10945

Apresentação

Chegamos a este Caderno 6! Enfim, após o período da pandemia chegou o momento de compartilhar. Seguindo o caminho traçado pelos envolvidos no Curso de Licenciatura em Matemática da UFABC, de organizar e divulgar as construções feitas por seus estudantes nos diversos planejamentos de aulas, no contexto das disciplinas de Práticas de Ensino de Matemática.

As aulas de Práticas de Ensino de Matemática (PEM) III e IV, voltadas para o Ensino Médio, foram ministradas pelos docentes Francisco e Vivilí no ano de 2021, ainda no contexto da pandemia da COVID-19. O estudante, à época, de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Ensino e História das Ciências e Matemática da UFABC, Zenildo Santos, atuou como estagiário em docência na disciplina PEM IV, e é um dos organizadores deste Caderno 6, juntamente com os dois docentes.

Os textos resultantes dos planejamentos de aulas, que constam deste Caderno 6, foram pensados para serem desenvolvidos nos três anos do Ensino Médio Regular e um para o 4º ano do Ensino Médio Integrado ao técnico. E, assim, se fez a organização dos planos, por ano, do Ensino Médio. Totalizaram 15 planos de aula, sendo sete para o 1º ano, seis para o 2º ano, um para o 3º ano e um para o 4º ano integrado ao técnico.

A jornada por essas produções dos nossos estudantes passa pelas unidades temáticas de Números, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística. Foram considerados vários objetos de conhecimento pertinentes às ementas das disciplinas em questão, além de serem pontuadas as competências e habilidades conforme descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os variados recursos metodológicos, também pertinentes às disciplinas, foram levados em conta nessas produções como: História da Matemática, Modelagem matemática, Etnomatemática Jogos, Materiais Manipuláveis e Tecnologias Digitais, bem como contextos de interesse dos estudantes da Educação Básica e temáticas interdisciplinares.

Acreditamos que isso incentiva nossos estudantes a pensar para além dos objetivos da sala de aula como simplesmente parte do processo avaliativo, sendo produtores de conhecimento, envolvidos num processo criativo de planejamento, parte do ato pedagógico, a ser compartilhado para além do espaço universitário com outros estudantes e professores.

Boa leitura e aproveitamento deste material!

Os organizadores

Índice por ano letivo

1º ano

2º ano

3º ano

4º ano (técnico-intregrado)

I. Padrões na natureza: Clivagem

Aryssa Victoria Shitara, Danyela Ferreira Lenz & Jonatan Lucas L. Rodrigues

PADRÕES NA NATUREZA: CLIVAGEM
Aryssa Victoria Shitara Danyela Ferreira Lenz Jonatan Lucas Linhares Rodrigues
Ano Escolar: 1º ano do Ensino Médio
Ementa: Sequências, progressão geométrica, funções exponenciais, desenvolvimento embrionário humano, clivagem.
Objetivos: ● Perceber o padrão envolvido na clivagem de um embrião humano; ● Propor uma conjectura para o modelo matemático da clivagem; ● Deduzir um modelo matemático; ● Validar o modelo matemático; ● Relacionar o padrão da progressão geométrica com a função exponencial; ● Representar o padrão visualizado no *software* Geogebra.
Competências e habilidades matemáticas Abaixo estão as competências e habilidades da BNCC, relacionadas a este plano de aula: “COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax2. **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 540-541).

As duas habilidades acima envolvidas na aula recorrem aos conhecimentos de sequências, progressão aritmética e progressão geométrica. A tarefa de modelagem matemática proposta neste plano se refere a uma progressão geométrica somente, porém saber quais são as características de uma progressão aritmética auxiliam no descarte da mesma no momento das conjecturas. Dessa forma acreditamos que a habilidade EM13MAT507 está presente ainda que em menor protagonismo.

"COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros." (BRASIL, 2018, p. 535-536)

Neste plano, o contexto é da biologia (particularmente, no desenvolvimento embrionário).

Recursos Empregados:
Slides para a projeção, tarefa impressa em papel sulfite A4 com o roteiro, material de anotação, *software* Geogebra.

Atividades:

1. Introdução

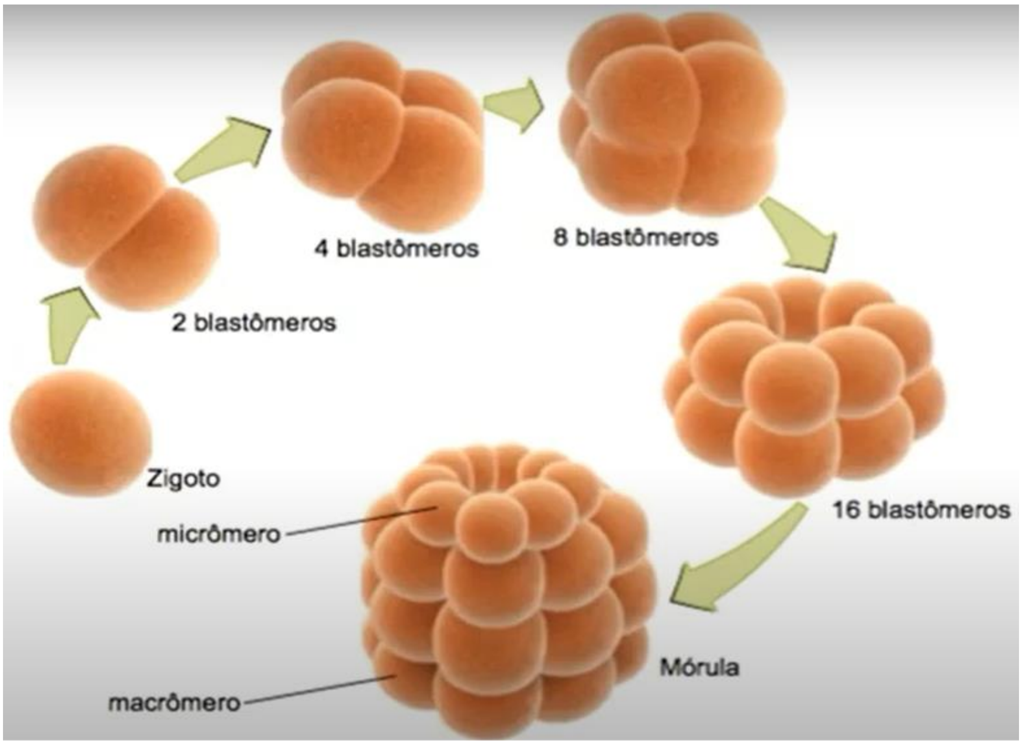
É fácil notar a presença da matemática na biologia, especialmente na genética e no desenvolvimento celular.

Aqui, serão abordados conteúdos conceituais da biologia, como células (somáticas e reprodutivas), blastômeros (células resultantes da divisão do zigoto, de acordo com Amabis (2013, p. 217)) e mitose.

Em seres vivos pluricelulares, uma célula somática (ou não reprodutiva) tem a função de constituir tecidos e órgãos. Nos humanos, as células somáticas têm 2n=46 cromossomos (ou seja, contêm seu material genético completo) e são também denotadas células diploides, visto que contam com dois conjuntos cromossômicos, em contraposição às células gaméticas/reprodutivas/germinativas, as quais têm n=23 cromossomos (ou seja, contêm um conjunto cromossômico ou a metade do material genético) e ainda são denominadas células haploides.

Meiose é o nome da divisão celular que origina as células haploides. Já pela mitose criam-se células diploides. Amabis (2013) traz um trecho bastante ilustrativo sobre esta divisão celular: "Em um aparente paradoxo, na 'matemática' celular dividir é igual a multiplicar. Por quê? Quando uma célula se divide, ela origina duas células-filhas geralmente com metade do tamanho da célula genitora. Entretanto, cada nova célula tem potencial para crescer e originar uma célula típica da linhagem a que pertence, uma vez que recebeu um conjunto completo de genes. Isso é possível porque os cromossomos e os genes duplicam-se antes de a célula dividir." (AMABIS, 2013, p. 193).

No desenvolvimento embrionário, um dos tópicos é a clivagem (conhecida como multiplicação celular ou segmentação). Em uma parte desse processo, percebe-se que "as rápidas mitoses fazem com que o número de blastômeros aumente em progressão geométrica ao mesmo tempo em que eles reduzem de volume, até atingirem um tamanho típico das células somáticas." (NAZARI, p. 5).



Adaptado de: BRITO, Adriane. **Biologia, Histologia, Embriologia:** BHE Mórula e Blástula. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=CbH_yq3U8cI. Acesso em: 02 nov. 2021.

Nesta sequência didática interdisciplinar, serão abordados os conteúdos matemáticos de progressão geométrica e função exponencial.

A progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica cuja razão (**q**) entre quaisquer dois números seguidos da sequência é a mesma, ou seja, certo número da sequência multiplicado pela razão irá sempre resultar no seu termo sucessor. Para encontrar qualquer termo de determinada PG, é possível utilizar a fórmula do termo geral da sequência, representada a seguir:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

a_n - Termo que será encontrado (n-ésimo termo)
a_1 - Primeiro termo
q - Razão

Conforme Elon Lages Lima (2001 apud SOUSA, 2016, p. 40): "'Uma progressão geométrica se obtém quando se toma uma função de tipo exponencial, $f(x) = b \cdot a^x$, se consideram apenas valores $f(n) = b \cdot a^n$, $n \in R$. Por isso é que os problemas em que se aplicam funções exponenciais são essencialmente os mesmos em que se usam progressões geométricas.'"

2. Atividades desenvolvidas

Primeiro momento (50 minutos):
O professor faz uma apresentação em slides, onde será trabalhado o conteúdo conceitual sobre o desenvolvimento embrionário humano partindo da fecundação até o momento em que se forma a mórula e pede para os alunos tirarem todas as dúvidas que surgirem, pois a atividade a seguir irá utilizar esse mesmo conteúdo junto com a matemática. Após a apresentação, o docente pede à turma que forme grupos de 4 ou 5 integrantes.
Para cada integrante do grupo é entregue um roteiro que segue no Anexo. Nesse momento inicial, os alunos farão a primeira leitura em grupo e depois o professor fará a leitura do roteiro junto com a turma, lembrando que a atividade deverá ser preenchida individualmente.

Segundo momento (40 minutos):
Os alunos devem discutir e responder o roteiro em grupos, sendo mediados pelo professor quando necessário. É nesta etapa que os estudantes irão desenvolver o conteúdo procedimental, colocando em prática tudo o que foi aprendido no primeiro momento e observando o comportamento de uma Progressão Geométrica.

Terceiro momento (90 minutos):
O professor promove uma apresentação dos grupos, propondo que os alunos abordem sobre os resultados na frente de toda a turma. Eles anotarão na lousa e farão uma comparação com resultados obtidos por outros grupos, discutindo de forma coletiva. Como resultado final, será obtido na lousa um mapa mental do desenvolvimento que a turma fez na tarefa, onde a participação dos alunos é imprescindível. O professor pode pedir para que todos os integrantes de cada grupo participem, sendo de forma direta ou indireta. Nesse terceiro encontro, será muito importante que os alunos respeitem a hora de falar e escutar (conteúdo atitudinal), pois é nessa etapa da atividade que eles serão os principais protagonistas do ensino e da aprendizagem.

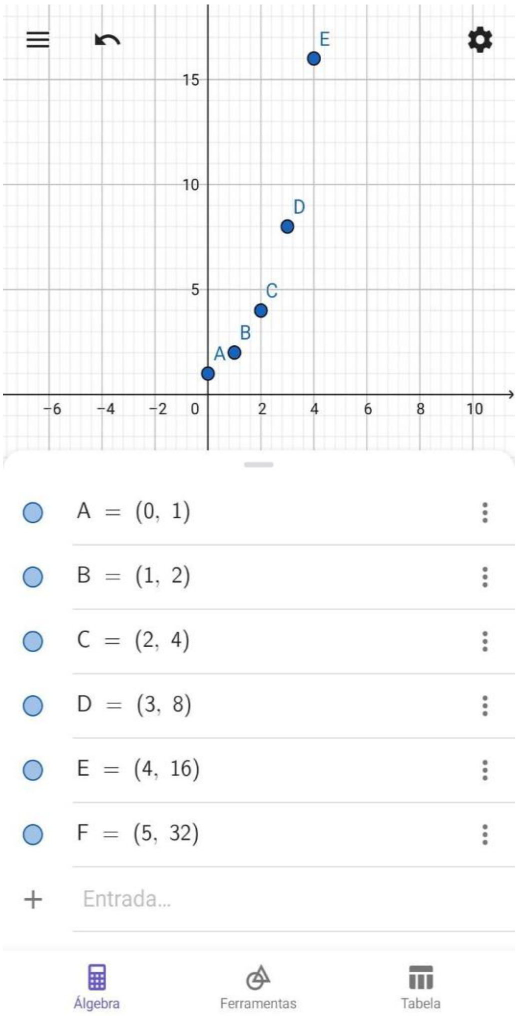
3. Conclusões

É esperado que os alunos cheguem na sequência da clivagem da célula zigoto até a formação da mórula: (1, 2, 4, 8, 16, 32). Trata-se de uma progressão geométrica crescente, finita com seis termos e de razão q=2.

Clivagem	Nº de células
Zigoto	1
1ª clivagem	2
2ª clivagem	4
3ª clivagem	8
4ª clivagem	16
5ª clivagem	32

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$
$$a_n = 1.2^{n-1}$$

Utilizando o Geogebra pelo celular, podem obter um padrão que coincide com um modelo exponencial:



Clivagem x	Nº de células (y)
Zigoto	$2^0 = 1$
1ª clivagem	$2^1 = 2$
2ª clivagem	$2^2 = 4$
3ª clivagem	$2^3 = 8$
4ª clivagem	$2^4 = 16$
5ª clivagem	$2^5 = 32$

A função exponencial apresenta base igual à razão da progressão geométrica e o expoente x aos períodos das clivagens.

$$f(x) = 2^x$$

$$D(f) = \{x \in N \ / \ 0 \leq x \leq 5\}$$

$$Im(f) = \{y \in N \ / \ 1 \leq y \leq 32\}$$

Formas previstas de avaliação:

- Participação nas discussões durante o segundo momento da tarefa: o professor deve observar a participação enquanto circula no momento de mediação;
- Entrega da atividade preenchida durante a aula: o professor observará as respostas individuais desenvolvidas pelos alunos;
- Participação na apresentação final dos grupos: observar os argumentos e conjecturas propostos, assim como a discussão promovida entre diferentes grupos no terceiro momento.

Referências:

AMABIS, José Mariano; MARTHO, Gilberto Rodrigues. **Biologia em contexto.** São Paulo: Moderna, 2013.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 02 nov. 2021.

BRITO, Adriane. **Biologia, Histologia, Embriologia:** BHE Mórula e Blástula. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=CbH_yq3U8cI. Acesso em: 02 nov. 2021.

INFOESCOLA. **Clivagem e Blastogênese**. Disponível em: https://www.infoescola.com/embriologia/clivagem-e-blastogenese/. Acesso em:

02 nov. 2021.

LIFEMAP DISCOVERY. **Morula Cells (Mrl).** Disponível em: https://discovery.lifemapsc.com/in-vivo-development/zygote/morula/morula-cells. Acesso em: 02 nov. 2021.

NAZARI, Evelise Maria; MÜLLER, Yara Maria Rauh. **Embriologia Animal.** Clivagem ou Segmentação: formação da multicelularidade. Disponível em: https://uab.ufsc.br/biologia/files/2020/08/Capitulo_05.pdf. Acesso em: 02 nov. 2021.

SOUSA, Isabela Ramos da Silva de. **Relação entre função exponencial e progressão geométrica.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciência e Tecnologia, Laboratório de Ciências Matemáticas, da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. 2016. 73 p. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/24112016Isabela-Ramos-da-Silva-de-Sousa.pdf. Acesso em: 07 nov. 2021.

Anexo

Nome:____ nº:_____
Grupo:____

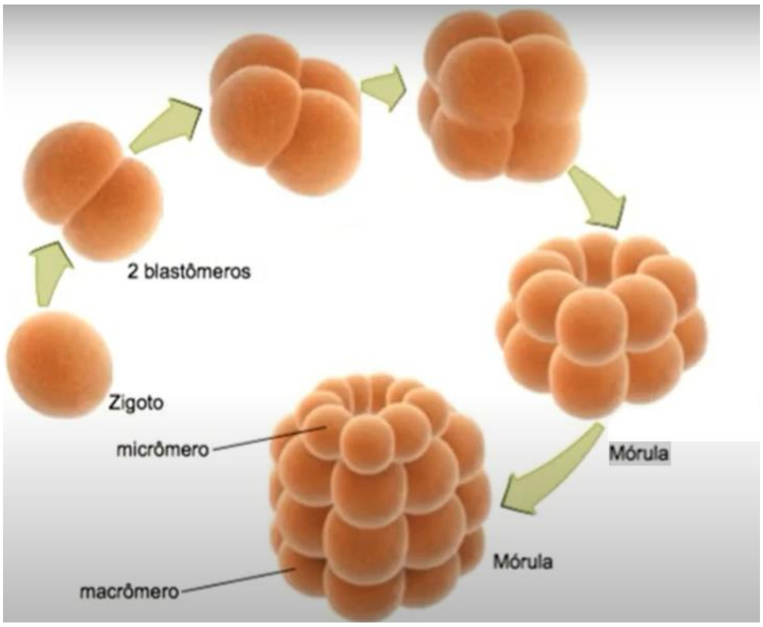
ORIENTAÇÕES:
Leia atentamente ao texto abaixo.
Registre todas as suas respostas.

Padrões na natureza: Clivagem

Depois da fecundação do óvulo pelo espermatozoide, o zigoto se forma. O zigoto humano é formado por 23 cromossomos provenientes do óvulo e 23 do espermatozoide formando uma célula com 46 cromossomos dessa combinação.

Aproximadamente 30 horas após a fecundação, o zigoto sofre diversas mitoses, originando células nomeadas blastômeros. (INFOESCOLA. **Clivagem e Blastogênese**. Disponível em: https://www.infoescola.com/embriologia/clivagem-e-blastogenese/. Acesso em: 02 nov. 2021).

A mórula se constitui por 16 a 32 blastômeros (LIFEMAP DISCOVERY. **Morula Cells (Mrl).** Disponível em: https://discovery.lifemapsc.com/in-vivo-development/zygote/morula/morula-cells. Acesso em: 02 nov. 2021), sendo composta por uma camada (correspondente à massa celular interna), a qual é envolvida por outra camada. A mórula é formada nas tubas uterinas.



Fonte: BRITO, Adriane. **Biologia, Histologia, Embriologia:** BHE Mórula e Blástula. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=CbH_yq3U8cI. Acesso em: 02 nov. 2021.

A partir da explicação apresentada pelo professor e do texto acima, descreva matematicamente as sucessivas mitoses que o zigoto sofre até se tornar a mórula.

Para isso seguem algumas sugestões:

- Existe um padrão para a clivagem do zigoto até a formação da mórula? Qual?
- Quais são as variáveis envolvidas?
- Produza uma tabela com a sequência e as variáveis.
- A partir da tabela, veja o padrão formado pelos pontos em um gráfico utilizando o Geogebra. A que tipo de curva podemos associar o padrão obtido?

II. Trigonometria a partir da Física

João Victor Moretti

TRIGONOMETRIA A PARTIR DA FÍSICA

João Victor Moretti

Ano Escolar: 1º Ano do Ensino Médio

Ementa:
Trigonometria, funções trigonométricas, corrente alternada

Objetivos:
- Compreender como as funções trigonométricas se manifestam no estudo da corrente elétrica.
- Resolver problemas sobre eletricidade, utilizando conhecimentos sobre as funções trigonométricas.

Recursos Empregados:
Slides para projeção, fotos, lousa, laboratório de informática, *software* de simulação de circuitos elétricos, caneta, lápis, borracha, papel e uma calculadora.

Atividades:

1. **Introdução**

Nossa aula foi idealizada para os alunos que já tiveram contato com a trigonometria, e estão em momentos mais avançados. Esta aula não tem caráter introdutório.

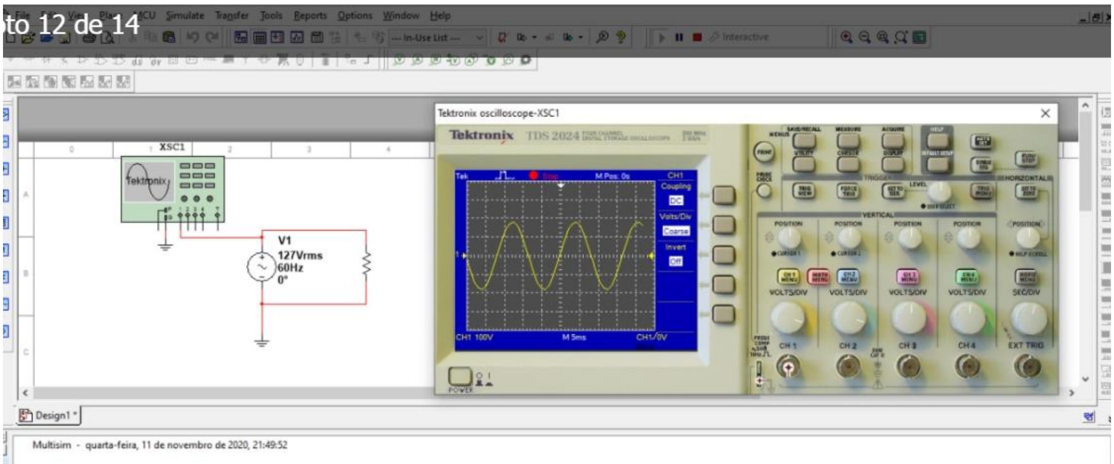
De acordo com o Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), uma das competências específicas de matemática que o estudante precisa desenvolver no ensino médio é:
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Baseando-se nesse aspecto da BNCC, este plano busca trabalhar o conceito de corrente elétrica alternada em duas aulas (100min).
Na primeira aula, o professor irá apresentar o conteúdo para os estudantes, explicando a origem trigonométrica nas equações que regem o comportamento da corrente alternada (50min).

2. Atividades desenvolvidas

a) introdução (10min):

O professor irá introduzir o *software* (Multisim) para os estudantes, explicando a montagem de um circuito elétrico simples (Fonte de corrente alternada + osciloscópio) e como realizar as medidas com o osciloscópio, a fim de obter a forma de onda fornecida pela fonte.



b) Atividade em grupo (40min):

O professor irá propor aos estudantes (em grupos de 3) a montagem de um circuito com as características de uma tomada residencial (Fonte fornecendo 127v com frequência de 60Hz) e para que obtenham a curva dessa fonte com o osciloscópio.

A partir da curva obtida, o professor levantará questões como:

1) Ao montar o circuito, foi utilizada uma fonte que fornece uma frequência de 60Hz. Entretanto, como poderíamos saber qual é a frequência observando apenas a curva senoidal obtida no osciloscópio? Registre o seu raciocínio.

2) Como vimos anteriormente, a tensão elétrica em um determinado instante t, é calculada pela equação:

$$V(t) = V_{max} \sin(2\pi f)t,$$

e que

$$V_{max} = 127 \sqrt{2}.$$

Com base na curva obtida, considere um período de 100ms (milissegundos) e registre em quais instantes, V(t)=0. Registre o seu raciocínio e comprove-o através do cálculo de V(t) com o auxílio de uma calculadora.

3) Considere a curva obtida entre os instantes t=0 e t=100ms. Qual é o domínio e a imagem de V(t) dentro desse período? Registre o seu raciocínio.

O professor, durante a atividade, tem um papel fundamental de acompanhar se os estudantes estão anotando suas linhas de raciocínio. As conjecturas podem surgir de diversas formas para o problema proposto. É sempre importante verificar se os estudantes estão testando as mesmas e questioná-los se os resultados que estão chegando têm coerência com o problema apresentado. Nessa etapa é muito importante solicitar que os alunos expliquem seu raciocínio e que justifiquem o mesmo. O professor precisa estar atento a todo esse processo para garantir que os estudantes vão evoluindo durante a realização da atividade.

3. Conclusões

Por se tratar de uma atividade que utiliza muito a análise de gráficos de funções trigonométricas, o estudante irá aprimorar essa habilidade, identificando padrões e propriedades dos gráficos desse tipo de função. Além disso ele poderá observar aplicações matemáticas dentro dos conceitos da Física.

Formas previstas de avaliação:
Participação das atividades e entrega do questionário.

Referências:

Internet:
BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 06 fev. 2020.

Livro:
DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, Contexto e Aplicações** V. Único. Editora Ática.

ALBUQUERQUE, Rômulo Oliveira. **Análise de Circuitos em Corrente Alternada**. Editora Erica.

III. Uso de tecnologias digitais na modelagem de problemas de consumo de energia elétrica

Alex Francisco de S. Ferreira, Eduardo M. Nery dos Santos & Rodrigo M. Santos

USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NA MODELAGEM DE PROBLEMAS DE CONSUMO DE ENERGIA ELÉTRICA

Alex Francisco de S. Ferreira
Eduardo Machado Nery dos Santos
Rodrigo Moreira Santos

Ano Escolar: 1º Ano do Ensino Médio

Ementa: Relações entre duas grandezas e função do primeiro grau.

Objetivos: A aula tem como o objetivo apresentar os conceitos de relação entre grandezas e função de primeiro grau utilizando uma ferramenta tecnológica (Excel, Geogebra ou similares).

Competências e habilidades matemáticas(BNCC)

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Recursos Empregados:

Slides para projeção, lousa, caneta esferográfica, lousa, contas fictícias em papel de eletricidade, computadores com *software* Excel, Geogebra ou similar instalado. Os materiais têm por objetivo permitir que os alunos realizem os cálculos propostos ao longo da atividade.

Atividades:

1. Introdução

De acordo com as ideias de Charles(2021), o uso de tecnologias da informação e comunicação na matemática é uma abordagem didática que possui diversas vantagens e aplicações e desafios. Como vantagens, pode-se destacar um maior engajamento dos estudantes promovido pela aproximação da escola e de tecnologias digitais, maior facilidade na compreensão de entes cartesianos e espaciais e a execução de aulas mais dinâmicas, possibilitando maiores chances de aprendizagem. As aplicações também são muitas e dependem dos objetivos das aulas: No texto foi abordado o uso do Geogebra para aplicações geométricas planas, porém esse mesmo *software* pode abordar conceitos de Álgebra (como funções e polinômios), desenhos geométricos, geometria analítica e também a geometria espacial. Sem contar outros *software* s tecnológicos que podem abordar essas e outras temáticas.

Outra tendência está inclusa no contexto considerado, se trata da modelagem matemática. A utilização de modelagem matemática em práticas pedagógicas, conforme apresentada por Barbosa(2009), se mostrou com grandes capacidades didáticas no ensino de matemática. Ela possibilita uma maior compreensão dos estudantes sobre a importância da matemática no cotidiano, também gera uma aprendizagem mais ativa dos estudantes e cria um senso coletivo e desenvolvimento do pensamento matemático.

Dessa forma, para a atividade proposta, espera-se que os alunos trabalhem de forma conjunta com os colegas o conceito de grandezas relacionadas e funções do primeiro grau, utilizando tecnologias digitais como *software* Excel, Geogebra ou semelhante. A atividade deve ser feita em grupos de 3 pessoas.

A atividade será dividida em três partes: apresentação da situação problema; elaboração das atividades propostas por parte dos alunos; correção, discussão e saneamento de dúvidas.

Desde o início da atividade, os estudantes devem se organizar com seus grupos para desenvolverem de forma continuada, ao longo da atividade, um relatório sobre dúvidas, aprendizados, reflexões e discussões sobre a ferramenta utilizada, a situação problema analisada e a teoria matemática vista.
O relato de aprendizagem parte das ideias de Gatti(2003) e tem como objetivo o acompanhamento dos alunos. Essa abordagem se trata da avaliação em processo proposta pela autora, o que permite que o professor possa avaliar constantemente o estado dos alunos, podendo redefinir rumos e objetivos, se

necessário. Para tanto, é preciso que o professor estimule os alunos a elaborar esse relato e acompanhe os registros dos alunos, para poder guiar as atividades desenvolvidas. Portanto o relato de aprendizagem deve, como já foi mencionado, ser desenvolvido de forma continuada, sendo acessado pelo professor esporadicamente durante o desenvolvimento das atividades.

O cenário proposto contempla o desenvolvimento de conhecimentos conceituais, procedimentais e atitudinais, conforme exemplifica Didática (2011). Os conteúdos conceituais incluem a compreensão da relação entre duas grandezas e funções de primeiro e segundo grau. Os procedimentos considerados envolvem a resolução de problemas, a modelagem matemática e a utilização de tecnologias digitais. E os conteúdos atitudinais trabalhados envolvem saber se portar durante a atividade, exercer liderança, o respeito e o trabalho com o outro, sabendo dialogar, expondo suas ideias e dando a devida atenção aos colegas e ao professor.

2. Atividades desenvolvidas

Na primeira parte, traz-se para sala de aula conceitos de precificação de energia: preço por kWh consumido, variação de preço em função das bandeiras e taxa de ICMS em função do consumo. Depois disso, explica-se um pouco sobre a ferramenta digital (Excel/Geogebra ou similar), indicando o conceito de células e fórmulas utilizadas, construção de gráficos e criação de parâmetros. Na segunda parte, apresentam-se problemas para que os alunos possam calcular o consumo de eletricidade variando diferentes parâmetros.

Por exemplo: “Para um consumo *x*, na bandeira *y*, qual será o valor a ser pago na fatura?”, ou “Paguei z reais numa fatura com consumo *j* na bandeira *a*. Paguei mais do que deveria ter pago?” Conforme os alunos forem trabalhando na ferramenta digital, apresenta-se novas funções e utilidades da mesma, como a função condicional, que podem ser utilizadas para melhorar o desempenho na resolução dos problemas. O progresso na ferramenta e nos cálculos varia de aluno para aluno e deve constar no relatório de aprendizagens.

Nessa segunda parte etapa é vital não fornecer um modelo de pensamento específico aos alunos, visto que, de acordo com as ideias de Proença e Maia (2018) o aluno deve ser levado a pensar. Nesse processo um problema gerador desperta ideias, as quais devem ser exploradas pelos alunos e a busca de soluções leva os alunos ao que os autores definem como *reorganização cognitiva.* Na busca por conhecimentos para resolver o problema e na montagem da estrutura do problema o aluno reorganiza, revisita e ressignifica seus conhecimentos. Este é um grande valor da resolução de problemas, a qual, segundo os autores, não deve dar aos alunos um modelo de pensamento a ser seguido. É necessário que eles possam explorar e debater, para que ocorra o processo de *reorganização cognitiva.*

Na terceira parte, é feita a correção de alguns problemas propostos com a temática de energia e algumas outras, para promover a generalização do contexto matemático. Além disso, o professor pode promover uma discussão acerca de energia, fontes renováveis, impactos socioambientais e políticos dessa temática. A terceira parte se mostra vital de acordo com Proença e Maia (2018), visto que permite a sistematização de ideias introduzidas pelo problema gerador, o que facilita a formalização dos conceitos. O relatório de aprendizados deve ser entregue ao final de todas as atividades, fornecendo um panorama do desenvolvimento das atividades, conforme sugere Gatti (2003).

3 Conclusões

Espera-se, através dessa metodologia ativa, que, ao fim da aula, os alunos tenham se sentido instigados e motivados à aprendizagem através do uso de recursos tecnológicos. Além disso, espera-se que os estudantes consigam se organizar e orientar-se em grupos, conseguir estabelecer relações entre as questões vistas em aula e os atuais problemas energéticos do mundo e também identificar características genéricas de funções polinomiais de grau 1 e 2.

Além disso, espera-se que as atividades desenvolvidas colaborem para o desenvolvimento de conteúdos não só conceituais, mas também procedimentais e atitudinais. Ou seja, espera-se que os alunos avancem no que se relaciona a modelar matematicamente, resolver problemas, saber se portar, dialogar e respeitar o outro. O que deve auxiliar no desenvolvimento pessoal e profissional, conforme prescreve a BNCC.

4 Formas previstas de avaliação:

Participação na atividade;

Relatório de aprendizados sobre a atividade;

Referências:

BARBOSA, J.C. Integrando modelagem matemática nas práticas pedagógicas. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 14 n. 26, p. 17-25, março 2009. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/5. Acesso em: 06 dez. 2021.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf. Acesso em: 6 dez. 2021.

CHARLES, W. Tecnologias da Informação e Comunicação no ensino de comunidades da Amazônia ocidental. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 26, n. 72, p. 99-110, jul./set. 2021. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/24 33/1994. Acesso em: 06 dez. 2021.

DIDÁTICA Geral. **Conteúdos**. 2011 (15min34s), UNIVESP TV. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=bdSkSb2wEYk&t=155s. Acesso em 20 set. 2021.

GATTI, B. A. O professor e a avaliação em sala de aula. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 27, p. 97–114, 2003. DOI: 10.18222/eae02720032179. Disponível e m: http://publicacoes.fcc.org.br/index.php/eae/article/view/2179. Acesso em: 06 dez. 2021.

PROENÇA, M.C.; MAIA, E.J. O ensino de matemática por meio da resolução de problemas: análise de propostas desenvolvidas no Ensino Médio. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 57, p. 92-112, jan./mar. 2018. Disponível em : http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/936. Acesso em: 30 nov. 2021.

IV. Partindo das relações para conceituar funções

Kevin de Souza Mead

PARTINDO DAS RELAÇÕES PARA CONCEITUAR FUNÇÕES

Kevin de Souza Mead

Ano Escolar: 1º Ano do Ensino Médio

Ementa: Relacionar função, planos cartesianos, coordenadas cartesianas, notação e valor numérico, domínio imagem e contradomínio, construir gráficos.

Objetivos:
- Compreender a relação entre função, notação e valor numérico;
- Diferenciar e conceituar domínio, imagem e contradomínio;
- localizar corretamente as coordenadas cartesianas, construir gráficos;
- relacionar os conceitos de relação e função com o seu cotidiano.

Recursos Empregados: Livros didáticos, papel milimetrado.

Atividades:

1. Introdução: O conceito matemático de função emergiu no século XVII em conexão com o desenvolvimento do Cálculo. O termo "função" foi introduzido por Gottfried Leibniz em uma de suas cartas, datada de 1673, na qual ele descreve a declividade de uma curva em um ponto específico. Matemáticos do século XVII tratavam por funções aquelas definidas por expressões analíticas. Foi durante os desenvolvimentos rigorosos da Análise Matemática por Weierstrass e outros, a reformulação da Geometria em termos da análise e a invenção da Teoria dos Conjuntos por Cantor, que se chegou ao conceito moderno e geral de uma função como um mapeamento unívoco de um conjunto em outro.

2. Principais ideias a serem trabalhadas em sala

2.1 Par ordenado

Definição: Ao par de números reais **a** e **b**, dispostos em uma certa ordem, denominamos **par ordenado** e indicamos por **(a ; b)**, onde

(a ; b)

Abscissa x
Primeiro elemento

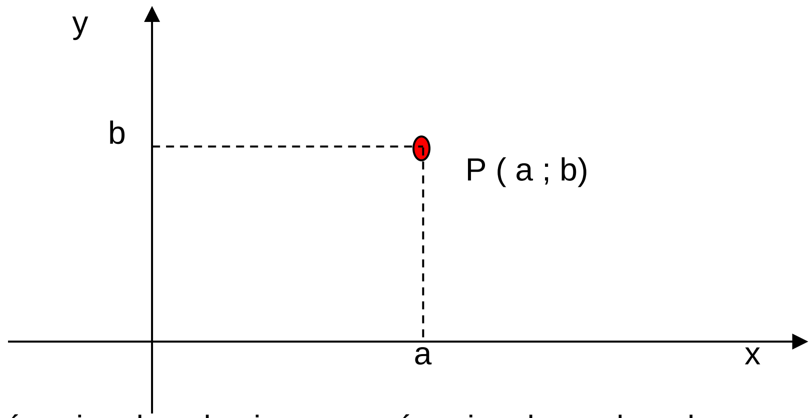
Ordenada y
Segundo elemento

Exemplo: (- 3 ; ½) onde x = - 3 e y = ½

Observe que (x ; y) ≠ (y ; x)

OBS. O par ordenado também pode ser chamado de **COORDENADAS**.

2.2 Representação gráfica do par ordenado:



O eixo x é o eixo das abscissas, e y é o eixo das ordenadas.

Para lembrar como localizar os pontos no plano cartesiano (sistema de eixos x e y) você poderá guardar da seguinte forma:

X – é aquele que anda: **para frente** se for **positivo** e **para trás** se for **negativo**;

Y – é aquele de **sobe** se for **positivo** e **desce** se for **negativo**.

Agora tente marcar alguns pontos no plano cartesiano:

A (2 ; 4)	B (- 3 ; 1)	C (- 4 ; - 1)	D (3 ; - 2)
E (4 ; 0)	F (0 ; 2)	G (-1 ; 0)	H (0 ; - -3)

2.3 Conceito de função

Quando você vai ao posto de gasolina para abastecer seu carro, o preço pago pelo combustível está em função da quantidade de litros colocada no tanque.

Vamos denominar por **T** o total gasto; por **Q** a quantidade de combustível e, finalmente por **P** o preço do combustível por litro.

Para ficar mais claro, vamos construir uma tabela:

T (R$)	Q (litros)	P (R$/litros)
1,98	1	1,98
3,96	2	1,98
9,90	5	1,98
19,80	10	1,98
29,70	15	1,98
39,60	20	1,98

Observe que **T está em função de Q**.
Neste exemplo, **Q** pode assumir qualquer valor de IR_+ , e será denominado **variável independente**, ao passo que **T** será denominado **variável dependente**.

Resumindo, o preço que pagamos está em função da quantidade de litros. E a relação **T = Q . P** ou **T = Q . 1,98** recebe o nome de lei de formação dessa relação.

Se trocarmos a letra **T** por **y** e a letra **Q** por **x**, podemos expressar a mesma relação por: ‘ **y = 1,98 . x** ‘

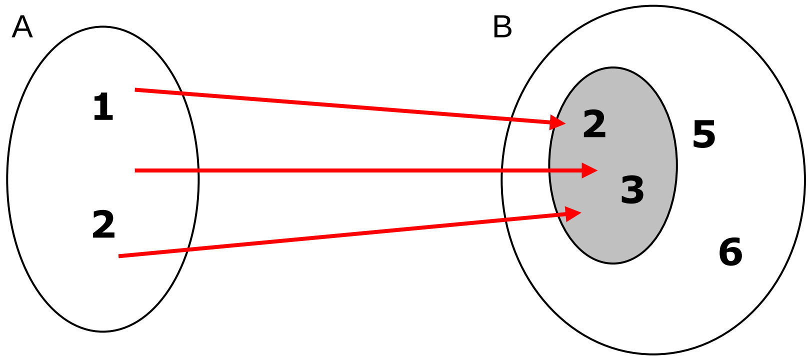
Todos os elementos da coluna **Q** estão associados aos elementos da coluna **T.** E cada elemento de **Q** está associado a <u>um único</u> elemento de **T**. Nesse caso, podemos afirmar que esta relação é uma função.

Domínio, Imagem e contradomínio de uma função.

Considere no exemplo a seguir os conjuntos A = { 1 , 2 , 3 } e B = { 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 } e a função **f: A $\rightarrow$ B** definida pela lei:
f(x) = x + 1.

OBS.
Na linguagem matemática f(x) e y têm o mesmo significado.

A sentença f é uma função de A em B pode ser escrita por: f: A $\rightarrow$ B
Construindo os diagramas, temos:



Chama-se **domínio** da função, e será indicado por D(f), ao conjunto de todos os elementos pertencentes ao conjunto A. No exemplo dado, temos **D(f) = A = { 1 , 2 , 3 }**.

Chama-se **contradomínio** da função, e será indicado por CD (f), ao conjunto de todos os elementos pertencentes ao conjunto B. No exemplo dado, temos **CD(f) = B = { 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 }.**

Chama-se **imagem** da função, e indica-se por Im(f), ao conjunto **"onde chegaram as flechas"**, que é um subconjunto do conjunto B. No exemplo acima, temos **Im(f) = { 2 , 3 , 4 }.**

Observe que **Im(f)** $\subset$ **CD(f)**

Com base no diagrama acima, utilizaremos a seguinte linguagem:

2 é imagem de 1 pela função $\Rightarrow$ f(1) = 1 + 1 $\Rightarrow$ f(1) = 2;

3 é imagem de 2 pela função $\Rightarrow$ f(1) = 2 + 1 $\Rightarrow$ f(1) = 3;

4 é imagem de 3 pela função $\Rightarrow$ f(1) = 3 + 1 $\Rightarrow$ f(1) = 4.

Passaremos agora a resolução de algumas situações-problema para que ao final desse percurso seja possível definir com clareza uma função.

Situação-problema 1

O plano cartesiano é munido de dois eixos graduados, ortogonais.

Interesse-se aos pontos do plano cujas coordenadas (x ; y) estão ligadas pela relação **y = x + 2**
Seja E o conjunto de todos os pontos dessa relação.

Encontre cinco duplas de coordenadas correspondendo aos pontos do plano que não pertencem a E.

Representar graficamente o máximo de pontos de E que puder.
Será que há pontos de E sobre o eixo das abscissas? E sobre o eixo das ordenadas?
Se sim, dar se possível as coordenadas desses pontos.
Se não, dizer por quê.

Será que existem pontos de E com a mesma abscissa? E com a mesma ordenada?
Se sim, dar exemplos.
Se não, dizer por quê.

Situação-problema 2

Interesse-se aos pontos do plano cujas coordenadas (x ; y) estão ligadas pela relação **$y = (x + 3).(4 - x)$.**

Seja F o conjunto destes pontos.

Encontre cinco duplas de coordenadas correspondendo aos pontos do plano que não pertencem a F.
Representar graficamente o máximo de pontos de F que puder.
Será que há pontos de F sobre o eixo das abscissas? E sobre o eixo das ordenadas?
Se sim, dar se possível as coordenadas desses pontos.
Se não, dizer por quê.
Será que existem pontos de F com a mesma abscissa? E com a mesma ordenada?
Se sim, dar exemplos.
Se não, dizer por quê.

As duas situações aqui apresentadas possibilitam ao professor refletir junto com seus alunos o que é uma função, como ela se comporta, quais os valores numéricos que podemos utilizar, e elaborar os primeiros gráficos. Pode-se trabalhar somente as funções do 1º. Grau, e posteriormente as do 2º. Grau.

Formas previstas de avaliação: A avaliação será processual, na qual será observado todo o percurso do aluno: atividades em sala, participação, resoluções de problemas.

Referências:

Internet:
BRASIL. Khan Academy para Alunos e Professores, https://pt.khanacademy.org/brasil?utm_account=AdWords&utm_campaignname=Paid_Brasil_Inst&gclid=CjwKCAiA4o79BRBvEiwAjteoYGIGxcGkJ_av4j580eN54KRDqiQL_k__7hWgj6YRqMqlPzKmiKrqPBoCwGwQAvD_BwE.
Acesso em: 06 nov. 2020.

A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA Luciana de Lima – UFC Maria Gilvanise de Oliveira Pontes – UECE. Acessado em 2020: http://32reuniao.anped.org.br/arquivos/trabalhos/GT19-5574--Int.pdf

EDUCADOR BRASIL ESCOLA. Noções de Função. Acesso: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/nocoes-funcao.htm

BRAGA, Ciro. Função – a alma do ensino da Matemática. São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

V. Complemento de quadrados

Giovanni Castro Cergol & Kévin William de Freitas Souza

COMPLEMENTO DE QUADRADOS
Giovanni Castro Cergol Kévin William de Freitas Souza
Ano Escolar: 1º Ano do Ensino Médio
Ementa: Complemento de quadrados, partição de figuras planas, resolução de polinômios de segundo grau e números complexos.
Objetivos: Espera-se que os estudantes compreendam os conceitos envolvidos na utilização da ferramenta de complemento de quadrados e entendam a efetividade do método utilizado pelos babilônicos na resolução de problemas. Após isso, objetivamos que a resolução dos exercícios contribua para a consolidação dos conceitos aprendidos previamente.
Competências e habilidades matemáticas **COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4 -** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. **Habilidade (EM13MAT307) -** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Recursos empregados: Lousa e demonstrações através da escrita e com o auxílio de fotos. Esses recursos têm como objetivo auxiliar na compreensão dos conceitos de completamento de quadrados e dos métodos babilônicos.

Atividades:

1. Introdução

Abrimos a aula com perguntas que ponham instrumentos matemáticos em perspectiva: “Quem inventou os números reais?”; “Há quanto tempo usamos planilhas?”; “Pra que foi inventada a calculadora?”. Estas perguntas serão postas para compreender a concepção dos alunos da matemática. Isto é, se é universal ou local, se progride linearmente ou se há um grau de caos, entre outros.

Esse pequeno espaço é aberto rapidamente para propor a primeira tarefa.

2. Atividades desenvolvidas

2.1. Tarefa completamento

Começamos apresentando o problema posto no livro de história da matemática Tatiana Roque [1] página 50 do qual também usamos as imagens.

“Adicionei a área e o lado de um quadrado e obtive 0,75. Qual é o lado deste quadrado?”*

*Substituímos o valor 0,45 por 0,75 pois o problema no livro usa base sexagesimal.

Desta pergunta pedimos que os alunos resolvam o problema usando quais métodos quiserem, podendo colaborar com os colegas próximos. Durante a resolução vai se acompanhando quais abordagens cada aluno resolve utilizar ou quais ideias usaram dos colegas. Assim que resolverem vamos abrir para a indagação “há quantos anos tem essa questão?”.

Em conformidade, ou a romper, com a expectativa dos alunos, mostramos a imagem abaixo usando projeção da tela.

FIGURA SEQ FIGURA * ARABIC 1 : PLACA BM13901 DOS BABILÔNIOS ANTIGOS (2000 AC- 1600 BC) [2]

Dado o ano estimado da época a que este povo pertencia deduzimos que este problema tem no mínimo 3600 anos.

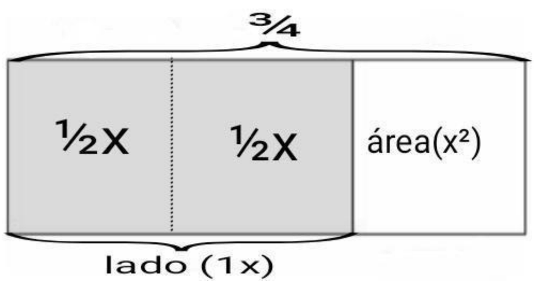
*PREVISÃO DE TÉRMINO DA PRIMEIRA AULA

Mostraremos o passo a passo a seguir usado na resolução deste problema. Como o algoritmo não é autoexplicativo vamos usar as imagens que ilustram o que se objetiva obter. Ao final, percebe-se que a estratégia empregada é o completamento de quadrado.

1º passo: Tome 1
2º passo: Fracione 1 tomando a metade (obtemos 0,50)
3º passo: Multiplique 0,50 por 0,50 (obtemos 0,25)
4º passo: Some 0,25 a 0,75 (obtemos 1)
5º passo: 1 é a raiz quadrada de 1
6º passo: Subtraia os 0,50 de 1
7º passo: 0,50 é o lado do quadrado

A área do quadrado de lado x podemos representar literalmente por um quadrado de lados x. Pergunta-se então como se obter uma área tal que sua medida seja igual a medida do lado x? Basta Tomar um retângulo de lado 1 e lado x. Sabemos que esta soma de áreas deve ser 0,75 de acordo com a hipótese.

Podemos encaixar as duas figuras da maneira abaixo e usar o passo 2 em que separamos a barra cinza ligada ao quadrado em duas partes. Cada uma com lados x e ½.



Agora podemos formar a Figura abaixo ao transladar os pedaços em cinza. Pela construção vemos que há espaço para encaixar um quadrado de lados ½. Por tal motivo, aplicamos o passo 3 para encontrar um quadrado de área ¼.

Lembremo-nos de que a figura abaixo tem área ¾. Por isso o passo 4 afirma para somar ¾ com ¼. Daí obtemos que o quadrado tem área igual a 1.

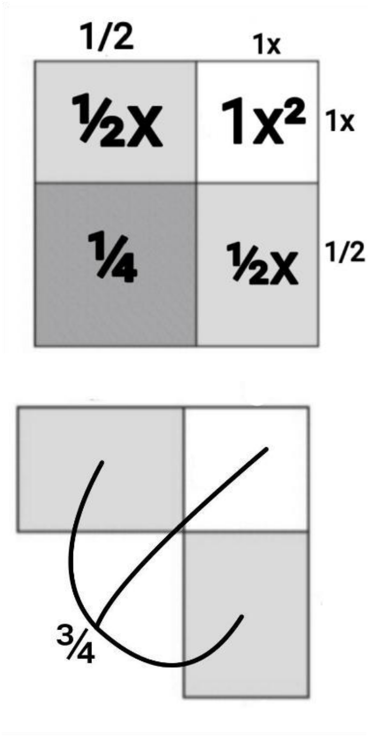


Figura 4[1]

Um quadrado de área 1 tem lados iguais a 1 (passo 5). Pela Figura 4 sabemos que o lado do quadrado total da figura tem o lado (de medida 1) que soma ½ e x. Por isso adotamos o passo 6 e removemos ½ de 1. Conclui-se que x vale ½ .

*PREVISÃO DE TÉRMINO DA SEGUNDA AULA

Durante as manipulações iremos lentamente perguntando e preenchendo as figuras com os símbolos algébricos representantes das áreas. Sendo importante realçar neste processo que não era essa a notação dos babilônios. A notação algébrica que estamos pondo sobre nos facilita diversas manipulações. Sendo justamente essa dificuldade o que pede o uso de técnicas construtivas e geométricas. Isso para que possamos reenunciar o problema usando apenas álgebra.

“Para qual valor real x vale é verdade a igualdade $x^2 + x = 3/4$”?

Ou equivalentemente:

"Como fatorar $x + x - ¾$, isto é, para quais números a, b temos $x^2 + x - ¾ = (x - a)(x - b)$"

Pois vejamos que $x^2 + x - 3/4 = (x - (-1.5))(x - 0.5)$ em que -1.5 e 0.5 são as soluções para a equação.

Pediremos aos alunos que fatorem duas equações, de preferência tentando usar a estratégia visual apresentada. Enfatizaremos que é apenas uma tentativa, para que saibamos o que compreenderam e que experimentem o método.

(a). $x^2 + x - 1/2$
(b). $x^2 + 2x - 1$
(c). $x^2 + x + 1/2$

As equações foram escolhidas, cada uma respeitando um propósito original. A primeira é um teste em que os valores obtidos para x não são racionais, mas que o método funciona facilmente. A segunda questão pede um passo a mais (dividir por 2) que funciona para este caso por ter raízes reais.

Por fim, teremos a terceira questão que é posta como um desafio em que a estratégia falha justamente por tentarmos montar um quadrado com lados complexos. A partir desse impasse perguntaremos aos alunos quais foram as dificuldades e "o que faltaria para concluir a resolução?". Com tais perguntas e provocações gostaríamos de causar nos alunos a sensação de insuficiência ou impotência das ferramentas que se usa. No caso há a necessidade de se introduzir os números complexos ou algum recurso que o equivalha.

3. Conclusões

Basear-se em fontes ou técnicas antigas e ressaltar seu uso permite, ao mesmo tempo em que se apresenta conteúdos, localizar historicamente os conteúdos, problemas e conceitos abordados. Em especial quando se resolve problemas antigos usando as abordagens antigas (ao menos em partes).

Como os problemas do ensino básico são (parte deles) de origem bastante antiga abre-se o espaço para o uso dessa abordagem.

Formas previstas de avaliação:

A avaliação dos alunos seria da seguinte forma:

P = Participação dos alunos nas atividades propostas. Será feito pelo professor em forma de relatório da seguinte forma:

Avaliação da participação e da tentativa de interação dos alunos nas atividades propostas e avaliação do comportamento em sala de aula.

Q = Questionário sobre o entendimento da matéria. Será feito pelo aluno também em forma de relatório onde os mesmos responderão às seguintes perguntas:

1) Você conseguiu acompanhar todas as etapas da matéria ensinada?
2) Na sua opinião, qual foi o grau de dificuldade do conteúdo aprendido?
3) Qual foi a parte mais interessante do assunto?
4) O que você achou mais complicado/difícil no aprendizado?
5) Na sua opinião, a matéria aprendida teria alguma utilidade para sua vida no cotidiano? Se sim, qual seria?

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf. Acesso em: 06 fev. 2020.

ROQUE, Tatiana Marins. Matemáticas na Mesopotâmia e no antigo Egito. **História da Matemática**. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Brasil. Editora Zahar, 2012.p.25-77.

VI. Descobrindo o conceito de Probabilidade

Fabiola Filgueira Deiró dos Santos

DESCOBRINDO O CONCEITO DE PROBABILIDADE

Fabiola Filgueira Deiró dos Santos

Ano Escolar: 1º Ano do Ensino Médio

Ementa: Experimentos aleatórios, ponto amostral, espaço amostral, evento, conceito de probabilidade, fórmula de probabilidade condicional.

Objetivos: Compreender o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.

Recursos Empregados: Slides para projeção, lousa, caneta esferográfica, dados ou objetos que contribuam para a demonstração do conceito de probabilidade.

Atividades:

1. **Introdução**

Antes de surgirem teorias da probabilidade, povos que viviam na Mesopotâmia e no Egito Antigo relacionavam o acaso a manifestações ou intervenções divinas. Desde Antiguidade, jogos de azar eram praticados com objetivos de lazer e algumas ferramentas eram necessárias para o desenvolvimento dos jogos, como o raciocínio combinatório e o cálculo de proporções. Alguns estudos estão associados à análise destes jogos de azar, e somente após o séc. XVI, o estudo sobre o acaso tornou possível o desenvolvimento da análise combinatória.

No nosso cotidiano podemos presenciar em muitos momentos atividades relacionadas a probabilidade, como cartas de baralho, manipulação de moedas, dados etc. Portanto, nesse plano de aula será abordado assuntos que expliquem o conceito de probabilidade que podemos vivenciar no nosso dia a dia.

2. Atividades desenvolvidas

O plano de aula é constituído por duas etapas, sendo que a primeira corresponde à apresentação da evolução da probabilidade e conceitos matemáticos e a segunda etapa corresponde ao desenvolvimento de uma atividade em grupo a ser realizada em sala de aula.

Etapa 1 – Apresentação dos primeiros indícios do estudo da probabilidade, explicação dos conceitos matemáticos Ponto amostral, Espaço amostral, evento, Probabilidade.

Nessa primeira parte serão apresentados alguns jogos de azar, que foram utilizados na antiguidade, antes mesmo de surgir o conceito de probabilidade. O exemplo a ser apresentado é o jogo de tabuleiro denominado "Senet". Este jogo é considerado o antepassado egípcio do gamão, e pelos escritos históricos tais tabuleiros estão entre os mais antigos encontrados, e datam de cerca de 5 mil anos. "Senet" é um jogo de percurso, ganha aquele que conseguir tirar as suas 5 peças percorrendo todo o tabuleiro, e assim alcançar o 1º lugar; a probabilidade deste jogo está na parte em que é necessário lançar algumas peças que se aparentam em função com o dado, e para saber quantas casas do tabuleiro o jogador vai percorrer.

Para aproximar do cotidiano dos alunos ao conceito de probabilidade, o professor poderá realizar um jogo simples com um dado, pedindo para dois alunos apostarem em números de 1 a 6. Assim, já começa a explicação de ponto amostral, espaço amostral e evento.

- Experimentos Aleatórios: um experimento aleatório é aquele cuja natureza envolve um elemento causal, que torna impossível a previsão, com certeza, de qualquer resultado particular, dentre todos os possíveis, que este experimento possa apresentar, quando de sua realização.
- Ponto amostral: qualquer um dos resultados possíveis. No dado olhamos as suas faces, pode ser a face 6. Essa face encontrada é um ponto amostral.

- Espaço amostral: conjunto de todos os resultados possíveis. Podemos representar o espaço amostral por S e o número de elementos do espaço amostral por n(S). No mesmo exemplo dado, temos como espaço amostral S = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }, ou seja, é o conjunto de todas as possibilidades das faces do dado.
- Evento: é qualquer subconjunto do espaço amostral. Representaremos o evento por A e o número de elementos do evento por n(A). Exemplo do dado, seria ao lançar o dado, sair a face 6.

A probabilidade de ocorrer o evento A (no caso dos dados, um exemplo pode ser o evento de sair o número 1 no lançamento dos dados), representada por P(A) é o quociente entre o número de elementos de A e o número de elementos de S. Simbolicamente temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Costuma-se dizer que a probabilidade é o quociente entre o número de casos favoráveis [n(A)], e o número de casos possíveis [n(S)].

Na experiência de jogar um dado honesto de seis faces, numeradas de 1 a 6, e fazer a leitura da faze voltada para cima, tempo:

- O ponto amostral é a face numerada ou apenas o número;
- O espaço amostral é o conjunto S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 };
- O número de elementos do espaço amostral é n(S) = 6;
- O evento número 1 é o conjunto A1 = { 1 };
- A probabilidade do evento 1 é 1/6, pois P = A1/S = 1/6.

Etapa 2 – Realizar atividades em grupo de 3 ou 4 alunos para discussão e resolução de exercícios. O grupo, ao nosso ver, possibilita a discussão e a compreensão deste conceito.

Sugestões de exercícios:

1) Para identificar se o aluno compreendeu os conceitos acima, sugerimos que o professor peça para que eles escrevam o que seria evento, espaço amostral e ponto amostral no caso de uma moeda honesta.

2) Numa urna, existem 4 bolas numeradas de 1 a 4 que diferem apenas pela numeração. Retiram-se duas bolas ao acaso e simultaneamente. Qual a probabilidade de se obterem bolas com números que têm soma par?

Resolução: na experiência de retirar duas bolas da urna, o espaço amostral é S = { (1 e 2), (1 e 3), (1 e 4), (2 e 3), (2 e 4), (3 e 4)} e o número de elementos no espaço amostral é n(S) = 6. O evento "soma par" é o conjunto A = { (1 e 3), (2 e 4)} e, portanto, n(A) = 2. A probabilidade de obter-se a "soma par" é 1/3 pois P(A) = n(A)/n(S) = 2/6 = 1/3.

Buscando compreender os que são eventos independentes e mutuamente exclusivos.

Eventos independentes

Dizemos que dois eventos são <u>independentes</u> quando a realização ou não-realização de um dos eventos não afeta a probabilidade da realização do outro e vice-versa. <u>Exemplo</u>: quando lançamos dois dados, o resultado obtido em um deles independe do resultado obtido no outro.

$$P = p_1 \text{ x } p_2$$

Exemplo:
Lançamos dois dados. Qual é a probabilidade de obtermos face 1 no primeiro dado e face 5 no segundo?

$$P = p_1 . p_2$$
$$P = \frac{1}{6} x \frac{1}{6}$$
$$P = \frac{1}{36}$$

Eventos mutuamente exclusivos

Dizemos que dois ou mais eventos são <u>mutuamente exclusivos</u> quando a realização de um exclui a realização do(s) outro(s). Exemplo: no lançamento de uma moeda, os eventos "tirar cara" e "tirar coroa" são mutuamente exclusivos, já que, ao se realizar um deles, o outro não se realiza.

$$P = p_1 + p_2$$

Exemplo:
Lançamos um dado. Qual é a probabilidade de se tirar o 3 ou o 5?

$$P = p_1 + p_2$$
$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$
$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Exercícios

1. De um grupo de 200 pessoas, 160 têm o fator RH positivo, 100 têm sangue tipo O e 80 têm fator RH positivo e sangue tipo O. Se uma dessas pessoas for selecionada ao acaso, qual a probabilidade de:

   a) seu sangue ter fator RH positivo ?
   b) seu sangue não é do tipo O ?
   c) seu sangue ter fator RH positivo ou ser tipo O ?

OBS : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. Uma urna contém 10 bolas brancas, 8 bolas vermelhas e 12 bolas pretas. Uma bola é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de:

   a) a bola escolhida ser da cor vermelha;
   b) a bola escolhida ser da cor preta;
   c) a bola escolhida ser da cor branca;

3. Ao entrevistar um grupo de pessoas, com relação a leitura de Jornal, obtivemos as seguintes respostas: 200 leem o jornal A, 220 leem o jornal B e 90 leem os jornais A e B . Se uma dessas pessoas for selecionada ao acaso, qual a probabilidade de:

   a) A pessoa escolhida ler APENAS o jornal A;
   b) A pessoa escolhida ler o jornal A **OU** B;
   c) A pessoa escolhida não lê qualquer jornal;
   d) Quantas pessoas foram entrevistadas.

entrevistados

4. Dois dados, um verde e um vermelho são lançados e observados os números das faces de cima.
   a) qual a probabilidade de ocorrerem números iguais?
   b) qual a probabilidade de ocorrerem números diferentes?

c) qual a probabilidade da soma dos números ser 7?
d) qual a probabilidade da soma dos números ser 12?
e) qual a probabilidade da soma dos números ser menor ou igual a 12?
f) qual a probabilidade de aparecer número 3 em ao menos um dado?

5. Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual a probabilidade de:
a) Observarmos 3 coroas?
b) Observarmos exatamente uma coroa?
c) Observarmos pelo menos uma cara?
d) Observarmos alguma coroa?
e) Observarmos no máximo 2 caras?

6. Em um lote com 12 lâmpadas, 4 são defeituosas. Sendo retirada uma lâmpada, calcule:
a) A probabilidade desta lâmpada não ser defeituosa?
b) A probabilidade dessa lâmpada ser defeituosa?

7. Numa urna há 5 bolas brancas, 3 azuis, 4 verdes, 2 amarelas e uma marrom. Extraindo uma bola ao acaso, qual a probabilidade de sair uma bola azul **ou** amarela.

8. Numa classe de 22 alunos, 12 têm olhos castanhos, 4 têm olhos negros, 3 têm olhos cinzas, 2 têm olhos verdes e um têm olho azuis. Qual a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso:
a) Não ter olhos castanhos?
b) Ter olhos verdes ou azuis?

9. Uma moeda viciada, a probabilidade de obter cara é o dobro da probabilidade de obter coroa. Calcule a probabilidade de cada evento elementar do espaço amostral de um lançamento desta moeda e observação da face superior.

10. No lançamento de dois dados (consulte o quadro da página 2), ache a probabilidade de obter:
a) Múltiplo de 3 nos dois dados;
b) Múltiplo de 3 em pelo menos um dos dados.
c) Soma igual a 5.

11. Jogando uma moeda 4 vezes, qual a probabilidade de obter a sequência de resultados (cara, cara, coroa, coroa)?

12. Num lançamento de dois dados honestos, calcular a probabilidade de:
a) A soma dos pontos ser ímpar;
b) O produto dos pontos ser ímpar.

13. Um baralho tem 52 cartas, sendo que 4 delas são damas. Retirando-se uma carta ao acaso, qual é a probabilidade de se retirar uma dama?

14. De dois baralhos de 52 cartas retiram-se, simultaneamente, uma carta do primeiro baralho e uma carta do segundo. Qual a probabilidade de a carta do primeiro baralho ser um rei e a do segundo ser o 5 de paus?

3. Conclusões

Nessa aula, com a conclusão dessa atividade, estarão consolidados os conceitos de experimentos aleatórios, ponto amostral, espaço amostral, eventos e probabilidade.

Formas previstas de avaliação:
Participação e envolvimento dos alunos nas atividades propostas, e questionário contendo exercícios práticos de fixação.

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 23 dez. de 2020.

REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.3, p.50-67, UFSC: 2007.

LOPES, J. M. Conceitos básicos de Probabilidade com Resolução de Problemas: Relato de uma experiência. Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática: v. 59, p. 41-45, São Paulo, 2006.

VII. Funções Exponenciais e Logarítmicas no Ensino Médio: Conceitos e Aplicações

Rudger A. Vaitkevicius & Henrique Ricci Martins

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS NO ENSINO MÉDIO: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Rudger A. Vaitkevicius

Henrique Ricci Martins

Ano Escolar: 1º Ano do Ensino Médio

Ementa: Conceito de exponencial e logaritmo e respectivas funções

Objetivos:

- Identificar as funções exponencial e logarítmica.
- Identificar as principais características da função exponencial.
- Identificar as principais características da função logarítmica.
- Reconhecer o gráfico das funções exponencial e logarítmica e suas propriedades.
- Realizar cálculos com as funções exponencial e logarítmica.

Competências e habilidades matemáticas

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Recursos Empregados:

Slides, lousa, livro didático, simuladores. Os simuladores proporcionam que os alunos explorem as funções trabalhadas e percebam características associadas.

Atividades:

1. Introdução

Como forma de trabalhar a matemática associada ao cotidiano do estudante, utilizar conceitos como a contaminação de casos de Covid-19 faz-se como boa forma de informar e conscientizar os estudantes sobre a pandemia, utilizando-se de dados hipotéticos, porém que não fujam do escopo real.

2. Atividades desenvolvidas

A questão disparadora

A primeira atividade desenvolvida é a investigação dos estudantes que, sem nenhuma introdução dos conceitos de exponencial e logaritmo devem se debruçar sobre a seguinte questão, em grupos:

> "Considere um cenário em que não há isolamento social. O número de infectados de uma cepa W de um vírus que é semelhante ao Sars-COV 2 (vírus da Covid-19) dobra a cada 10 dias. Assim, se existem 4 pessoas infectadas, após 10 dias cada uma dessas pessoas infecta outras 4, totalizando 8 infectados. Com esses dados, seria possível estimar quantas pessoas estarão infectadas após um período de 3 meses (1 mês = 30 dias), se a população inicial infectada era de 200 pessoas? Montar uma tabela com os dados de 10 em 10 dias pode ajudar nesse problema."

Espera-se que a partir desse enunciado, os estudantes sejam capazes de concluir que 3 meses são 90 dias, logo a população infectada será dobrada 9 vezes, chegando ao resultado final de 102400. Entra como boa forma de conscientização acerca da contaminação de um vírus que não é contido pelo isolamento. Um crescimento de 200 casos para 102400 é gigantesco, e também introduz a forma como uma função exponencial cresce.

A partir da tabela montada acima, é proposto aos estudantes que em grupos discutam sobre duas questões e sobre os resultados encontrados acima:

a) Compare a quantidade de casos após o final de cada mês. Por que esse número cresceu tanto?

b) Existe algum padrão para calcular o número de infectados? Por exemplo, caso deseje encontrar o número de infectados após um período de tempo muito grande, como poderia encontrar sem efetuar as multiplicações exaustivas de 10 em 10 dias?

As respostas levantadas pelos grupos servirão de ponte para a discussão formal dos conceitos envolvidos no tema.

Conceito e expressão de exponencial

Funções exponenciais são aquelas funções dadas por uma lei na forma:

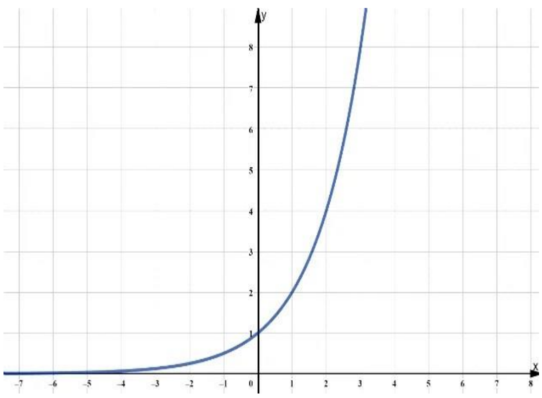
$$f(x) = a^{x}$$

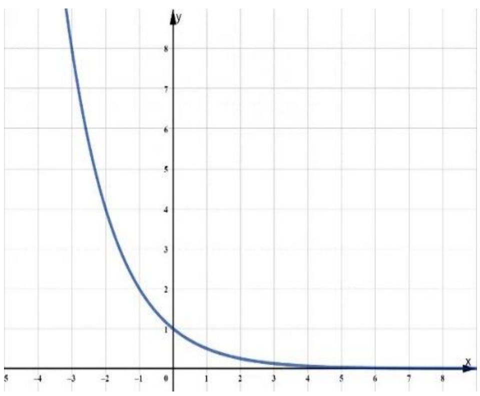
A letra “a” representa a base da potência, e a letra x é a variável, ou seja, funções exponenciais são aquelas nas quais a variável está no expoente. As restrições para a base são $a > 0$ e $a \neq 1$. Experimentar valores para “a” com os alunos para que eles possam perceber as razões dessas restrições.

Gráfico da exponencial

Aqui é proposto que os alunos desenhem o gráfico de duas funções exponenciais. Nesse momento, é importante que eles possam elaborar o gráfico por si próprios, o que facilitará a compreensão das características da exponencial. Isso pode ser feito com o auxílio de uma calculadora, ou com algum programa como o Geogebra caso esteja disponível.

Funções que podem ser propostas: $f(x) = 2^x$ e $f(x) = (½)^{x}$. Essas funções mais simples facilitam para que os alunos explorem o comportamento da exponencial. Exemplos do gráfico de cada função, respectivamente:





Características da exponencial

Com a construção do gráfico, esse momento é para que o professor discuta, com as impressões dos alunos, como se dá o comportamento da exponencial. Espera-se que os alunos percebam o crescimento da primeira função e o decrescimento da segunda, relacionando-o ao valor da base "a" (maior ou menor que 1, respectivamente).

Formalização da resposta do problema

Após a formalização conceitual trabalhada com os alunos, é chegada a hora de elaborar a solução do problema. Isso pode ser feito pelo professor em conjunto com os alunos, visando determinar a função que prediz os dados do problema em questão:

$$f(t) = 200 * 2^{\frac{t}{10}}$$

Com isso em mãos, os alunos podem trabalhar com outras questões, com o auxílio de uma calculadora, como determinar a quantidade de casos que haveria ao longo dos meses (como em 6, 9, 12 meses) caso não fosse feito um isolamento social.

A segunda questão disparadora

Para também trabalhar o conceito de logaritmo, seria feita a pergunta inversa do problema inicial, ou seja, dado um determinado número de casos, qual seria o tempo previsto para chegarmos nesse número. Assim, seriam pedidos aos estudantes que encontrassem, ainda em grupo, uma forma de resolver a seguinte questão:

> "Quanto tempo seria necessário para que a quantidade de infectados fosse **aproximadamente** 3000?"

É esperado que sejam necessárias intervenções do professor. Assim, espera-se que os estudantes estimem a resposta pelos dados de sua tabela, mas ainda assim percebam que falta algum determinado cálculo, pois com o número 3000 não seriam capazes de resolver via equação exponencial. Desta forma, a partir dessas reflexões, a definição formal de logaritmo seria apresentada, como a de **encontrar o expoente** que, ao elevar uma base gera a potência.

Logaritmo como inverso da exponencial

Como o conceito de logaritmo não costuma ser familiar aos alunos, é importante proporcionar um momento no qual sejam discutidas algumas de suas propriedades. Essencialmente, é preciso mostrar que o logaritmo é justamente o expoente ao qual a base *a* deve ser elevada para obter o número *x*. Assim: $b = x \quad \Leftrightarrow \; a^x = b$.

É importante praticar com os alunos para que eles percebam a relação entre exponencial e logaritmo. Isso pode ser feito apresentando exemplos como:

$$2^x = 4 \Leftrightarrow \log_2 4 = x$$

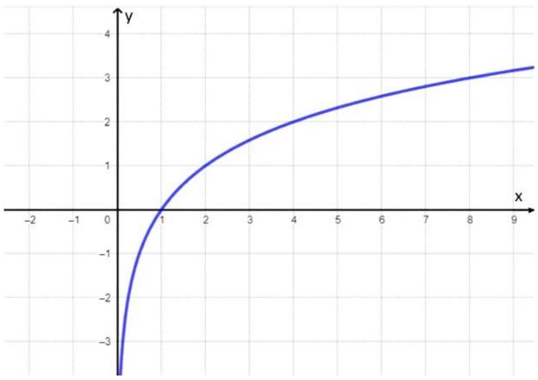
$$\boldsymbol{x = 2}$$

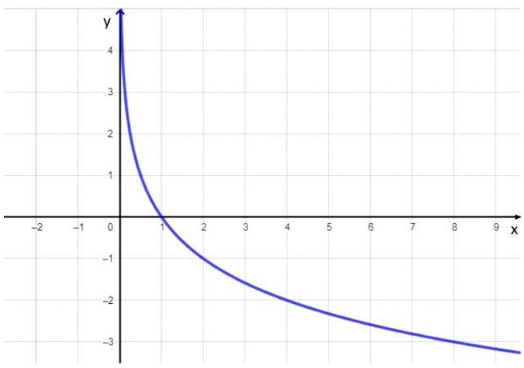
Conceito e expressão de logaritmo

Uma função logarítmica é uma função da forma $f(x) = \log_a x$, sendo a base *a* positiva e diferente de 1. Os valores de *x* também só podem ser positivos. Assim como na função exponencial, aqui é interessante realizar alguns testes numéricos para que os alunos percebam a razão dessas restrições.

Gráfico do logaritmo

Aqui é proposto que os alunos desenhem o gráfico de algumas funções logarítmicas. Apesar de poder ser realizado com o auxílio da calculadora, é fortemente recomendado o uso do computador pelos alunos, pois facilita a construção e a relação de inversibilidade com o gráfico da exponencial. Gráficos das funções sugeridas $f(x) = \log_2 x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ para que possam ser percebidos o crescimento e o decrescimento, respectivamente:





Características do logaritmo

Com a construção do gráfico, esse momento é para que o professor discuta, com os alunos, como se dá o comportamento da logarítmica. Espera-se que os alunos percebam o crescimento da primeira função e o decrescimento da segunda, relacionando-o ao valor da base “a” (maior ou menor que 1, respectivamente).

3. Conclusões

O estudo das funções exponenciais e logarítmicas costuma ser dificultoso para os alunos, seja pela não familiaridade com o assunto ou pelo nível de abstração demandado pelo logaritmo. No entanto, ao associar esses temas a problemas e situações cotidianas e a recorrer a estratégias visuais de gráficos, é possível permitir que o aluno vá construindo seus conhecimentos matemáticos de funções e dê significado ao que está sendo trabalhado

Formas previstas de avaliação:

Avaliação Diagnóstica inicial: escrita, individual, complementada por participação em aula introdutória, buscando levantar as concepções prévias a respeito do tema a ser desenvolvido

Avaliação Processual: acompanhamento durante o decorrer das aulas, acompanhamento do caderno e portfólio, realização de exercícios práticos individuais e em duplas

Pesquisa extrassala e compreensão de situações cotidianas onde foi percebida a presença de números racionais.

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/matematica-no-ensino-fundamental-anos-finais-unidades-tematicas-objetos-de-conhecimento-e-habilidades>. Acesso em: novembro de 2021.

IEZZI, Gelson, *et al*. **Matemática**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2007.

VIII. Triângulos Não Retângulos (proposta 1)

Kévin Souza & Thiago Andreieve

TRIÂNGULOS NÃO RETÂNGULOS
(Sequência Didática)

Kévin Souza
Thiago Andreieve

Ano Escolar: 2º Ano do Ensino Médio

Ementa: Lei dos Cossenos

Objetivos:

- **Gerais** - Deduzir a partir de situações-problemas teóricas a proposição da Lei dos Cossenos.
- **Específicas** - Construir em uma folha um triângulo escaleno, nomear suas partes notáveis, e a partir dos problemas enunciados, construir relações que ao ser manipuladas algebricamente, apresentarão a definição $a^2 = b^2 + c^2 - 2*b*c*\cos\theta$; sendo “a” um lado do triângulo, θ o ângulo oposto a esse lado, e “b” e “c” os lados sobre o qual este ângulo é formado.

Competências e habilidades matemáticas

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria

Recursos Empregados:

Lousa e giz.

Atividades (Resolução de Problemas):

1. Introdução

Nos Parâmetros Nacionais Curriculares do Ensino Fundamental, já consta a abordagem da resolução de problemas (BRASIL, 1998). A situação problema não parte da definição matemática, mas de uma situação-problema. Essa abordagem deve ser retomada no Ensino Médio (BRASIL, 2002).

O ponto de partida contendo uma situação não conhecida plenamente, vai desencadear um processo “através do qual o aprendiz vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma reorganização conceitual cognitiva” (BRITO, 2006, p. 19).

A proposta deste plano de aula é construir através de situações-problema teóricas, a proposição da Lei dos Cossenos: “em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos dois outros lados *menos* duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado” (DOLCE, 2005).

Partindo desse pensamento, decidiu-se colocar em questão o fato de que situações reais terão dinâmicas muito diferentes de situações totalmente controladas. Para deixar mais claro, situações reais em que formas triangulares aparecerão, podem surgir com formas de triângulos retângulos, mas também de triângulos, acutângulos e até obtusângulos.

Dessa maneira, é necessário que se desenvolvam habilidades em lidar com situações em que não se tenham necessariamente triângulos retângulos, mas outros tipos de triângulos, com propriedades e relações métricas diferentes.

Estas situações também têm sido exploradas em avaliações de seleção como vestibulares e Enem. Um exemplo é da prova da Unesp de 2012, em que se encontra a questão:

Questão 85

No dia 11 de março de 2011, o Japão foi sacudido por terremoto com intensidade de 8,9 na Escala Richter, com o epicentro no Oceano Pacífico, a 360 km de Tóquio, seguido de tsunami. A cidade de Sendai, a 320 km a nordeste de Tóquio, foi atingida pela primeira onda do tsunami após 13 minutos.

(*O Estado de S.Paulo*, 13.03.2011. Adaptado.)

Baseando-se nos dados fornecidos e sabendo que $\cos \alpha \cong 0{,}934$, onde α é o ângulo Epicentro-Tóquio-Sendai, e que $2^8 \cdot 3^2 \cdot 93{,}4 \cong 215\,100$, a velocidade média, em km/h, com que a 1.ª onda do tsunami atingiu até a cidade de Sendai foi de:

(A) 10.

(B) 50.

(C) 100.

(D) 250.

(E) 600.

Imagem 1: Questão de vestibular que envolve a Lei dos Cossenos para calcular a distância do epicentro de um terremoto até Sendai (UNESP, 2012)

2. Atividades desenvolvidas

- Apresentar como motivação o seguinte desafio:

Encontrar uma equação que relacione um ângulo e os três lados de um triângulo qualquer

Essa equação vai permitir que se encontre um lado de um triângulo qualquer, sabendo o valor dos outros dois e o ângulo formado entre eles, ou o valor de qualquer ângulo de um triângulo qualquer, sabendo seus lados.

- Relembrar conteúdos conceituais que serão necessários para a sequência didática:

- Triângulos;
- Teorema de Pitágoras;
- Definição de seno, cosseno e tangente;
- Relação fundamental da trigonometria.

- Em seguida, pedir que façam um triângulo escaleno, e na sequência, enunciar o seguinte problema,

1) Escreva uma equação que relacione um lado do triângulo
   a) ao cosseno de um de seus ângulos;
   b) ao seno deste ângulo.
   O ângulo deve ser fixado até o fim da atividade, chame-o de θ.

Se necessário, dar a dica "trace uma altura 'h', nomeie os lados de a, b e c, e use um como referência".

O segundo problema só pode ser enunciado quando o primeiro for respondido.

A ou o estudante, ao traçar a altura do triângulo a, b e c, construirá dois triângulos retângulos, peça para que se chame o triângulo que contém θ de triângulo 1, com base "n", e o que não contém, de triângulo 2, com base "m".

- Em seguida, enunciar os seguintes problemas

2) Escreva a base do triângulo a, b e c em função da base dos dois triângulos retângulos;
3) Monte o teorema de Pitágoras no triângulo 2, mas antes de resolver, substitua a base do triângulo 2 pela base do triângulo maior (a, b e c), menos a do triângulo 1;
   O que se espera: ($a^2 = m^2 + h^2$), ($m = c - n$) , chegando em $a^2 = (c - n^2 + h^2)$
4) Volte para as relações encontradas nos itens a e b do problema 1, e deixe h em função de seno, e m em função de cosseno.
   O que se espera: $a^2 = (c - b*\cos\theta)^2 + (b*\text{sen}\theta)^2$
5) Desenvolva essa equação, buscando utilizar a relação fundamental da trigonometria quando for necessário ($\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$).

O resultado esperado será a equação final da lei dos Cossenos:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2*b*c*\cos\theta}$$

3. Conclusões

O plano de aula permite o desenvolvimento de habilidades para trabalhar com triângulos não retângulos. São necessários alguns conhecimentos específicos prévios para um bom desenvolvimento da atividade, como a relação trigonométrica fundamental, que nem sempre é apropriada pelo alunado de Ensino Médio. Não é fácil encontrar aplicações práticas e reais para a Lei dos Cossenos, demandando desenvoltura da professora ou do professor para justificar sua importância. A atividade deste plano pode ser utilizada para discutir a importância das demonstrações, introduzindo ferramentas que ajudem a deduzir fórmulas em situações específicas para as quais não haja um método fechado e conhecido de resolução.

Formas previstas de avaliação

A avaliação dos alunos seria da seguinte forma:

P = Participação dos alunos durante a realização da atividade proposta. Será feito pelo professor em forma de relatório da seguinte forma:

Avaliação da participação e da tentativa de interação dos alunos nas atividades propostas e avaliação do comportamento em sala de aula

Q = Questionário sobre o entendimento da matéria. Será feito pelo aluno também em forma de relatório onde os mesmos responderão às seguintes perguntas:

1) Você conseguiu acompanhar todas as etapas da matéria ensinada?
2) Na sua opinião, qual foi o grau de dificuldade do conteúdo aprendido?
3) Qual foi a parte mais interessante do assunto?
4) O que você achou mais complicado/difícil no aprendizado?
5) Na sua opinião, a matéria aprendida terá alguma utilidade para sua vida no cotidiano? Se sim, qual?

Referências:

BRASIL. Secretaria de ensino fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF/MEC, 1998.BRASIL. Secretaria de educação média e tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/matematica-e-suas-tecnologias-no-ensino-medio-competencias-especificas-e-habilidades>. Acesso em: 03 nov. 2021.

BRITO, M. R. F. Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (Org.).**Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas, Alínea, 2006, 280p., p. 13-53.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar 9**: geometria plana: 41 exercícios resolvidos: 971 exercícios propostos com resposta: 37 testes de vestibulares com resposta. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

VUNESP. Vestibular Unesp, 2012. Disponível em: <UNESP - 2012 - Curso Objetivo (curso-objetivo.br)> Acesso em: 06 dez. 2021

IX. Triângulos não retângulos (proposta 2)

Gabriel Ribeiro Menezes, Joyce Thaís Silva & Luísa Cristina Martins Pereira

TRIÂNGULOS NÃO RETÂNGULOS

Gabriel Ribeiro Menezes

Joyce Thaís Silva

Luísa Cristina Martins Pereira

Ano Escolar: 2º Ano do Ensino Médio

Ementa:

- Lei dos senos;
- Lei dos cossenos;

Objetivos:

- Compreender e calcular as razões métricas e trigonométricas em um triângulo não retângulo usando a lei dos senos e cossenos;
- Resolver problemas que envolvam as medidas dos lados e dos ângulos de triângulo qualquer;
- Estabelecer relações entre a matemática, o cotidiano e as outras áreas do conhecimento;

Competências e habilidades matemáticas

Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidade EM13MAT308: Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Recursos Empregados:

Quadro, giz, projetor multimídia, régua e transferidor

Atividades:

1. Introdução

Segundo Onuchic (1999), o problema é “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. A resolução de problemas sempre esteve presente como atividade pós aprendizagem do conteúdo, mas como parte da aprendizagem é uma prática recente. Polya ao enfatizar os passos necessários para a resolução de problemas se tornou uma das primeiras referências.

Onuchic e Allevato (2011) acreditam que o ensino-aprendizagem-avaliação via resolução de problemas seja “um contexto bastante propício a construção de conhecimento, colocando o aluno no centro das atividades de sala de aula, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor como organizador e mediador”. Eles sugerem ainda que as atividades sejam divididas em 10 etapas: Proposição do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca de consenso, formalização do conteúdo e proposição e resolução de novos problemas.

Como introdução propomos um problema a ser resolvido pelos alunos: Quando pulamos amarelinha, qual é o grau de abertura de nossas pernas?

O objetivo é que a resolução de problemas motive os alunos e dê um propósito prático que pode ser visto no dia a dia para utilização de conceitos matemáticos.

2. Atividades desenvolvidas

Após a explicitação do problema, é feito a introdução das leis de seno e cosseno que serão apresentadas apenas de maneira bem simplista, indicando sua origem e seus objetivos. Então os alunos farão duas tarefas em grupo (Anexo 1), com o objetivo de que eles possam compreender o conceito das leis e consigam utilizá-las mesmo não definindo-as.

Na primeira tarefa serão apresentados diversos triângulos retângulos aos alunos e, em seguida, será solicitado que meçam os lados e ângulos desses triângulos e anotem em uma tabela. No passo seguinte eles deverão ser conduzidos pelo professor para encontrarem as relações de proporcionalidade entre os lados e o seno de seus ângulos opostos.

Na segunda atividade serão apresentados triângulos não retângulos. O objetivo é que os alunos meçam os lados e ângulos e observem que o conceito da proporcionalidade é válido para quaisquer triângulos. Tudo isso conduzido por discussões em grupo e orientação do professor.

Após as discussões orientadas dos grupos, o professor irá consolidar os conhecimentos utilizando para isso raciocínios que os alunos apresentaram ao longo da atividade e, em seguida, apresentando devidamente e explicando sobre as leis de seno e cosseno.

3. Conclusões

Então será evidenciado novamente o desafio proposto inicialmente. A atividade propõe que os alunos meçam o tamanho de suas pernas e, em seguida, pulem como se fossem brincar de amarelinha e meçam a distância entre suas pernas. Através dos conceitos vistos sobre lei de seno e dos cossenos, eles podem calcular o grau proposto pelo problema com o objetivo de que possam compreender de que maneira esses conceitos se aplicam à realidade.

A resolução deverá ser entregue ao professor, contará como avaliação e verificará se os conceitos ficaram claros e os objetivos foram atingidos. Ao fim da aula, a sala pode debater como foi a execução da atividade e a relação com o conceito matemático.

Formas previstas de avaliação:

A avaliação será feita de duas formas, a primeira durante a aula, a segunda ao final.

No decorrer da aula o desempenho dos alunos será avaliado por sua dedicação na execução da tarefa, trabalho em grupo, colaboração com os colegas e também com suas respostas para os itens três e seis da tarefa, onde os alunos devem inferir a respeito das conclusões que eles chegaram através das outras tarefas.

Ao fim da aula, após a discussão com a turma e já com os conceitos de triângulos não retângulos explicitados e consolidados, serão feitas algumas perguntas à classe sobre suas aprendizagens. Então, será solicitado que os alunos executem a atividade de resolução de problema. Se eles forem capazes de executar o exercício proposto, eles terão compreendido corretamente os conceitos.

A participação no debate sobre as dificuldades da execução da tarefa será considerada como forma de avaliação.

Referências:

CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. Novembro/Dezembro 2011, p. 11-17.

COSTA, Prof. Jaqueline Gomides de. **Plano de aula trigonometria no curso de Técnico Integrado em Informática para Internet no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Trindade**. Disponível em https://suap.ifgoiano.edu.br/media/documentos/arquivos/2018INTINF2MATEMATICA.pdf. Acesso em 03/11/2021.

PEREIRA, Marcos Fabrício Ferreira. **Uma sequência didática para o ensino de semelhança de figuras planas**. 2017. Dissertação (Mestrado) - Universidade do estado do Pará, Belém, 2017.

SERRAZINA, L. (2017). Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. In: GTI (Ed.). **A prática dos professores:** planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, p. 9- 32.

SOUZA, Cristiane Fernandes de; VALCÁCIO, Marcos André José; NASCIMENTO, Wendson César S. do; SILVA, Luana Cardoso da. Atividades didáticas para o estudo de semelhança de triângulos: resultados de uma investigação-ação na formação de professores de matemática. **VI Congresso nacional de educação**, 2018.

SOUZA, Wagner Santiago de. **Trigonometria em triângulos quaisquer com o auxílio de triângulos retângulos**. – Juazeiro, 2016 .

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo:Editora UNESP, 1999. p. 199-220.

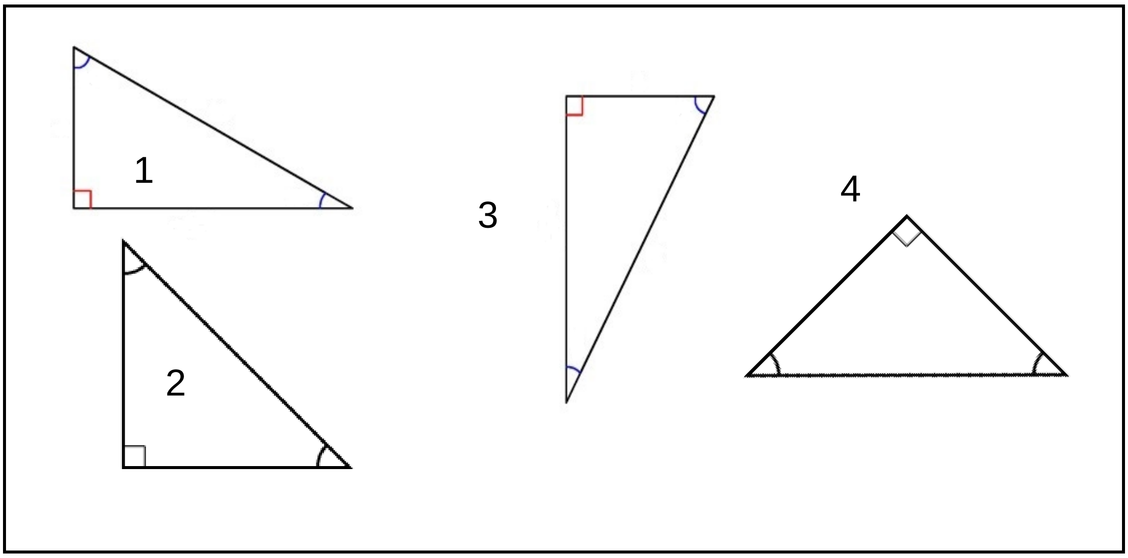
ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA. Boletim de Educação Matemática**. UNESP. Rio Claro, v.25, p.73-98, 2011. Disponível em: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf.

Anexo 1 - Tarefa introdutória

Nome:
Data:
Professor:

Investigando proporcionalidade em triângulos

Etapa 1

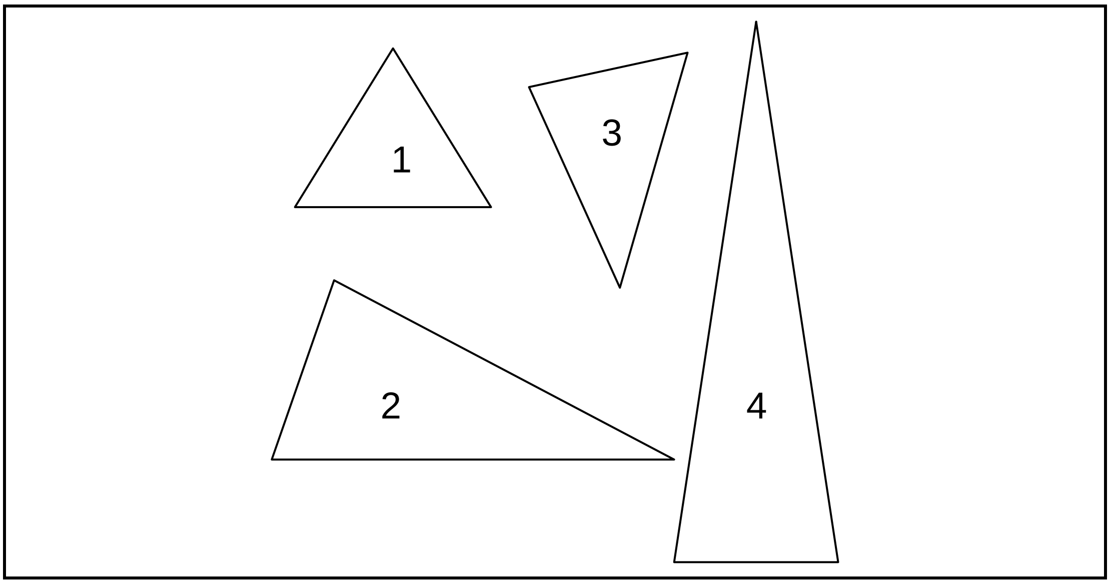


1. Observe os triângulos acima e preencha a tabela abaixo com o auxílio de uma régua, um esquadro e seus conhecimentos sobre triângulos retângulos.

	Lados	Ângulos	Seno
Triângulo 1			
Triângulo 2			
Triângulo 3			
Triângulo 4			

2. Compare os valores dos lados e o seno dos ângulos opostos respectivos.
3. O que podemos aferir a respeito da relação entre lados e ângulos opostos?

Etapa 2



4. Observe os triângulos acima e preencha a tabela abaixo com o auxílio de uma régua, um esquadro e uma calculadora.

	Lados	**Ângulos**	**Seno**
Triângulo 1			
Triângulo 2			
Triângulo 3			

Triângulo 4			

5. Compare os valores dos lados e o seno dos ângulos opostos respectivos.
6. Quais conclusões são possíveis tirar da comparação? São as mesmas da etapa 1?
7. Como você registraria as conclusões das etapas 1 e 2?

Anexo 2 - Resolução do problema proposto

Quando pulamos amarelinha, qual é o grau de abertura de nossas pernas?

1. Meça o tamanho de suas pernas e registre a seguir: ____________
2. Quando brincamos de amarelinha é necessário pular com duas pernas nos quadrados 2 e 3. Repita este processo e meça a distância entre suas duas pernas e registre a seguir: ___________
3. Com os valores do tamanho de suas pernas, distância entre as pernas e conhecimentos sobre lei dos senos e dos cossenos calcule os graus:
   a. Entre as duas pernas
   b. Entre o chão e uma das pernas

X. Mãos às Cartas: A Matemática no Jogo de Pôquer

Aryssa Victoria Shitara, Jeferson Vinicius Moreira & Jonatan Lucas Linhares

MÃOS ÀS CARTAS: A MATEMÁTICA NO JOGO DE PÔQUER

Aryssa Victoria Shitara
Jeferson Vinicius Moreira
Jonatan Lucas Linhares

Ano Escolar: 2º ano do Ensino Médio

Ementa: Análise Combinatória e Probabilidade; resolução de problemas.

Objetivos:

Objetivo geral: identificar possíveis resultados e compreender que alguns acontecimentos do nosso cotidiano possuem natureza aleatória, sendo possível estimar o grau de possibilidades ou chances de ocorrência desses eventos.

Objetivo específico: Calcular a probabilidade de ocorrência de alguns eventos por meio da razão:

$$\frac{\text{Números de possibilidades favoráveis}}{\text{Número total de possibilidades}}$$

Calcular a combinação simples de n elementos tomados p a p, utilizando a expressão a seguir:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \qquad (n \geq p)$$

Competências e habilidades matemáticas

Este plano de aula envolve as seguintes competências específicas e habilidades da BNCC (BRASIL, 2018): habilidade 6 (EM13MAT106) da **competência específica 1**; habilidades 10 (EM13MAT310), 11 (EM13MAT311) e 12 (EM13MAT312) da **competência específica 3**; habilidade 11 (EM13MAT511) da **competência específica 5**.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADE (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADE (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Recursos Empregados:

Projetor para a apresentação de slides, lousa, caneta esferográfica, papel sulfite, cartas de baralho. Os materiais citados serão utilizados para a aplicação de uma atividade lúdica envolvendo o jogo de cartas pôquer.

Atividades:

1. Introdução

Segundo Lopes *et al.* (2013, p. 50), muitos professores sentem dificuldade ao abordar Probabilidade na escola. Com base em outros autores, são apontados desafios como: pouca atenção a estes conteúdos na formação inicial e continuada; abordagens inadequadas em livros didáticos; carência de material específico de qualidade; contato limitado dos professores com pesquisas.

Conforme Santos (2016, p. 44), “o professor da educação básica deve buscar, propor ou construir junto aos estudantes, modelos probabilísticos (aplicações) que maximizem as oportunidades de aprendizado sobre probabilidade”.

Uma opção é a utilização de jogos em sala de aula. De acordo com Grando (2007, p. 4): “Raras vezes existe um trabalho intencionalmente planejado, com intervenções pedagógicas previstas pelo professor e com continuidade de várias aulas.” Neste sentido, o plano de aula aqui proposto fornece uma sequência didática de cinco aulas envolvendo o pôquer, em oposição à propensão de apenas “utilizar os jogos no final da aula, nos minutos restantes” (GRANDO, 2007, p. 4).

Em Polesi (2017, p. 22), encontramos várias motivações para o uso desse jogo no ensino de Probabilidade e Análise Combinatória:

> O Poker pode ser um jogo de grande importância, pois envolve estratégias, a tomada de diferentes tipos de decisão, a análise dos erros, o discernimento de como proceder com as perdas e os ganhos, a análise da jogada dos adversários e a capacidade de mudar o seu padrão de jogo mediante as ações tomadas pelos oponentes. Todo esse processo tem uma importância fundamental para o processo de aprendizagem, racionalização, reflexão, análise, criatividade, entre outros fatores que possam vir a despertar maturidade para lidar com novas transformações que podem ocorrer em seu cotidiano. (...) Então, ao conciliar o Poker e a matemática podemos obter um grande apoio de intervenção pedagógica.

2. Atividades desenvolvidas

Assumindo que os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade já tenham sido estudados anteriormente, serão destinadas **CINCO** aulas de 50 minutos cada, organizadas da seguinte maneira:

Aulas 1 e 2: apresentação das regras do pôquer por meio de recursos audiovisuais. Nesse momento, sugerimos que o professor, além de uma descrição das regras do jogo, apresente aos alunos um vídeo explicativo. Para uma melhor compreensão das regras e da dinâmica da atividade, uma simulação (jogo aberto) pode ser realizada entre alguns voluntários no centro da sala de aula para que todos os outros alunos possam acompanhá-la. Por fim, é necessário que o professor explicite qual será a programação das aulas seguintes e, principalmente, o que espera dos seus alunos no decorrer da atividade.

Aulas 3 e 4: É a hora de jogar pôquer! Na aula 3, o professor deve dividir a turma em grupos de 4 a 8 jogadores e entregar a cada um dos grupos um questionário que contenha questões norteadoras e espaço para comentários e reflexões a fim de auxiliar na produção de um relatório final. Para tanto, o professor também deve definir quais grupos serão os primeiros **observadores** e quais serão os primeiros **jogadores.**

Os observadores, inicialmente, farão análises, escreverão comentários e responderão às perguntas norteadoras do relatório com base nos jogos e atitudes dos colegas dos grupos de jogadores. Após a finalização do primeiro jogo de cada grupo, os primeiros jogadores passarão a ser observadores e vice-versa. O processo se repete novamente com a supervisão e orientação do professor.

Aula 5: é destinada à finalização do relatório. Nesta última etapa, os estudantes podem tirar dúvidas, além de discutir e compartilhar seus apontamentos e aprendizagens. A sugestão é que o professor conduza a discussão apresentando alguns questionamentos e situações que tenha observado durante a realização da atividade (ver ALGUMAS ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR) e, se possível, estimule um debate entre os próprios alunos a fim de identificar possíveis falhas conceituais em relação ao tema trabalhado. Dessa forma, é importante que o professor ofereça alguns minutos para que os alunos possam acrescentar ou alterar informações que julgarem necessárias antes da entrega do relatório final.

ALGUMAS ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Nas **Aulas 1 e 2**, inicialmente o professor apresentará o baralho de 52 cartas. Desse total, cada participante pensa em sua melhor jogada (mão de pôquer) com cinco cartas (**ANEXO 1** - sugestão: imprimir colorida e entregar uma cópia por dupla).

É importante destacar que existem quatro naipes (ouros, paus, copas e espadas). Nesta introdução ao jogo, é possível mostrar uma imagem como a seguinte:

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/desafio-truque-com-cartas/. Acesso em: 18 abr. 2021.

Cada naipe possui treze cartas e existe uma ordem dos valores. Como visto acima, do menor para o maior valor de carta, temos: ÁS (A), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valete (J), dama (Q) e rei (K)). Atenção para o ás: esta carta é de menor valor unicamente em sequências A-2-3-4-5. Nas demais jogadas, o **ÁS** vale mais que o rei.

É importante destacar que existem várias modalidades do pôquer, porém nesta aula será utilizado o "*Texas Hold'Em*", que é o estilo mais popular e está presente em grandes torneios mundiais. O objetivo do jogo consiste em ganhar todas as fichas dos seus adversários.

Nessa modalidade, o número de participantes varia de 2 a 10 jogadores. Em relação à jogabilidade, no início da partida os jogadores recebem duas cartas viradas para baixo e dependendo da sua posição no jogo, têm a opção de saírem do antes das apostas começarem, sem pagar nenhuma ficha.

Após esse primeiro momento, os jogadores precisam pagar uma determinada quantidade de fichas para poder continuar. Na sequência, três cartas são viradas para cima, elas são chamadas de "*flop*". Essa é a hora em que os participantes refletem sobre a probabilidade de conseguirem uma boa jogada, juntando as duas cartas que estão na sua mão com as cartas da mesa. Dessa forma, podem aumentar as suas apostas na intenção de aumentar o prêmio final.

Em seguida, uma quarta carta é virada, denominada como "*turn*", e novamente os jogadores podem fazer as suas apostas ou desistir, caso queiram. Por fim, uma quinta carta é virada (chamada de "*river*") e os participantes viram as suas cartas. A melhor combinação de cinco cartas ganha o jogo e todas as fichas da mesa.

Nas **Aulas 3 e 4**, o professor terá que dividir a turma em dois grupos, sendo que um desses grupos irá observar e o outro jogará. Na aula seguinte, os alunos irão alternar o seu papel, aqueles que não jogaram na atividade anterior terão a oportunidade de aprender na prática.

Nessas aulas, o docente terá que intervir em algumas jogadas, com o intuito de que os alunos possam refletir nas possibilidades de conseguir determinada "mão do pôquer". Além disso, já que o professor apresentará um questionário composto por questões norteadoras, é importante orientar os alunos e destacar, novamente, o que se espera de cada um deles no que diz respeito ao desenvolvimento da atividade.

A **Aula 5** consiste na realização de discussões entre os alunos mediadas e conduzidas pelo professor. Por isso, serão apresentadas algumas sugestões de perguntas que podem ser incluídas como norteadoras no relatório (**ANEXO 2**) e levantadas na aula de discussão.

1) No início do jogo, todos os jogadores recebem duas cartas viradas para baixo, existem quantas combinações possíveis para essas duas cartas? Lembrando que o baralho possui 52 cartas.
2) Sabendo que o "Ás" é a carta mais forte do jogo, qual a probabilidade de um jogador sair com duas dessas cartas nas suas mãos?
3) Lembrando que o baralho é dividido em 4 naipes diferentes, qual a probabilidade de um jogador sair com duas cartas do mesmo naipe no início do jogo?
4) Se um jogador receber duas cartas de diferentes naipes no início do jogo, formando parte de uma sequência (por exemplo, 5 e 6), qual a probabilidade desse jogador conseguir completar o *Straight* (Sequência) com 5 cartas?
5) Se um jogador receber duas cartas de mesmo valor no começo do jogo, qual a probabilidade desse jogador conseguir um *Full House*? Nessa mesma situação, quais seriam as chances de completar uma quadra?
6) Vamos lembrar que o *Flush* é uma mão que corresponde a quaisquer cinco cartas do mesmo naipe, já o *Straight* (Sequência) representa cinco cartas em sequência, independente dos naipes, excluindo o caso do Straight Flush. Sabendo disso, qual dessas mãos é mais provável que um jogador possa tirar para conseguir ganhar o jogo? A partir da resposta, relacione com o ranking de mãos do pôquer, é justificável o *Flush* ter uma colocação mais alta que o *Straight*?
7) Com base no que você aprendeu nessas aulas, como você diria que a probabilidade e a análise combinatória se relacionam com o jogo de cartas?
8) A matemática é útil quando se é necessário tomar uma decisão no jogo de pôquer? E em relação à tomada de decisão em outros contextos da vida humana, tais como pessoal e profissional?

3. Conclusões

De acordo com Rubió e Freitas (2005 *apud* BUSS, p. 12), os jogos promovem “um contexto estimulador da atividade mental e da capacidade de cooperação do aluno, levando-o a interagir com os outros, a trocar pontos de vista, a fazer uso de um processo cognitivo que contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico.”

Cientes de que “tomar o educando em suas múltiplas dimensões tem como finalidade realizar uma educação que o conduza à autonomia, intelectual e moral” (Diretrizes Curriculares Nacionais, 2013, p. 167), aqui se propõe que o ensino de matemática seja diversificado e, mesmo diante da limitação de recursos que é realidade em muitas escolas brasileiras, seja acessível aos alunos em seu mundo de possibilidades. Com base nisso, as atividades lúdicas como jogos de cartas se apresentam e podem ser exploradas em sala de aula como alternativa aos modelos de ensino já bastante utilizados no decorrer do ano letivo, proporcionando uma abordagem didática que cative os alunos por meio de aprendizado e diversão.

Formas previstas de avaliação:

Os alunos podem ser avaliados com base na participação em todas as etapas de desenvolvimento da atividade proposta e na produção de um relatório final (a ser realizado em duplas) baseado nos apontamentos e reflexões relacionadas ao tema trabalhado no decorrer das cinco aulas sugeridas neste plano de aula.

Referências:

BRASIL. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. In: **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013, p. 144-201. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file. Acesso em: 20 de abril de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 17 mar. 2021.

BUSS, Leonidis Margaret. **Dificuldade na Leitura e Interpretação de Problemas Relativos ao Cálculo de Probabilidades e Estatística.** Disponível em:

http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/831-4.pdf. Acesso em: 22 abr. 2021.

EHLERT, Seldomar Jeske. **A matemática no pôquer:** explorando problemas de probabilidade. Orientador: Dr. Leandro Sebben Bellicanta. Dissertação de Mestrado (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Rio Grande, 2014. 72 p. Disponível em: http://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/6654/TCC_Seldomar_verso%20final.pdf?sequence=1. Acesso em: 12 abr. 2021.

GRANDO, Regina Célia. **Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da matemática.** 2007. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5008048/mod_resource/content/1/texto%20jogos%20regina%20grando.pdf. Acesso em: 17 abr. 2021.

LOPES, Celi Espasandin *et al.* O ensino de estatística e probabilidade na educação básica: atividades e projetos gerados a partir de pesquisas de mestrado profissional. **Vidya**, Santa Maria, v. 33, n. 1, p.49-65, jan./jun. 2013. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/245. Acesso em: 16 abr. 2021.

NASCIMENTO, José Roberto Amaral. **O Poker como ferramenta de ensino da Matemática na Educação Básica.** Orientador: Professor Dr. Rodrigo Gondim. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Recife, 2014. 72 p. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/bitstream/tede2/6705/2/Jose%20Roberto%20Amaral%20Nascimento.pdf. Acesso em: 11 abr. 2021.

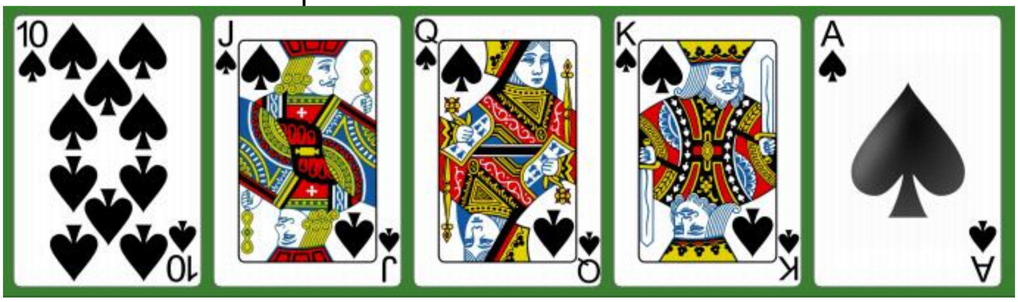
POLESI, Rafael Andrade Pereira. **A Matemática do Poker.** Orientador: Professor Dr. Henrique Marins de Carvalho. Trabalho de Conclusão (Curso de Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) – São Paulo: IFSP, 2017. 66 p. Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/307156/mod_resource/content/0/Rafael%20Andrade%20Pereira%20Polesi.pdf. Acesso em: 18 abr. 2021.

SANTOS, Jorian Pereira dos. **A Teoria da Probabilidade e a Teoria dos Jogos em uma abordagem para o Ensino Médio.** Orientadora: Professora Dra. Débora Borges Ferreira. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Natal, 2016. 72 p. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/23210/1/JorianPereiraDosSantos_DISSERT.pdf. Acesso em: 14 abr. 2021.

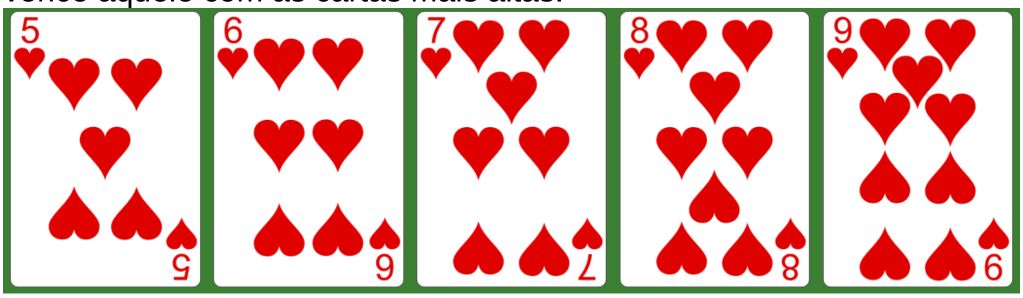
ANEXO 1 - Mãos de pôquer

No pôquer, existem dez jogadas possíveis. A seguir, elas serão elencadas da maior para a menor pontuação. As descrições e exemplos ilustrativos foram adaptados ou retirados de Nascimento (2014, p. 18-20) e Ehlert (2014, p. 21-24).

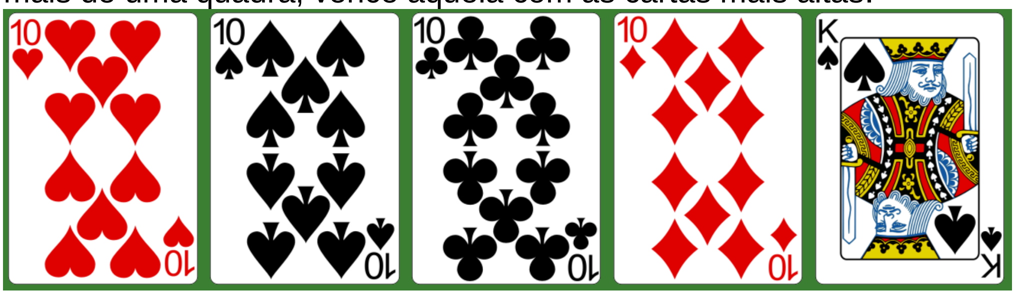
1. *Royal Straight Flush* ou *Sequência Real*: uma sequência de dez a ÁS com cartas do mesmo naipe.



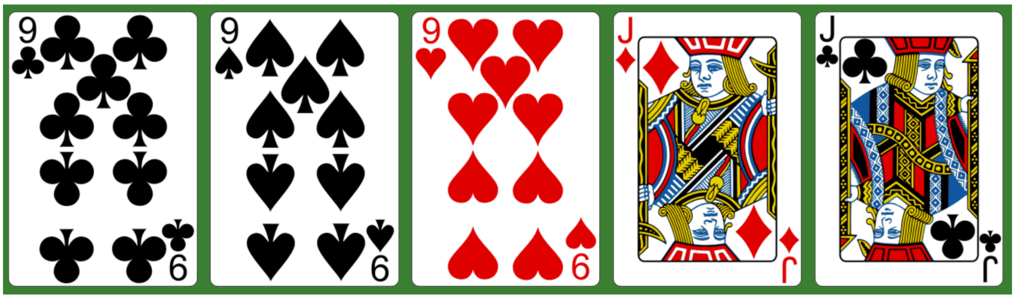
2. *Straight Flush* ou *Sequência de Cor*: qualquer sequência de cinco cartas do mesmo naipe, exceto do *royal straight flush*. Havendo mais de um straight flush, vence aquele com as cartas mais altas.



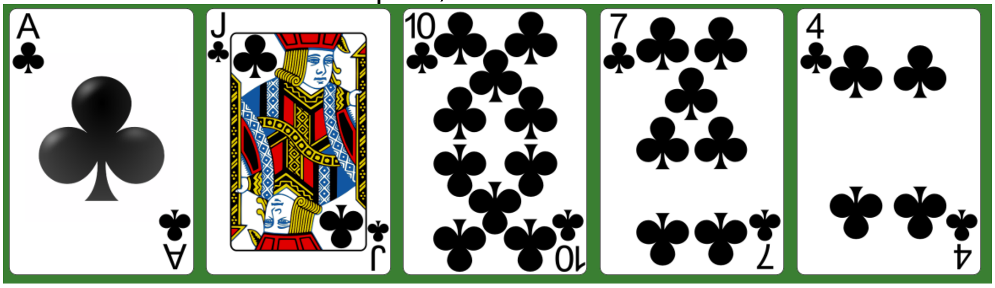
3. *Four of a Kind*, *Quadra* ou *Pôquer*: quatro cartas do mesmo valor. Havendo mais de uma quadra, vence aquela com as cartas mais altas.



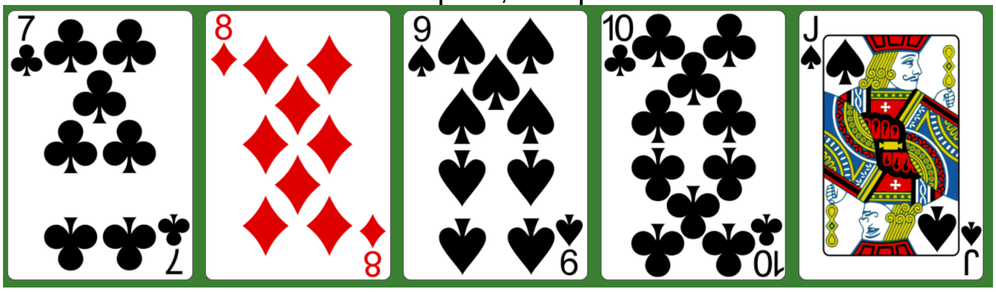
4. *Full House* ou *Full Hand*: uma trinca mais um par.



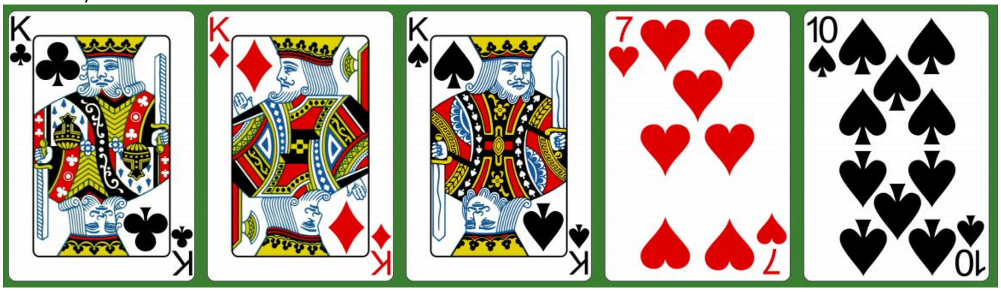
5. *Flush*: quaisquer cinco cartas do mesmo naipe. Havendo mais de um Flush, vence aquele com a carta mais alta. Se os jogadores tiverem a mesma carta alta, comparam-se as próximas que valem mais. Assim por diante, até determinar o vencedor. Em caso de empate, as fichas são divididas.



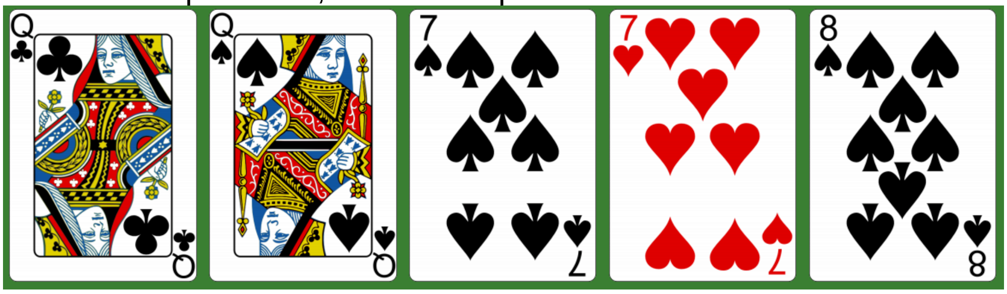
6. *Straight* ou *Sequência*: cinco cartas em sequência, independente dos naipes, exceto straight flush. Se aparecer mais de uma Sequência, vence o jogador com a carta mais alta. Havendo empate, as apostas são divididas.



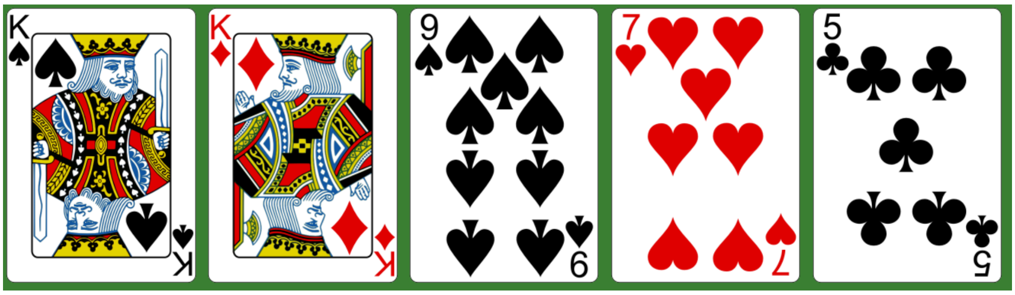
7. *Three of a Kind* ou *Trinca*: três cartas do mesmo valor. Caso haja mais de uma trinca, vence a mais alta.



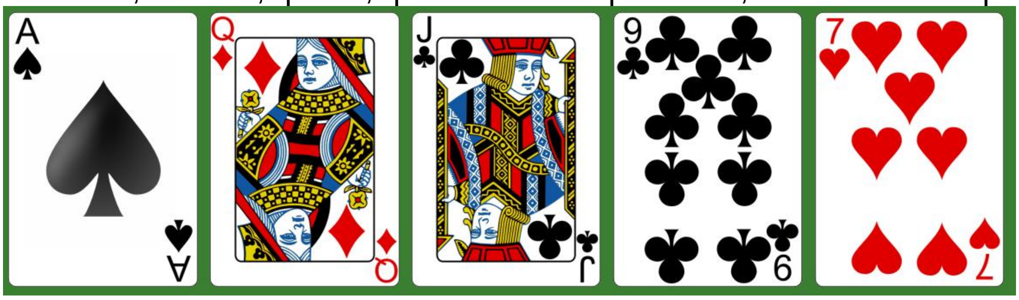
8. *Two Pairs* ou *Dois Pares*: duas duplas de cartas do mesmo valor. Se mais de um jogador tiver Dois Pares, vence aquele com o maior par. Caso os pares mais altos sejam iguais, compara-se a quinta carta (a mais alta determina o ganhador). Havendo empate total, divide-se o pote.



9. *Pair* ou *Par*: duas cartas do mesmo valor. Caso mais de um jogador tenha essa mão, vence o par mais alto. Se os pares forem iguais, analisam-se as cartas mais altas (3ª, 4ª, 5ª cartas). Para empate total, o pote é dividido.



10. *High Card* ou *Carta Alta*: quando não se verifica nenhuma das opções anteriores, vence a carta mais alta. Se necessário, compara-se a segunda carta mais alta, terceira, quarta, quinta. Para empate total, dividem-se as apostas.



ANEXO 2 - Relatório

Questões

1. Quando você foi membro do **grupo observador**, qual grupo de jogadores você acreditava que seria o ganhador? Por quê?

2. Com base na resposta dada ao item anterior, pode-se dizer que o seu palpite estava correto?

3. Uma mão de pôquer é formada por 5 cartas. Sabendo que um baralho tem 52 cartas, existem quantas combinações de mãos de pôquer?
OBS.: O número procurado representa a quantidade de *elementos* que pertencem ao **espaço amostral** ou **conjunto universo** (o conjunto dos resultados possíveis em um *experimento*). Aqui, os *elementos* são as possíveis sequências de 5 cartas no pôquer. Já o *experimento* se refere ao jogo de pôquer.

4. Um **evento** é um subconjunto qualquer de um espaço amostral. Caracterize o evento Royal Straight Flush: quais sequências formam esse subconjunto? Sabendo isso, qual a probabilidade de conseguir um Royal Straight Flush?

5. Quantos elementos (neste jogo, sequências de 5 cartas) formam o evento Straight Flush? (Isto é, quantas combinações de Straight Flush existem?) Agora, calcule a probabilidade dessa mão, a segunda mais forte do pôquer.

6. Quantas combinações distintas existem para as jogadas seguintes? Ainda, calcule a probabilidade de conseguir cada uma das próximas mãos:

a. Quadra.
b. Full House.
c. Sequência.
d. Trinca.
e. Dois Pares.
f. Um Par.

7. Nas questões acima, estudamos as nove jogadas mais fortes do pôquer. No entanto, a mão mais provável é a Carta Alta (quando não conseguimos nenhuma das nove mãos anteriores). Qual a probabilidade da jogada ser Carta Alta?

8 . No pôquer é possível "blefar", ou seja, o jogador aumenta as suas apostas com a intenção de que os seus adversários pensem que ele está com uma boa mão. Sabendo disso e relacionando com o conceito de análise combinatória visto em aula, é mais vantajoso blefar no início ou no final do jogo? Justifique a sua resposta.

9. Cite algumas situações do cotidiano que podem ser interpretadas por meio dos seus conhecimentos sobre probabilidade e explique como isso pode ser feito.

10. Descreva em no mínimo 5 linhas como a atividade MÃOS ÀS CARTAS: A MATEMÁTICA NO JOGO DE PÔQUER contribuiu para o desenvolvimento dos seus conhecimentos em matemática. Cite também os motivos que o fizeram aprovar ou reprovar essa forma de aprender matemática.

XI. Acaso: da História Antiga a Cardano

Augusto Mendes Duarte & Katarina Duarte Fernandes

O ACASO: DA HISTÓRIA ANTIGA A CARDANO

Augusto Mendes Duarte

Katarina Duarte Fernandes

Ano Escolar: 2º Ano do Ensino Médio

Ementa: Noções básicas de probabilidade; Espaço Amostral

Objetivos: Através de contextualização histórica, despertar interesse no aluno acerca da probabilidade, de sua história e aplicações. Intenciona-se ainda desmistificar a ideia de que a ciência é restrita a gênios, evidenciando casos em que, mesmo estudiosos e professores renomados, acabaram se equivocando. Visamos também humanizar a Matemática através da história de vida de um importante estudioso do acaso.

Competências e habilidades matemáticas

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), indica que os novos conhecimentos específicos de Matemática a serem adquiridos pelos alunos do Ensino Médio requerem processos mais elaborados de reflexão e de abstração de modo a permitir a elaboração e resolução de problemas com maior autonomia. Nessa perspectiva, o documento aponta para o desenvolvimento de algumas habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.

Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

O documento ainda enfatiza a recomendação de que o ensino contribua para a formação dos alunos como cidadãos, de forma que os docentes não ajam meramente como transmissores de conhecimento. Neste sentido, atividades em grupo, projetos, reflexões críticas e conexões com estudos sociais são repetidamente listadas em meio às competências.

No que tange a desenvolvimentos probabilísticos, destacamos as seguintes habilidades:

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades

Procuramos, ao longo deste plano, desenvolver um pouco cada uma delas, oferecendo uma ideia geral para o aluno em meio a contextualização histórica.

Recursos Empregados:

Moedas, papel, lápis.

1. Introdução

Segundo Bazzo (2003), a ciência é normalmente vista como um empreendimento dissociado da sociedade em geral – a população a entende como uma fonte de verdades segura e fundamentada sobre um método rígido e irrefutável. Esta visão de ciência, criada pelo movimento empirista de Francis Bacon e John Stuart Mill, foi rechaçada finalmente no final do século XX com propostas como a de Thomas Kuhn, que compreende o saber científico como um processo inerentemente social e político.

Durante o século passado acumularam-se interpretações que aproximam a ciência dos contextos sociais e das ciências humanas. No final dos anos 60 e início dos 70, nasceram os estudos CTS – Ciência, Tecnologia e Sociedade, cujos objetivos incluem o estudo da inserção da ciência no âmbito social e suas influências recíprocas.

A visão herdada de ciência acima mencionada reflete não somente o pensamento do cidadão comum, mas também os processos de ensino por trás da formação deste cidadão. A simples transmissão e repetição de conhecimento trazida pelos métodos tradicionais, os mesmos criticados pela BNCC, são representativas das deficiências apresentadas pelos estudantes da atualidade.

Kuhn (1962), no capítulo inicial de seu livro, critica a forma como os livros didáticos trazem a visão de que a ciência é algo fundamentado sobre o acúmulo de conhecimento. Em relação especificamente ao ensino, Bazzo (2003) mostra diversas construções deturpadas da ciência que são apresentadas aos alunos. Entre elas, destaca-se a visão sobre a problemática e a histórica, que apresenta a ciência como se fosse um empreendimento certo e acabado, ocultando os processos de descobrimento e reformulações que são inerentes à sua construção. Intimamente relacionadas estão a visão cumulativa linear, que pressupõe que a ciência sempre segue em frente em relação a verdade, a visão socialmente neutra, de que a ciência é divorciada de interesses políticos e sociais, e as visões individualistas e elitistas, em que o conhecimento só é construído efetivamente por gênios e elites.

Especificamente em relação à Matemática, Miguel (1997) reuniu em seu artigo diversos argumentos, alguns utilizados há vários séculos, a favor do ensino da Matemática através de sua história. Entre esses, alguns foram apropriados para a construção desta proposta.

Em estrita concordância com a visão de ciência expressa nos parágrafos anteriores, a História é considerada um instrumento que possibilita a "desmistificação da Matemática e desalienação de seu ensino". O artigo oferece uma citação de 1972 de Morris Kline, historiador da Matemática, na qual defende como as exposições polidas dos cursos não conseguem mostrar os obstáculos do processo criativo, as frustrações e o longo caminho do desenvolvimento matemático, já que apresenta tudo como se fosse pronto e acabado. Outro argumento evidencia a História como um instrumento de conscientização epistemológica, já que mostrar como o conhecimento é construído coincide com a carência dos alunos por formulações menos rigorosas (em relação ao padrão atual).

No aspecto formativo do ensino da ciência, a História da Matemática é analisada por Miguel (1997) ainda como um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico, já que apresenta as características dialéticas e sociais de seu desenvolvimento. Trechos do livro Conjecturas e Refutações de Lakatos (1978) são citados já defendendo este ponto de vista, contrastando com o ensino tradicional. Além disso, Kline adiciona que a História promove atitudes e valores nos discentes, já que mostra o esforço ao longo do tempo para superar problemas, estruturando o pensamento científico. Dentro da Matemática, ainda, a

História traz a possibilidade de estabelecer conexões naturais entre suas diversas áreas, tornando a exposição dos tópicos menos artificial.

Em estudos mais recentes como o de Saito (2012), ainda, sugere-se uma interface entre História e Matemática, relacionando de forma interdisciplinar historiadores e matemáticos. No processo de ensino, incide uma análise lógico-histórica da Matemática, sob cuja perspectiva são transmitidos e recriados os processos pelos quais passaram conceitos em seu desenvolvimento, em contraste com a simples apresentação de biografias de matemáticos, comuns em livros didáticos.

> "Queremos apenas ressaltar que o educador, ao levar para a sala de aula as histórias que estão nos livros, atualmente baseadas em uma vertente historiográfica tradicional, tende a reforçar a linearidade do desenvolvimento do conceito. (...) Esse anacronismo geralmente é acentuado quando o historiador ou, mesmo, o educador escolhe um assunto e seleciona, na história, momentos que supostamente estejam relacionados a ele, fazendo uma comparação descontextualizada. (...) Ao procederem dessa maneira, as narrativas históricas passam a organizar os conteúdos matemáticos de tal modo a darem ênfase ao encadeamento lógico dos conceitos, sem relação com as necessidades humanas e outros aspectos sociais e culturais que fazem parte do seu contexto. (...) Ao contrário, uma vertente historiográfica mais atualizada propõe analisar o passado no passado, e lá encontrar um objeto matemático, destacando-o da trama da qual ele faz parte." (SAITO, 2012)

Harmonizando-se com as funções mostradas por Miguel (1997), as observações de Saito (2012) e as sugestões da BNCC sobre formar cidadãos críticos e capacitados em suas opiniões, esta construção didática se preocupa em unir um entendimento genuíno da formação da ciência matemática ao estudo de seus conteúdos programáticos. Para tanto, a História é apresentada ressaltando suas dúvidas e especulações, assim como desfazendo mitos propagados pela visão tradicional cumulativa de ciência.

Neste plano, supomos que os alunos já possuem um bom conhecimento prévio acerca de Análise Combinatória, a partir do qual desenvolvemos as ideias probabilísticas relacionadas ao espaço Amostral. O planejamento visa ser completado em duas ou três aulas a depender do andamento dos alunos e da forma de exposição do professor.

2. Contextualização na História Antiga

Segundo Mlodinow (2009), as pessoas costumam ignorar a lei de probabilidade que diz que a probabilidade de um evento junto de outro ocorrer deve ser menor ou igual a do evento sozinho. Isso porque a seleção natural teria treinado o ser humano para ver conexões entre eventos, e não analisar eventos solitários. O autor argumenta como esta deficiência de análise probabilística ocasionou, de maneiras diversas, acepções tendenciosas ou errôneas sobre a aleatoriedade.

Estudos de história como o de Feng (2013) ou de mitologia como o de Bulfinch (2006) exemplificam como desde a antiguidade, em qualquer parte do mundo, o homem ansiava por conquistar algum domínio sobre o acaso.

Conforme Bulfinch e Mlodinow, os gregos, em seu desejo de poder domar e prever o futuro, confiavam decisões importantes aos oráculos. Munidos dos mais diversos materiais e métodos, profetas e profetizas proferiram palavras que dissipavam a bruma do destino, propalando o caminhar por um caminho fixo em que não haveria bifurcações. O acaso, assim, não existia: somente se fazia presente a vontade dos deuses.

Para ver além do que o atual permitia, os oráculos se utilizavam de diferentes técnicas. No geral, para fazer uma previsão, se fazia necessário o uso de algum aparato que pudesse gerar diferentes resultados, nem todos favoráveis. Após acionar seu funcionamento, a intervenção divina faria com que o dado objeto mostrasse uma resposta condizente com o futuro que virá a acontecer.

Na ausência de dados como os que possuímos hoje em dia, um objeto de uso comum por civilizações ocidentais como os gregos ou mesopotâmicos era o astrágalo, um osso do tornozelo das ovelhas que se assemelha muito a um dado. O uso que se fazia deles era tanto recreativo quanto religioso, a depender do contexto.

Figura 1: Jogadora de astrágalos, Museu Britânico. Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Knucklebone_Player_-_British_Museum_-_Joy_of_Museums.jpg; Licença: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en

O osso possui seis lados, mas só quatro deles eram estáveis o suficiente para permitir que o osso ficasse de pé. Conforme Mlodinow (2009), estudiosos atuais apontam que a probabilidade de cair cada face, devido à anatomia disforme, era em torno de 10% para duas das faces e 40% para as outras duas. Um ou vários deles eram jogados e, dependendo das faces resultantes, uma interpretação sobre o futuro ou a vitória de um jogo era decidida.

No caso de jogo de apostas, um conjunto de quatro era normalmente utilizado. O melhor resultado era considerado aquele em que os quatro astrágalos caíam em lados diferentes, que era chamado de “jogada de Vênus”. Em oráculos, historiadores como Heródoto e escritores como Sófocles, Ésquilo e Homero citavam práticas de adivinhação, sendo que gregos de cargos proeminentes baseavam suas escolhas nos resultados das previsões. Fica evidente, assim, como o desejo de controlar a aleatoriedade se mostrava indelével no homem ocidental antigo, ao mesmo tempo em que se deixava guiar por ela em seus caprichos e previsões.

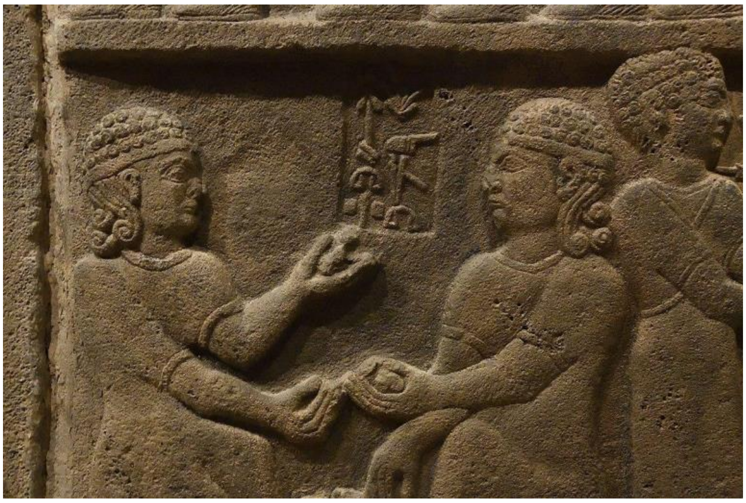


Figura 2: Mesopotâmicos jogando astrágalos retratados em um monumento em Carchemish. Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gaziantep_Archaeology_museum_Carchemish_orthostats_4334.jpg; Licença: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en

Se não visto como obra divina, o estudo efetivo da probabilidade não era bem-visto na sociedade grega antiga. Em Fédon, de Platão, por exemplo, Símias diz a Sócrates que “argumentos baseados em probabilidades são impostores”, sendo estes praticados por enganadores em todas as áreas. Os estudos matemáticos gregos, como pode ser visto em Roque (2012), se ocupavam de contagens e construções exatas, não deixando espaços para aproximações.

Mlodinow (2009) vê Cícero, cônsul do final do século I a.E.C., como o principal defensor da probabilidade na antiguidade, chegando a não atribuir a sorte de se fazer uma jogada de Vênus à intervenção da deusa, e sim ao acaso. É dito ser aquele que cunhou o termo *probabilis*, tendo dito certa vez que “a probabilidade é o próprio guia da vida”.

Após o período helenístico, o Império Romano, geralmente lembrado pelo grande desenvolvimento do Direito e outras práticas civis, gerou também leis baseadas na probabilidade. Por exemplo, classificavam diferentes necessidades de testemunhas a cargos, refletindo a responsabilidade envolvida: “um bispo não deve ser condenado, a não ser com 72 testemunhas … um padre cardeal não deve ser condenado, a não ser com 44 testemunhas, um diácono cardeal da cidade de Roma, com 36 testemunhas, um subdiácono, acólito, exorcista, leitor ou ostiário, com sete testemunhas”.

Do outro lado do mundo, temos outro exemplo de exímia importância histórica. Apesar de geralmente não estudado no Brasil pela recorrente deficiência no ensino da História de civilizações asiáticas, existiram na China Antiga importantes artefatos conhecidos como “ossos de oráculo”. Tais objetos eram centrais a um governo teocrático centrado em práticas de adivinhação.

Figura 3: Osso de tartaruga com rachaduras e anotações. Fonte: Shutterstock

Segundo Feng (2013), em 1899 foram descobertos artefatos até então desconhecidos na história da China: ossos que continham misteriosas rachaduras. Após estudos intensivos, pode-se determinar que pertenciam à mais antiga dinastia chinesa, a civilização Shang. Esta civilização de regadio dominou terras chinesas a partir do século 1600 a.C., sendo, portanto, contemporânea com as civilizações egípcia e mesopotâmica. A intenção por trás destes objetos não era outra, senão a de predizer o futuro através de um evento aleatório.

Para a realização do ritual de adivinhação, o sacerdote colocava primeiro uma questão ou pedido que deixasse claro acerca do que se tratava a previsão. A seguir, se aquecia um bastão de metal a altíssimas temperaturas, e o inseriu em um orifício feito previamente no osso. O calor emitido pelo bastão fazia o osso se rachar em determinado padrão, que então era analisado pelo responsável, geralmente o próprio rei Shang.

As inscrições em chinês antigo eram então anotadas perto das rachaduras revelando suas interpretações. Os tópicos de adivinhação variavam imensamente, tratando desde guerras contra inimigos recorrentes, como os Quiang ou os Zhou, fuga de servos específicos, se iria chover em determinado dia ou até se a dor de dente do rei iria melhorar. As respostas geralmente incluíam o dia da semana em que dado evento viria a acontecer, e os rituais aconteciam com periodicidade semanal ou anual. A mesma questão, por vezes, poderia ser colocada novamente em diversas datas para ser reafirmada.

Rituais fora de época ainda eram feitos quando algum ancestral era identificado como causador de algum mal ao rei, como dor de dente ou dor no ombro. O rei derivava seu poder dos ancestrais, tanto metaforicamente quanto literalmente através da cultura de ascendência e rituais. Por conseguinte, o Estado Shang em si dependia da manutenção dos constantes sacrifícios. Ofereciam-se gado, ovelhas, porcos, ou um ritual de queima de madeira. Além disso, uma grande tradição Shang era de oferecer sacrifícios humanos a seus ancestrais, no geral escravos obtidos pela guerra com o povo Quiang. Um registro em um destes ossos, por exemplo, descreve uma oferenda de 100 copos de vinho, 100 prisioneiros Quiang, 300 gados, ovelhas e porcos. Animais enterrados não foram encontrados, portanto sua carne deveria ser consumida após o sacrifício e seus ossos reaproveitados. Os humanos pareciam terminar agrupados em fossos de terra. Somente em uma cidade, foram encontrados mais de 2500 fossos de sacrifício, cada um contendo de dez a 15 esqueletos, com ou sem cabeças. Estima-se que ao menos 30000 vítimas foram oferecidas desta maneira no cemitério real.

Em estrito contraste com o geralmente estudado no ocidente, a escrita chinesa não surgiu com o objetivo de contagem ou com funções administrativas, como a notação cuneiforme mesopotâmica. É suposto que, ao contrário desta função econômica da escrita na mesopotâmia e da de carga política no Egito, na China a escrita parece ter nascido com uma intenção religiosa de se comunicar com os espíritos. Os caracteres chineses como os vistos no osso da Figura 3, de 3500 anos atrás, são exatamente os mesmos usados até hoje na China - à exceção de que a forma atual é simplificada para facilitar a escrita. Isto faz com que a escrita chinesa seja a forma de escrita utilizada pelo maior tempo contínuo em todo o mundo, surgida em meio a rituais que ocorriam segundo as leis austeras da probabilidade.

3. Contextualização na História Recente

Entre os exemplos de reconhecimento de padrões mais simples de todos os tempos, está o humano que olha para o céu. Em quase todas as civilizações, as constelações eram vistas formando imagens - em alguns casos pessoas do outro lado do mundo viam a mesma imagem no mesmo padrão. Fatos como este mostram como procuramos sempre por ordem em meio ao caos, mesmo quando a ordem só existe na nossa cabeça.

Mlodinow (2009) oferece exemplos tanto atuais quanto corriqueiros, de confusões feitas mesmo por profissionais da saúde. Por exemplo, sabendo que embolia pulmonar causa falta de ar e, raramente, paralisia parcial, o que deve ser mais provável: que um paciente com embolia tenha só paralisia, ou que tenha a paralisia e a falta de ar? A resposta pode não ser o que parece.

Para o autor a probabilidade, devido à dificuldade inerente a nossa condição de humanos que buscam padrões, é de difícil compreensão e extremamente tendente ao erro. Entre as citações que oferece em seu livro, se encontra uma de um professor de Harvard que diz, sem rodeios: “Nosso cérebro não foi muito bem projetado para resolver problemas de probabilidade.” Martin Gardner, cientista que publicava na *Scientific American,* ainda observou que “em nenhum outro ramo da matemática é tão fácil para um especialista cometer erros como na teoria da probabilidade”.

Oferecemos alguns exemplos a seguir de confusões que já ocorreram na História da Probabilidade. Este tipo de abordagem pode ser muito útil de se mostrar aos alunos para evidenciar como não existem gênios - todos se confundem ou podem possuir dificuldades.

Um problema conhecido oferecido no livro é

> “Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: ‘Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?’ Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?” (MLODINOW, 2009, p, 54)

Marilyn vos Savant, da revista *Parade* em 1986, colocou esta pergunta baseada em um programa televisivo famoso na época e a respondeu de uma maneira inesperada: disse ser vantajoso mudar a escolha. A autora, por este fato, recebeu mais de 10 mil cartas anunciando seu erro, sendo que mais de mil PhDs, muitos de Universidades importantes, a atacaram com acusações como “você errou feio”. Após dedicar algum espaço à questão na coluna, Marylin decidiu não mais tocar no assunto.

Ao contrário de todas as probabilidades, na verdade, era o caso de que mil PhDs estavam errados. Ao ser informado disso, Paul Erdös, um dos maiores matemáticos do século XX, teria afirmado estar incrédulo. Mesmo apresentado a uma prova matemática formal da resposta correta, ainda não acreditou nela, ficando irritadiço. Somente depois que um colega preparou uma simulação computadorizada na qual Erdös assistiu a centenas de testes que geraram um resultado de 2 para 1 a favor da mudança na escolha da porta, o cientista finalmente admitiu estar errado.

Em nossa interpretação, além de mostrar como a intuição humana pode nos pregar peças quando se trata de raciocínios probabilísticos, tal anedota é um bom retrato de como o erro se faz presente mesmo nas mentes mais avantajadas, sendo uma parte inalienável do processo de aprendizado. Assim, é interessante que os alunos entendam que mesmo os “gênios” e doutores erram com frequência, e que não há nada de errado com erros durante a trajetória de estudo de cada um.

No século XVI, entre os livros póstumos de Gerolamo Cardano, encontrava-se o *Livro dos Jogos de Azar*. Este foi o primeiro manuscrito do mundo sobre probabilidade, tentando finalmente discernir como funcionava o acaso. O discernimento de Cardano sobre o funcionamento do acaso incorporava um princípio que hoje é chamado de Lei do Espaço Amostral.

Podemos definir tal conceito como: "se tivermos em um processo aleatório muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ou seja, ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultados. O conjunto de todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral.”

Por exemplo, o espaço Amostral ao lançarmos duas moedas é o conjunto de resultados possíveis. Seriam eles (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa). Apesar de simples, se assim colocado, podemos sofrer enganos intuitivos. D' Lambert, por exemplo, importante matemático do século XVIII, mesmo após inúmeros sucessos matemáticos cometeu este erro simples ao analisar a probabilidade de duas moedas - do seu ponto de vista, havia três possibilidades: cara-cara, coroa-coroa e uma cara e uma coroa. Portanto, a chance de cada uma delas era ⅓.

A primeira atividade que propomos é pedir aos alunos que analisem esta afirmação e tentem descrever o porquê ela está errada, tentando oferecer uma explicação, qualquer que esteja a seu alcance, para o caso.

Uma das respostas possíveis é mostrar, a partir de conhecimentos combinatórios, que se nos concentrarmos na moeda esquerda, para cada face que ela mostra há duas possibilidades para a outra. De fato, se ela cair cara e a outra coroa, ou se ela cair coroa e a outra cara, são resultados diferentes. Mesmo que misturássemos as moedas em uma caixa e chacoalhássemos, a probabilidade de terem faces diferentes ainda seria ½, pois os casos possíveis não mudariam.

Cardano estudou também outros problemas da época, como a resolução de equações do terceiro grau, publicando diversos resultados em seu livro *Ars Magna* (A Grande Arte). Apesar disso, como tantos matemáticos e cientistas de livros que têm suas conquistas ressaltadas, sua vida foi muito mais profunda e conturbada do que a mera ação de escrever livros em sequência.

Figura 4: Retrato de Gerolamo Cardano, na University of St.Andrews, na Escócia.

Domínio público.

Cardano nasceu em 1501, mas não era um filho desejado. Não havendo métodos contraceptivos na época, sua mãe tentou o abortar de outras maneiras, todas sem sucesso. Tinha irmãos mais velhos ao nascer, mas um surto de peste negra matou todos eles, deixando Gerolamo deformado com grandes verrugas dos bulbões. Seu pai, que não era oficialmente casado com sua mãe, também não tinha uma visão muito boa dele, o espancando com frequência na infância. Após os cinco anos, passou a levar Gerolamo a seu trabalho, que era oferecer consultoria. Conforme Mlodinow (2009), Gerolamo conta em seus escritos que "de tempos em tempos, quando caminhávamos pelas ruas, meu pai me mandava parar, abria um livro e, usando minha cabeça como apoio, lia uma longa passagem, cutucando-me o tempo todo com o pé para que eu ficasse imóvel, caso não suportasse aquele grande peso”.

Seu pai tentou o obrigar a estudar Direito, mas Gerolamo queria medicina. Sabendo um pouco dos estudos do pai, economizou o pouco dinheiro que ganhava escrevendo horóscopos, dando aula de geometria, alquimia e astronomia. Seu grande diferencial foi estudar probabilidade, o que o permitiu ter vantagem nos jogos de azar sobre os demais participantes. Com suas técnicas, conseguiu juntar dinheiro para pagar seus estudos - bem mais dinheiro do que ganharia em uma década como advogado.

Similar a superstições que temos até hoje a variar com cultura e religião, o jovem Cardano acreditava em superstições comuns da época, como que corvos no telhado pronunciaram morte, que o uivo de um cão era mal agouro ou que o alinhamento de planetas tinha algo a dizer sobre a vida das pessoas. No entanto, não deixou que tais visões turvassem suas ideias probabilísticas, escrevendo o primeiro livro sobre o assunto. No entanto, talvez por temer a desvantagem que teria ao revelar seus segredos nos jogos, tal livro só foi publicado 100 anos após sua morte.

Todavia, este mesmo livro tinha suas peculiaridades. Suas páginas refletiam a personalidade do autor, as ideias desvairadas que possuía, seu temperamento instável, a paixão com que enfrentava cada empreendimento – e a turbulência de sua vida e sua época. O livro considera apenas os processos – como o lançamento de um dado ou a escolha de uma carta – nos quais um resultado é tão provável quanto outro. E Cardano se equivoca em alguns pontos. Ainda assim, a obra representa um primeiro avanço, o primeiro êxito na tentativa humana de compreender a natureza da incerteza.

Nem todos os capítulos do livro de Cardano tratam de questões técnicas. Por exemplo, o capítulo 26 é chamado “Os que sabem ensinar também sabem jogar?” (ele chega à conclusão de que “aparentemente, saber e executar são coisas distintas”). O capítulo 29 é chamado “Da personalidade dos jogadores” – “Existem aqueles que, com muitas palavras, são capazes de desvairar a si mesmos e aos outros.” Por fim, no entanto, Cardano alcança a ideia de Espaço Amostral, a expressando como uma "regra geral". O nome que usamos hoje foi dado somente um século depois por Descartes, comparando com pontos no espaço.

Quando Cardano era adolescente, um de seus amigos morreu subitamente. Depois de uns poucos meses, notou ele, o nome do amigo já não era citado por ninguém. Isso o entristeceu, marcando-o profundamente. Como superar o fato de que a vida é transitória? Ele decidiu que a única maneira de fazê-lo seria deixar algum legado – herdeiros, ou um trabalho duradouro de alguma espécie, ou ambos. Em sua autobiografia, Cardano afirma ter adquirido “a ambição inabalável” de deixar sua marca no mundo. O fato de sua história ser transmitida até hoje é uma prova de que ele conseguiu.

Apesar de ter alcançado a tão almejada formação, Cardano ficou desapontado com a elite médica, escrevendo um artigo que dizia que a grande maioria eram charlatões. Como resultado natural, ficou proibido de exercer sua profissão em algumas grandes cidades. “Naqueles dias”, escreveu, “eu carregava um desgosto tão profundo que procurei magos e adivinhos em busca de alguma solução aos meus tantos problemas”. Um dos magos sugeriu que ele se protegesse dos raios lunares. Outro o instruiu a espirrar três vezes e bater na madeira quando acordasse. Cardano seguiu todas as prescrições, mas nenhuma delas modificou seu azar. Assim, coberto por uma capa, passou a caminhar sorrateiramente à noite, de casa em casa, tratando pacientes que não tinham como pagar os honorários dos médicos sancionados ou que não melhoravam com seus cuidados.

Para complementar o soldo que ganhava com esse trabalho, como escreveu em sua biografia, foi “forçado a apostar novamente nos dados para poder sustentar minha esposa; e com isso, meu conhecimento venceu o azar, e conseguimos comprar comida e viver, embora nossa habitação fosse deplorável”. Por fim, Cardano acabou atingindo seus objetivos na vida, obtendo herdeiros e fama – e uma boa fortuna também. Suas posses começaram a crescer quando publicou um livro baseado em seu velho artigo da faculdade, alterando o título do mais acadêmico “Das opiniões divergentes dos médicos” para o provocador *Da má prática médica no uso comum*. Desta vez, o livro foi um sucesso.

Com suas boas práticas médicas, foi finalmente não apenas aceito na comunidade, como se tornou reitor de uma universidade. Enquanto isso, ele continuou a publicar livros que foram bem recebidos, especialmente uma obra para o público geral chamada *A prática da aritmética*. Alguns anos depois, publicou um livro mais técnico, chamado *Ars magna*, um tratado de álgebra no qual apresentou a primeira descrição clara dos números negativos e uma famosa análise de certas equações algébricas. Ao redor dos 50 anos de idade, na década de 1550, Cardano estava em seu auge, sendo diretor da faculdade de medicina da Universidade de Pavia e possuindo muito dinheiro.

Gerolamo teve três filhos. Giovanni também se tornou médico, mas também cometeu certos crimes. Após um deles foi chantageado por uma família que possuía provas de um assassinato que cometeu, sendo forçado a se casar com uma moça da família. Chiara era uma moça notoriamente promíscua, tendo mantido relações com Giovanni na adolescência e diversas fora do casamento, o que lhe causou uma infecção por sífilis, IST comum na época. Seu último filho, Aldo, gostava de torturar animais desde criança, o que no futuro se transformou em profissão, ao receber o título de torturador de Inquisição.

Não satisfeito com o que já havia feito, Giovanni envenenou a própria esposa, e por mais que Gerolamo tenha tentado salvar sua vida gastando fortunas com advogados, seu filho morreu executado. Com dificuldades financeiras e reputação maculada, velhos inimigos se aproveitaram da situação para destruir a carreira de Cardano. O senado de Milão eliminou seu nome da lista dos que tinham permissão para lecionar e, acusando-o de sodomia e incesto, exilou-o da província. Ao deixar Milão, no fim de 1563, como escreveu em sua autobiografia, estava “reduzido mais uma vez a farrapos, não tinha mais renda, minha fortuna desaparecera, meus aluguéis foram suspensos, meus livros, confiscados”.

Conta-se, segundo Roque (2012), que Cardano obteve do matemático Niccolo Tartaglia uma fórmula especial para a equação de terceiro grau. Cardano prometeu manter em segredo a técnica, mas quando publicou seu *Ars Magna*, se julgou livre do compromisso - afinal havia construído explicações superiores a de Tartaglia. Enfurecido, Tartaglia convenceu Aldo a fornecer provas contra o próprio pai em troca de uma indicação oficial como torturador e carrasco público da cidade de Bolonha. Cardano foi encarcerado por algum tempo; depois, passou seus últimos anos em Roma, na agonia do esquecimento.

Ao final do verão de 1576, sentou-se à sua mesa e escreveu suas palavras finais, uma ode a seu filho preferido, o mais velho, que havia sido executado 16 anos antes, aos 26. Cardano morreu em 20 de setembro, poucos dias antes de seu aniversário de 75 anos. Viveu por mais tempo que dois de seus três filhos, sendo que no momento de sua morte, Aldo gozava de seu novo emprego. Antes de morrer, Cardano queimou 170 manuscritos não publicados.

Expomos esta história como um mero exemplo de que os tantos nomes famosos estudados nas escolas se referem, na verdade, a pessoas. Cada uma delas representam vidas que tiveram sua própria história, emoções, anseios e desejos - além de decepções, sofrimentos, dúvidas e dificuldades. Como mencionado anteriormente, humanizar ciências como a Matemática é um recurso que pode ser utilizado para aproximá-la dos estudantes e mostrar como o estudo se insere e espalha por todo o domínio da vida humana.

4. Atividades

a) Como D'Alambert e Cardano, estudaremos problemas de probabilidade envolvendo moedas. É útil lembrar os alunos brevemente de ideias de contagem de Análise Combinatória.

   Dividimos os alunos em grupos de 5 alunos ou menos. Analisemos primeiramente o experimento de D'Alambert. Pedimos aos alunos que expressem o espaço Amostral a partir da contagem de possibilidades em uma tabela de dupla entrada. Usando-a, deverão responder às probabilidades dos casos.

   Os alunos deverão notar, por exemplo, que a probabilidade de cair cada um dos casos individuais é ¼. Assim, se considerarmos cara-coroa diferente de coroa-cara, cada uma terá ¼ de chance. Essa é uma das formas de entender o porquê de, quando consideramos ambos os casos como equivalentes, sua probabilidade é ½.

Para tentar confirmar esta afirmação, propomos um experimento. Cada grupo deverá jogar duas moedas vinte vezes e anotar seus resultados. Ao final, deverá anotar a proporção de resultados com uma cara e uma coroa em relação ao todo, ou seja, sua probabilidade a partir do experimento. Após cada grupo chegar a um resultado, juntamos os dados de toda a sala para analisar, em relação a uma base de dados maior, se a probabilidade calculada se aproximou mais de ½. Este tipo de estudo pode ser, também, uma boa introdução à Teoria dos Erros e à Estatística.

E se tivéssemos três moedas? Pedimos aos alunos que descrevam seu espaço amostral em uma tabela e as diferentes distribuições probabilísticas para os resultados.

b) Voltando três mil anos no tempo em relação a Cardano, propomos uma contextualização com a China Antiga.

Por vezes, para confirmar resultados, o rei Shang refazia a mesma pergunta diversas vezes em períodos diferentes, até se convencer da resposta. Como será que a probabilidade varia conforme realizou tentativas sucessivas?

Um fato de interesse é que os Shang acreditavam, conforme a mitologia chinesa, que não era somente um Sol que aparecia no horizonte. Em vez disso, cada dia seríamos iluminados por um Sol diferente, sendo ao todo dez sóis que apareciam em sucessão. Os dias da semana Shang, de dez dias, era associado a cada um dos sóis, recebendo seus nomes.

Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 6	Dia 7	Dia 8	Dia 9	Dia 10
甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸
jiă	yĭ	bĭng	dīng	wù	jĭ	gēng	xīn	rén	guĭ

Figura 5: Os caracteres existentes desde 1600 a.E.C. para representar os dias da semana.

Fonte: autores.

Esta tradição, mais tarde, foi relacionada com o Yin-Yang e os cinco elementos tradicionais chineses. Os nomes dos sóis são conhecidos também no Feng Shui e no I Ching pelo nome de "Troncos Celestiais".

A partir desta semana de dez dias, constrói-se o calendário Shang, que é o calendário antigo existente na tradição de diversos países da Ásia, como Japão, Coréia e Vietnã, além da própria China. Para tanto, adicionados aos dez troncos celestiais, estão doze "Ramos Terrestres".

Acredita-se que os ramos foram criados a partir da observação da órbita de Júpiter, que dura uma dúzia de anos. A partir daí, também se disseminaram na cultura oriental como, por exemplo, os doze signos chineses.

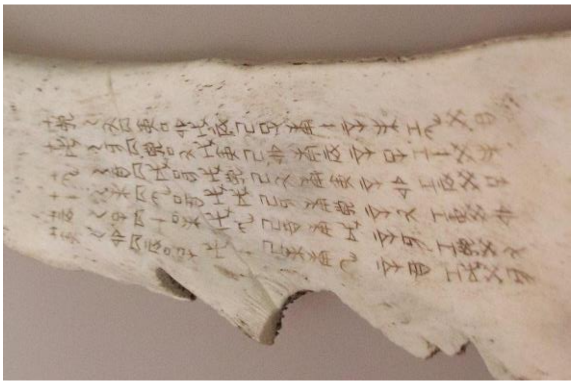


Figura 6: Uma tabela que data do século 11 a.E.C. listando todos os dias do calendário, inscrita em um pedaço de osso. Domínio público.

Colocamos a partir destas informações, questões para os grupos resolverem.

- Para criar o calendário tradicional chinês, juntavam-se os troncos celestiais com os ramos terrestres da seguinte maneira: 1°Tronco com 1°Ramo, 2°Tronco com 2°Ramo e assim por diante. Quando se acabavam os troncos, por exemplo, repetia-se o ciclo, de forma que a décima primeira combinação é do 1°Tronco com o 11°Ramo. Assim, quantos dias existem no calendário Shang? Quantas combinações do total possível são utilizadas?

Figura 7: Os 12 ramos terrestres, também conhecidos como os signos chineses. Teto do Templo Kushida em Fukuoka, Japão. Nota-se na imagem também parte da rica associação entre medidas e mitologia: Os caracteres chineses 北 (fundo azul), 南 (fundo verde), 東 (fundo vermelho) e 西 (fundo amarelo) denotam, em ordem, norte, sul, leste e oeste. Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chinese_Zodiac_carvings_on_ceiling_of_Kushida_Shrine,_Fukuoka.jpg

Licença:https://www.gnu.org/licenses/fdl-1.3.html

- Vamos supor que o rei Shang queria capturar dois escravos Quiang fugitivos. Para tanto, consultava os ossos de oráculo. Segundo Feng (2013), um tipo comum de resposta do oráculo seria "se eles forem capturados, será no dia 戊 da semana". Vamos supor que, ao repetir previsões acerca destes escravos, o rei obteve as respostas:

- Se eles forem capturados, será no dia 戊 da semana.
- Se eles forem capturados, será no dia 丙 da semana.
- Se o escravo A for capturado, será no dia 己 da semana.
- Se o escravo B for capturado, será no dia 乙 da semana.

- Consideremos o tempo em que somente a primeira asserção foi feita. Supondo que a probabilidade deles serem encontrados seja igual em todos os dias da semana, qual a probabilidade da profecia se realizar?

- Algum tempo depois, o rei recebeu a segunda resposta. Como isso muda a probabilidade de se capturar os fugitivos?

- Calcule a probabilidade individual deles serem capturados no dia 丙. Existe alguma relação entre as probabilidades individuais dos dois dias e a total? Se sim, enuncie a regra.

- Analise agora as duas mais novas previsões recebidas. Qual a probabilidade da terceira se realizar? Qual a probabilidade da quarta se realizar?

-Ainda, qual a probabilidade das duas últimas se concretizarem, e os dois escravos serem capturados? Como ela se relaciona com a probabilidade individual das duas últimas previsões?

c) Munido dos conhecimentos adquiridos pela atividade acerca da civilização Shang, movemos nosso olhar para a civilização que teria seu auge aproximadamente 1000 anos depois, os gregos.

Foi mencionado que um dos objetos mais comuns de uso para previsões era o astrágalo. Sabendo, como informado anteriormente, que as probabilidades dos quatro lados sobre os quais a peça pode se apoiar são 10%, 10%, 40% e 40%, analisemos:

- Tendo em mente as regras de probabilidade desenvolvidas no exercício do oráculo chinês, se jogarmos dois astrágalos, qual a probabilidade de ambos caírem sobre as faces de 40%? E a de ambos caírem na de 10%?
- Qual a probabilidade de dois astrágalos caírem em faces diferentes?
- Desafio: com quatro astrágalos, calcule a probabilidade de obtermos uma jogada de Vênus. Tal jogada é, de fato, a menos provável dentre todas as possíveis?

Trabalho em grupos:

Durante o trabalho dos grupos o professor deve ir verificando como os grupos estão trabalhando, fazendo possíveis intervenções e provocações, sem, no entanto, dar respostas diretamente, possibilitando que os alunos façam testes e cheguem às próprias respostas. O papel do professor nesse momento é de mediação enquanto os alunos respondem cada um dos problemas acima separados em itens.

Momentos coletivos com todos os grupos:

Após os grupos terminarem cada um dos problemas, antes de irem para o próximo, deve-se ter um momento de plenária com todos os grupos. Nesse momento, cada um dos grupos deverá escolher uma pessoa que irá expor para a classe como foi o raciocínio usado, as dúvidas que surgiram e as respostas a que chegaram. Esse momento é importante para não acumularem dúvidas de um problema para o outro, e para chegarem em conclusões e sistematizar o conhecimento dos conceitos utilizados em cada tópico, que podem ser úteis nos itens seguintes, como por exemplo, a plenária após o item b), com a questão do calendário deve ser um momento de explicitar e consolidar o conhecimento sobre as regras de adição e multiplicação que serão usadas no item seguinte.

Formas previstas de avaliação:

Averiguação da boa interação dos grupos na resolução dos exercícios e prática dos experimentos.

Referências:

BAZZO, W. A. **Introdução aos Estudos CTS**. OEI, 2003

BULFINCH, T., **O Livro da Mitologia**, Martin Claret, 2006

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC. 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 02 fev 2020.

FENG, L. ***Early China***, Cambridge, Cambridge University Press, 2013.

HEATH, T., **History of Greek Mathmatics**, Oxford, Dover Publications, 1921.

KUHN, T. S., **The Structure of Scientific Revolution**s 50th Anniversary Edition. University of Chicago Press, 1962

MIGUEL, A. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores. ***Zeteiké*** – CEMPEM – FE/UNICAMP, - v. 5,- n.8, 1997

MLODINOW, L., O **Andar do Bêbado**, Editora Zahar, 2009

ROQUE, T. **História da Matemática**, Rio de Janeiro, Editora Zahar, 2012

SAITO, F. Interface entre História da Matemática e Ensino: uma Atividade Desenvolvida com Base num Documento do Século XVI, **Ciência & Educação**, v. 19, n.1, p.89-111, 2013

XII. Poliedros Equidecomponíveis

Samuel Ribeiro, Thaís Marina Fernandes & Thiago Andreieve

POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS

Samuel Ribeiro
Thaís Marina Fernandes
Thiago Andreieve

Ano Escolar: 2º Ano do Ensino Médio

Ementa:

Poliedros, volume, área, geometria plana e espacial, figuras equidecomponíveis.

Objetivos:

- Estudar o volume de poliedros;
- Estudar as propriedades de poliedros com mesmo volume;
- Estudar figuras equidecomponíveis.

Competências e habilidades matemáticas

Competência 3. "Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente."

⇒ **Habilidade:**

(EM13MAT309) "Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais."

Competência 5. "Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.”

⇒ **Habilidades:**

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Recursos Empregados:

Régua, caneta e/ou lápis, papel, cartolina, cola e/ou fita adesiva.

Os materiais têm por objetivo ajudar na montagem das figuras e na anotação dos resultados obtidos durante a tarefa, entretanto, o Cubo Tangram deve ser montado em aula anterior dedicada somente a isso.

Atividades:

1. Introdução

Desde a Antiguidade a humanidade se preocupa com problemas envolvendo áreas e volumes. Nesse período eles surgiam a partir de observações e questões do cotidiano desses povos, sem se preocupar como demonstrações de nenhum tipo, por exemplo, os babilônios (2000 a.C a 1600 a.C.) conheciam o cálculo da área do retângulo e os egípcios tinham fórmulas para o cálculo de áreas de terras e volume de grãos (Eves, 1992).

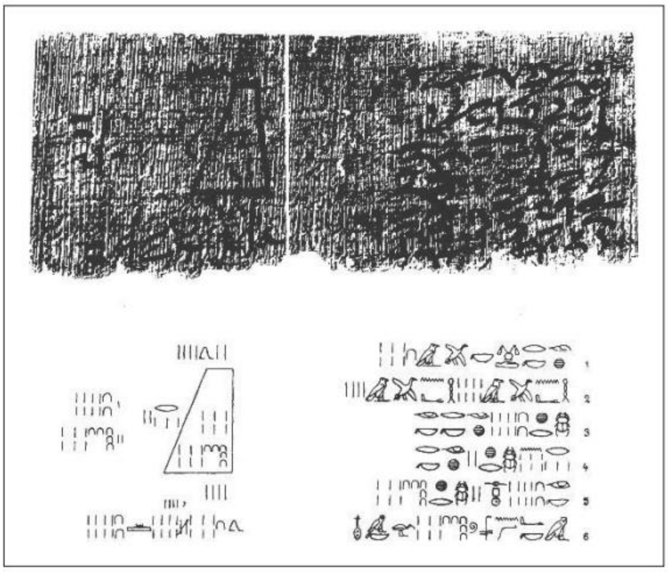


Figura 1: Papiro de Moscou, papiro egípcio que mostra o problema do volume de um tronco de uma pirâmide quadrada (parte de cima), juntamente com a transcrição hieroglífica (parte de baixo), (MERZBACH and BOYER, 1991).

Com o passar do tempo, os geômetras da época começam a observar figuras e a estudar elas de maneira mais detalhada. Como o quadrado é a figura mais simples, eles começam a tentar comparar as áreas das figuras encontradas com a do quadrado, e assim surge o método das quadraturas, (FERNANDES, 2018).

Mas o processo de quadratura não fica só na teoria da época, ele também é aplicado a jogos e quebra-cabeças. Dois exemplos bem conhecidos do seu uso são os quebra-cabeças geométricos Tangram (origem atribuída aos chineses) e o Stomachion de Arquimedes (origem atribuída a Arquimedes de Siracusa), onde temos um quadrado dividido em diversos polígonos que podem ser recombinados para formar outros polígonos ou até figuras no geral (ver Figura 2).

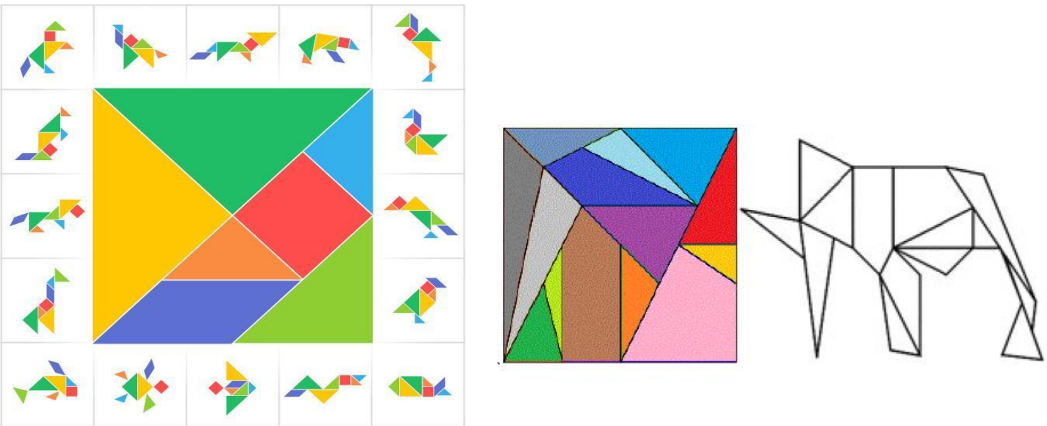


Figura 2: Tangram (a esquerda) e algumas decomposições em animais (ESCOLA KIDS, 2021). Stomachion de Arquimedes (centro) e uma decomposição dele em um elefante (A direita), (FERNANDES, 2018).

O interessante nesses dois quebra-cabeças é que as figuras formadas com todas as peças poligonais de cada um deles têm a mesma área e são equidecomponíveis, ou seja, têm a mesma decomposição, (FERNANDES, 2018). E isso pode ser generalizado para polígonos (teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien), mas não pode ser generalizado para poliedros (terceiro problema de Hilbert).

Tangram

O Tangram é um quebra-cabeça geométrico formado por 7 peças (tans), sendo elas: 5 triângulos (2 maiores, 2 menores e 1 médio), 1 quadrado e 1 paralelogramo. Sobrepondo essas peças é possível formar diversas figuras.

Sua origem não é certa, mas acredita-se que tenha surgido na Dinastia Song (960 d.C. – 1279 d.C.) e sido levado para a Europa por navios mercantes no início do século XIX. Há várias lendas sobre sua origem, mas as mais famosas são a do Mensageiro e o Imperador (mensageiro quebra um espelho do imperador e enquanto tentava remontar o espelho montou várias figuras) e a do discípulo e o mestre (jovem ao se despedir de seu mestre ganhou um espelho que ele deixou cair no chão e se partiu em 7 peças, então seu mestre lhe diz que ele poderá montar figuras das coisas que ele vir em sua viagem com essas peças).

Esse quebra-cabeça é muito utilizado por professores para facilitar o estudo da geometria: áreas, compreensão das formas, etc.

Equidecomposição no plano

Quando pensamos em equidecomposição no plano, devemos mencionar o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. Esse teorema foi demonstrado de forma independente por três matemáticos em separado: Farkas Bolyai (1932), Paul Gerwien (1933) e William Wallace (1807) e diz que: *Dois polígonos que têm áreas iguais são equidecompostos*.

No Ensino Fundamental, anos finais, a equidecomposição pode ser usada para justificar as relações de cálculo de área para polígonos convexos ou o teorema de Pitágoras.

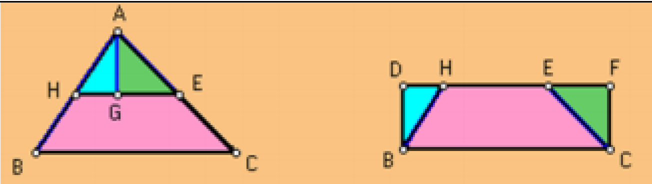


Figura 3: Um triângulo e um retângulo de mesma área são equidecomponíveis, (MELLO, 2015).

Equidecomposição no espaço tridimensional

Após a leitura do teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, muitos matemáticos de renome da época começaram a se perguntar: Será que dois poliedros de mesmo volume são equidecomponíveis? Esta foi uma questão levantada por Hilbert, em 1900, no segundo Congresso Internacional de Matemáticos em Paris e que foi respondida por seu orientando Max Wilhelm Dehn, no conhecido teorema de Dehn*: "O tetraedro regular não é equidecomposto por corte a um cubo*". Ou seja, o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien não é válido no espaço tridimensional.

Apesar dessa negativa, essa ainda é uma questão que pode ser abordada no Ensino Médio, pois ela pode ser usada para mostrar, de forma manipulativa, o volume de alguns poliedros convexos, (FERNANDES, 2018).

2. Atividades desenvolvidas

Dividir a sala em grupos de 5 estudantes e dar a cada grupo um Cubo Tangram de lado 10 cm, produzido em aula anterior com cartolinas coloridas. O Cubo Tangram é um cubo composto por poliedros cujas bases são congruentes ao Tangram.

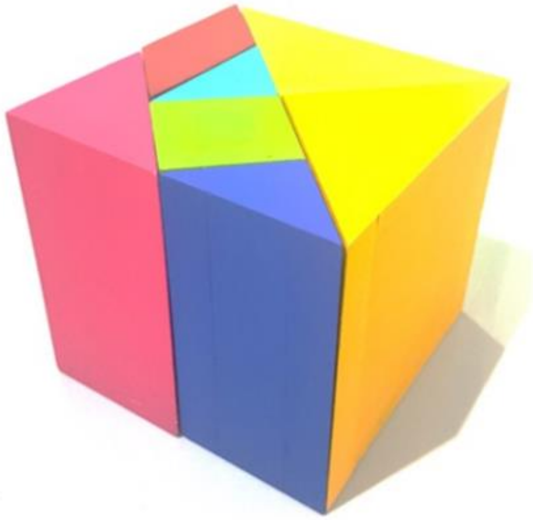


Figura 4: Cubo Tangram colorido, tendo cada poliedro que o compõe uma cor diferente (FERNANDES, 2018).

(5 min) Dar 5 min para que os grupos manipulem livremente o objeto, e façam seu reconhecimento a partir do enunciado “investiguem figuras compostas por diferentes poliedros do cubo, e com números diferentes de poliedros”.

(15 min) Após os 5 min de reconhecimento, propor a primeira investigação guiada:

- Assumindo V como o volume do cubo, construam 3 sólidos diferentes com volume igual a $\frac{V}{2}$;
- A partir de conhecimentos anteriores sobre o volume de figuras espaciais, meçam com régua os parâmetros dos 3 sólidos e calculem seu volume, confirmando que é igual para os 3, e representa a metade do volume do cubo;
- Em uma folha, façam o desenho de cada sólido junto com o cálculo de seus volumes.
-

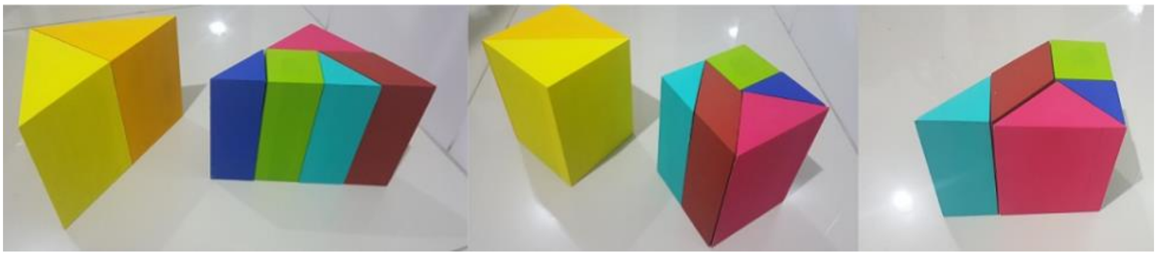


Figura 5: 5 sólidos com volume igual à metade do volume do cubo Tangram (FERNANDES, 2018).

(15 min) Selecionar o conjunto de poliedros que não possui os triângulos maiores e propor a segunda investigação guiada:

- Peguem o poliedro de face quadrada e os dois poliedros cujas faces são os triângulos menores e construam 4 sólidos, e em seguida, calculem seu volume;
- Substituam o poliedro de face quadrada pelo poliedro cuja face é o triângulo médio, construam um novo sólido e calculem seu volume;
- Substituam agora o poliedro cuja face é o triângulo médio pelo poliedro cuja face é um paralelogramo e calculem seu volume;
- Em uma folha, façam o desenho de cada um dos 6 sólidos junto com o cálculo de seu volume, e respondam à seguinte pergunta, com a melhor justificativa “o que mudou quando os poliedros foram substituídos na primeira e na segunda vez?”

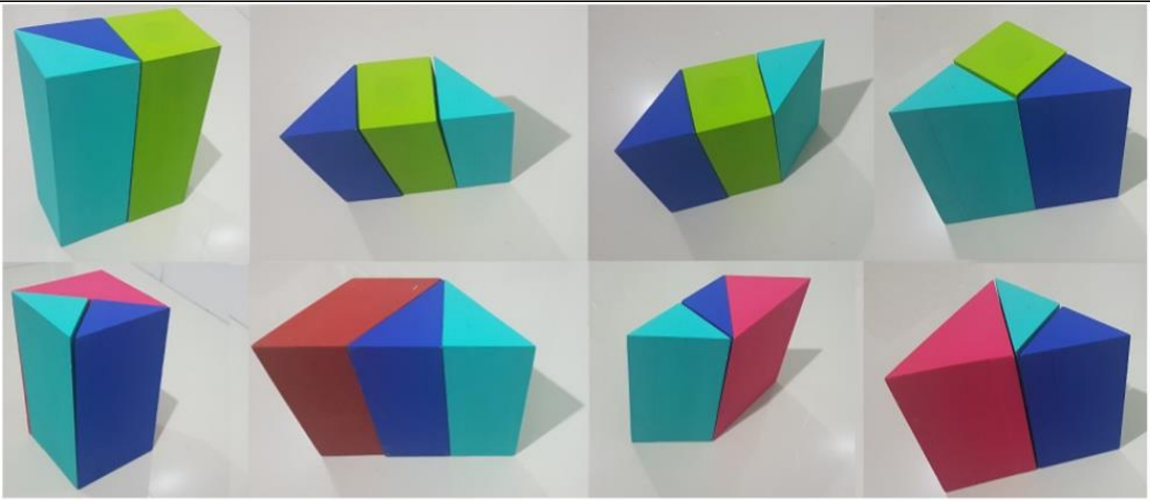


Figura 6: 8 sólidos de mesmo volume compostos pelos poliedros cujas bases são os triângulos menores, mais o poliedro cuja base é um quadrado ou um paralelogramo ou o triângulo médio (FERNANDES, 2018).

(10 min) Fazer uma grande roda para que cada grupo apresente brevemente os sólidos que construiu, as estratégias que utilizou para calcular os volumes, e conclusões às quais chegou.

(10 min) Encerramento com uma breve discussão que leve a turma a concluir coletivamente que 2 sólidos com volumes iguais podem ser construídos com poliedros diferentes, e que dois sólidos construídos com os mesmos poliedros têm volumes iguais.

3. Conclusões

Como esse é apenas um plano de aula para a disciplina que não será aplicado em sala (pelo menos durante a disciplina), é possível obter conclusões sobre a ideia da tarefa, embora não tenha sido aplicada, de fato, em sala de aula, nesse sentido podemos apenas ficar no campo das suposições sobre a eficácia da mesma. Sobre a ideia da tarefa, acreditamos que ela foi bem desenvolvida e que será um ótimo instrumento para se usar em sala de aula na discussão de áreas e volumes de alguns poliedros convexos. Além disso, ela vai ser uma ótima oportunidade para que os e as estudantes sejam capazes de visualizar volumes de sólidos, de investigar e conjecturar sobre propriedades matemáticas. Quanto à aplicabilidade da atividade, acreditamos ser possível e não terá grandes problemas. O e a estudante, ao longo da vida, já tem uma ideia intuitiva de volumes, pois, no seu dia a dia, têm contato com objetos das mais diferentes formas começando desde cedo, na infância, com os brinquedos, depois os utensílios domésticos, os móveis da casa, objetos de usos pessoais, artigos comprados em lojas que vêm embrulhados em caixas etc.

Sobre a eficácia desta atividade e desenvoltura dos e das estudantes conseguirem observar as propriedades que queremos, acreditamos que terá grande sucesso, pois é uma tarefa que combina a parte lúdica de entretenimento de um quebra cabeça, que motivará a se envolver na atividade tentando manipular os melhores encaixes daquelas peças, e os conhecimentos matemáticos relacionados àquilo.

No entanto, devido as salas terem uma dinâmica diferente, caso a aplicação da atividade não obtenha os resultados esperados, ela sempre poderá ser readaptada a fim de se adequar aos imprevistos que rotineiramente surgem em sala de aula.

Formas previstas de avaliação:

A avaliação deve ser feita ao longo das investigações e na apresentação dos grupos levando em conta as tipologias de ensino: os conteúdos atitudinais, procedimentais, factuais e conceituais. No primeiro caso, deve-se acompanhar o desempenho de cada estudante quanto à sua postura no grupo (conteúdos atitudinais), identificando ações que podem ser sugeridas ao longo da aula ou de todo o curso para melhor desenvolvimento e aprendizagem, sendo relativas a comportamento (por exemplo, dar opinião nas discussões do grupo) e a conteúdo do tipo factuais, conceituais e procedimentais (em que situação aplicar cada tipo de informação, identificar, observar, fazer comparações, relacionar etc.). No segundo caso, avalia-se as atividades, a partir dos conhecimentos sistematizados apropriados pelo grupo e aqueles construídos ali a partir das vivências de cada estudante, oferecendo a possibilidade de adaptação e aprimoramento do plano de aula, estes itens também relacionados a conteúdos conceituais e procedimentais.

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 26 março 2020.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Geometria** - tradução. São Paulo, Atual Editora, 1992.

ESCOLA KIDS. **Tangram, no Ensino Fundamental I**. Disponível em: <https://escolakids.uol.com.br/matematica/tangram.htm> . Acessado em: 29 abril 2021.

FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. 2018. 116f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, 2018.

MELLO, J.L.P. **A área de figuras mal-comportadas.** CAEM, IME, USP, 2015. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina13_Pastore.pdf>. Acessado em: 26 abril 2021.

MERZBACH, U.C.; BOYER, C.B. **A History of Mathematics**. 3. ed. New Jersey: Edgard John Wiley & Sons, 1991.

XIII. Funções de 2 º Grau e Lançamento de Projéteis

João Paulo Vieira de Carvalho

FUNÇÕES DE 2 º GRAU E LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

João Paulo Vieira de Carvalho

Ano Escolar: 2º Ano do Ensino Médio

Ementa: Funções de 2 º grau, Ponto de Máximo, Raízes da função, Coeficientes, Modelagem de problemas.

Objetivos: Apresentar aos alunos como problemas do mundo real (em específico os lançamentos) podem ser trabalhados do ponto de vista matemático. Isto será feito modelando alguns problemas com jogos eletrônicos (Ex: Angry Birds) e jogos da vida real (que envolvam lançamentos de objetos, como qualquer esporte que envolva o uso de uma bola).

Recursos Empregados:

Slides para projeção, lousa, caneta esferográfica, régua, papel transparência, papel sulfite, bola, Geogebra. Os materiais têm por objetivo mostrar, na prática, a comprovação e aplicação das noções de funções de 2º grau, especificamente no caso de funções com $a<0$, para estudo de lançamentos de projéteis (área de física).

Atividades:

1. Introdução: As atividades iniciais serão uma recapitulação para ver qual a noção que os alunos têm acerca do tema de funções quadráticas e o quanto eles conseguem fazer a conexão entre os elementos da função (a, b e c) e a representação da função em um gráfico. Para isso serão utilizados os slides/lousa para fazer uma medição do grau de entendimento dos alunos e, caso esteja abaixo do adequado, haverá então uma explicação dos conceitos sobre função de 2 grau e seus gráficos.

Atividades desenvolvidas: O objetivo é que os alunos façam uma investigação para poderem relacionar a função horária do espaço de lançamentos ($s(t) = s0 +v0*t + (a/2)t^2$ com uma função de 2º grau. Para isso, será feita uma pequena atividade de jogar a bola entre os alunos, de diversas maneiras, para que eles, ao final, entendam que estamos trabalhando com o lançamento de projéteis.

Após isso, em sala, com o auxílio do professor, os alunos irão partir da função horária e através de passos, como mudança de variáveis, planeja-se que eles enxerguem uma função de 2 º grau. Na sequência iremos relacionar este

conhecimento já consolidado, e estudaremos casos de função de 2 º grau, especificamente as funções com **a < 0**, no Geogebra, para facilitar a visualização de diversos tipos de funções de 2 º grau que modelam lançamentos de projéteis.
Por fim, os alunos irão se dividir em grupos e irão receber algumas transparências que contém diversos tipos de gráficos de funções de 2 º grau e também irão receber folhas sulfite com o plano cartesiano e alguns pontos já impressos na folha.

O objetivo dos alunos é escolher uma transparência de maneira que esta satisfaça os requisitos estipulados (passar pelos pontos impressos na folha sulfite) e, por fim, dizer quais a,b e c que formam aquele gráfico em específico. Pretendemos fazer com que os alunos percebam que todo lançamento de projétil (na horizontal) estudado em física pode ser modelado como uma função de 2 º grau com concavidade para baixo.

2. **Conclusões**: Espera-se que, após todas as etapas serem concluídas com sucesso, os alunos consigam compreender com maior profundidade tanto o assunto de funções de 2 º grau quanto o assunto de lançamento de projéteis que que é trabalhado na disciplina de física

Formas previstas de avaliação:

Participação das atividades e avaliação da atividade realizada em grupos.

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2020.

https://brasilescola.uol.com.br/fisica/lancamento-vertical.htm#:~:text=Esse%20tipo%20de%20movimento%20ocorre,descrito%20 como%20uma%20queda%20livre.

GeoGebra: https://www.geogebra.org/download

XIV. Estatística e Probabilidade: uma ideia de investigação Matemática

Glaucia Macedo da Silva

Estatística e Probabilidade: uma ideia de investigação Matemática.
Glaucia Macedo da Silva
Ano Escolar: 3º Ano do Ensino Médio.
Ementa: Estatística e Probabilidade.
Objetivos: ● desenvolver o pensamento estatístico, buscando uma visão mais própria de como organizar e analisar informações; ● possibilitar a compreensão e a interpretação adequada de dados estatísticos;
Recursos Empregados: Slides para projeção, jornais e revistas, lousa, folhas de papel sulfite, lápis colorido para construção de Gráficos.
Atividades: **1. Introdução** Tarefas investigativas em Estatística é uma temática que vem tomando um lugar de destaque no processo de ensino e aprendizagem, já que desempenha um papel de grande importância na educação para a cidadania. As atividades serão desenvolvidas em sala de aula na maioria em grupos. Assim os alunos poderão trocar ideias, investigar, fazer tentativas, como forma de aprimorar seus conhecimentos nas situações-problemas. O trabalho coletivo deve ser considerado como um fator fundamental tanto nas interações sociais quanto no desenvolvimento cognitivo. Serão abordados vários conteúdos, como porcentagem, média, média aritmética e ponderada, moda, mediana, desvio médio, variância, desvio padrão, construção de gráficos e tabelas. Os alunos irão coletar dados, analisar, selecionar, compreender, relacionar, interpretar, criar significados, investigar, elaborar suas conjecturas relacionadas aos conceitos da Estatística e Probabilidade.

2. **Atividades desenvolvidas**

Nessa primeira atividade será decidido em conjunto com a turma o tipo de pesquisa que será realizada, bem como, o tema que cada grupo irá escolher para investigar, ou se será o mesmo tema para a turma toda. Será definida nesse momento também qual a população alvo e se o trabalho de investigação será feito por recenseamento ou por amostragem.

A atividade se resume em praticamente cinco itens, apresentados a seguir:

a) Divisão da turma em pequenos grupos;
b) Escolha dos temas;
c) Estudo do tema para estabelecimento dos objetivos do estudo;
d) Escolha da população alvo (somente na escola);
e) Escolha do tipo de pesquisa: recenseamento ou amostragem.

Espera-se que a população alvo seja os alunos da própria turma, para que a coleta de informações possa ser realizada na sala de aula mesmo.

Análise e descrição das escolhas:
a) Por que o grupo escolheu esse tema para realizar este processo de investigação?
b) O que levou o grupo à escolha da população alvo?

Serão estabelecidas as variáveis estatísticas. Cada elemento pertencente à escolha das variáveis será associado a uma característica de interesse.
a) Em sua opinião, o que são variáveis estatísticas?
b) Existe alguma relação entre qualitativa e quantitativa? Justifique.

Após discutir sobre como os questionários devem ser montados e sobre as variáveis estatísticas, os alunos deverão elaborar o questionário para coleta de dados. A intenção é que cada grupo escolha variáveis que serão investigadas.
Depois de coletados os dados, se iniciará as Investigações Matemáticas propriamente ditas. Será definida com os alunos a maneira como os dados serão organizados, a montagem das tabelas e a distribuição de frequências.
Após esse momento de estruturação e direcionamento do trabalho, algumas indagações também poderão acontecer, como exemplo:

a) O grupo teve dificuldade em organizar os dados coletados? Comente.
b) Qual a probabilidade de se obter respostas iguais, mesmo tendo um público diferenciado, seja ele por gênero, por costumes ou por aspectos geográficos?

c) O que de mais relevante o grupo pode relatar?

Partindo dos dados recolhidos e organizados em tabelas e gráficos pelos alunos, serão realizados os primeiros cálculos, pelos quais os alunos poderão constatar e investigar qual a realidade que a população entrevistada se encontra.

Os alunos analisarão situações-problemas relacionadas à porcentagem, média aritmética, moda, mediana, variância e desvio padrão e probabilidade. Esses conceitos serão estudados à medida que forem sendo necessários para as interpretações e análises do grupo.

As questões seguintes são algumas das que nortearão essas tarefas:

a) Teve alguma resposta entre os entrevistados que apareceu com muita frequência?
b) Organize os elementos coletados em ordem crescente e em seguida encontre o termo médio dos dados coletados.
c) Compare o termo médio encontrado com os extremos dessa frequência e verifique se existe uma relação.
d) Em relação aos dados coletados verifique o quanto cada elemento representa deste total.
e) Vocês conseguem estabelecer alguma regularidade entre as questões respondidas? Exemplifique.

Depois, de acordo com os dados que o grupo obteve, deverão escolher os tipos de gráficos que utilizarão. Será informado a eles que deverão fazer uso de pelo menos dois modelos de gráficos.

Em seguida responderão:

a) Qual motivo conduziu o grupo a optar por esses dois modelos de gráficos? Relate.
b) Analisando os gráficos que o grupo construiu, quais foram as dificuldades encontradas?

3. Conclusões

Após a realização das atividades de investigações matemáticas e estatísticas relacionadas às situações-problemas que foram feitas e a partir dos dados coletados e discutidos primeiramente em grupo, será então, exposto para a turma os resultados obtidos com essa investigação, as construções de tabelas e gráficos, entre outros para que os alunos possam analisar e estabelecer conclusões.

Formas previstas de avaliação:

Nessa atividade os alunos avaliarão o desenvolvimento do trabalho, o envolvimento deles próprios e seus conhecimentos sobre os conteúdos abordados. Isso deverá ser feito por meio de um material escrito.

Referências

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 10 Nov. 2020.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

XV. Investigando Matematicamente Processos Estatísticos envolvidos em Pesquisas Eleitorais das Eleições Municipais de 2020 em São Paulo - SP

Abigail Ignácio Cuevas Lopes

Investigando Matematicamente Processos Estatísticos envolvidos em Pesquisas Eleitorais das Eleições Municipais de 2020 em São Paulo - SP

Abigail Ignácio Cuevas Lopes.

Ano Escolar: 4º. Ano do Ensino Médio (técnico integrado).

Ementa:

Estatística Descritiva (conceitos básicos de população, amostra, tabelas, representações gráficas e média aritmética).

Objetivos:

- Gerais – A/O estudante será capaz de:
  - Identificar a Matemática como uma ciência em construção e desenvolvimento, relacionando-a com diferentes áreas de conhecimento, a exemplo da Geografia/ Geopolítica;
  - analisar, interpretar, comparar e relacionar situações-problema, utilizando os conceitos estudados;
  - Coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados nos mais variados contextos e tomar decisões a partir deles;
  - Reconhecer a importância da compreensão e do uso da estatística para o exercício de atividades políticas, a exemplo das eleições.

- Específicos – A/O estudante será capaz de:
  - Organizar dados em gráficos e tabelas;
  - Interpretar, de modo crítico, gráficos e tabelas;
  - Diferenciar amostra e população no contexto estatístico;
  - Interpretar variáveis e classificá-las como quantitativas e qualitativas.

Habilidades e Competências (BNCC):

- (EM13MAT102) Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

- (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e de dispersão.
- (EM13MAT408) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *software* s que interrelacionam as áreas de estatística, geometria e álgebra.
- (EM13MAT409) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (*box-plot*), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Recursos Empregados:

Pesquisas eleitorais de 2020 registradas no site oficial do TSE, caderno, lápis, borracha, caneta esferográfica, régua, slides de apresentação, lousa, folha sulfite, cartolinas, canetas hidrográficas coloridas, planilha digital, calculadora. Esses materiais têm como objetivo apoiar o desenvolvimento das apresentações dos estudantes, bem como auxiliar a/o docente na discussão e apresentação dos conceitos e das atividades propostas.

Atividades:

1. **Introdução**

Introdução aos estudantes quanto ao funcionamento de pesquisas eleitorais: medir o conhecimento da turma naquele momento sobre estatística e probabilidade aplicadas às eleições.

Para auxiliar o professor na construção e organização dessa aula, estamos sugerindo alguns links de apoio com informações relacionadas a pesquisas eleitorais. Deixamos uma lista deles no final deste plano.

2. **Atividades desenvolvidas**

1) **Aula dialogada/ discussão com a turma, definição da Atividade 01 e organização de grupos**: Com o tempo previsto de, no mínimo, 01 hora-aula e, no máximo, 01 hora-aula e meia, a primeira parte da

atividade terá por objetivo revisar/ introduzir conteúdos, bem como tirar dúvidas. É imprescindível que haja um bom ambiente de convivência entre a turma e a/o docente, para que os estudantes participem e não se sintam acanhados para fazerem perguntas sobre o assunto discutido.

a) **Conteúdos conceituais:**
   I. Histórico da estatística;
   II. Impacto social causado por sua utilização;
   III. Definição e exemplificação de populações e amostras, bem como identificação de suas diferenças;
   IV. Variáveis quantitativas e qualitativas;
   V. Representações gráficas: proporcionais e desproporcionais.

b) **Conteúdos atitudinais:** participação ativa da aula e das discussões, tirando dúvidas nos momentos oportunos.

c) **Conteúdos procedimentais:** realização de anotações no caderno e/ou em folha entregue pela(o) docente.

Sugerimos que na última metade da segunda aula, seja apresentada à turma a proposta da Atividade 01 e as pesquisas eleitorais selecionadas serão sorteadas.

ATIVIDADE 01 - A turma, composta por cerca de 30 discentes, será dividida em 06 grupos (G) de 05 integrantes (a critério dos próprios estudantes, com intervenção da/o docente somente quando/se necessário).

Cada grupo sorteará uma pesquisa eleitoral e ficará responsável pela interpretação de seus dados numéricos em gráficos, selecionando o tipo de gráfico mais adequado para cada representação.

Em pesquisas que apresentarem mais de um dia, os estudantes deverão realizar médias aritméticas para obter valores a serem trabalhados nos gráficos.

Cada grupo deverá apresentar, no mínimo, 05 gráficos e 05 tabelas (cada integrante deve se responsabilizar por um gráfico e uma tabela).

Ficha norteadora para a Atividade 01

Grupo: _______________________________ Turma: ______

Pesquisa Eleitoral

Empresa realizadora:

Cadastro no TSE:

Metodologia:

Período de realização:

Margem de erro:

Público – variáveis envolvidas

Amostra (total):

Quantidade de candidatos:

Critérios de separação amostral:

Variáveis quantitativas e qualitativas:

Representação gráfica

Quais informações apresentar? Qual o melhor tipo gráfico?

G	Link	Instituição
1	https://www.jornaldaorla.com.br/noticias/41359-disputa-acirrada-pela-prefeitura-de-sao-paulo/	Badra Comunicação
2	https://noticias.r7.com/sao-paulo/covas-e-russomanno-lideram-disputa-em-sp-diz-pesquisa-31082020	RealTime Big Data
3	https://www.paranapesquisas.com.br/pesquisas/pesquisa-sao-paulo-eleicoes-municipais-de-2020-novembro-2020/	Paraná Pesquisas
4	https://brasil.elpais.com/brasil/2020-09-11/covas-boulos-russomanno-e-franca-dividem-a-lideranca-em-corrida-eleitoral-embolada-de-sao-paulo.html	Atlas Político
5	http://media.folha.uol.com.br/datafolha/2020/10/23/81edec6b92b49667af5751a663b65218ivsp3.pdf	DataFolha
6	https://graficos.poder360.com.br/5Z6gt/1/	XP/ Ipespe

2) **Apresentação dos seminários**: Considerando que cada um dos grupos terá, no mínimo, 10min e, no máximo, 15min para apresentação, a Atividade 01 contará com duas horas-aula. Nela cada grupo, em ordem, realizará sua exposição à turma. Todos os membros da equipe devem participar. Caso o tempo máximo não seja utilizado, a/o docente fará alguns comentários sobre o seminário, sempre verificando se a proposta foi compreendida pelo grupo.
   a) **Conteúdos conceituais:**
      I. Amostragem estatística
      II. Média aritmética
      III. Tabelas
      IV. Representações gráficas.
   b) **Conteúdos atitudinais:**
      I. Integração com demais colegas para formar equipe
      II. Participação ativa no seminário, respeitando a vez de fala dos colegas e reconhecendo seu próprio momento de fala.
   c) **Conteúdos procedimentais:**
      I. Preenchimento da ficha norteadora da Atividade 01
      II. Montagem de gráficos e tabelas, interpretando dados fornecidos
      III. Confecção de apresentação (que pode variar de cartolinas a apresentações digitais, com tabelas e gráficos digitais)
      IV. Apresentação para a turma das conclusões obtidas
      V. Entrega do material de apresentação à/ao docente

3) **Discussões finais e atividade individual de fixação**: As últimas duas horas-aulas serão utilizadas para discussão e diálogo - a respeito dos processos matemáticos básicos que estão por trás do funcionamento de uma pesquisa eleitoral - e para avaliação individual dos discentes. Dessa forma, a discussão com a turma, a fim de trocar ideias e concussões entre os grupos e a/o docente, será realizada na primeira hora-aula e a atividade de fixação (Atividade 02) será aplicada, individualmente, na segunda hora-aula.
   a) **Conteúdos conceituais:**
      I. Amostragem estatística
      II. Média aritmética
      III. Tabelas
      IV. Representações gráficas.
   b) **Conteúdos atitudinais:**
      I. Participação ativa no diálogo, respeitando a vez de fala dos colegas e reconhecendo seu próprio momento de fala.
   c) **Conteúdos procedimentais:**
      I. Tomada de notas quanto ao diálogo, em caderno ou folha fornecida pela/o docente

II. Entrega à/ao docente da ficha norteadora da Atividade 01 preenchida (uma por grupo)
III. Realização e entrega da Atividade 02 no tempo estipulado de uma hora-aula.

ATIVIDADE 02

Pensar em questões conceituais sobre o tema trabalhado, de modo a medir a percepção que os alunos puderam obter do conteúdo.

4) **Fechamento dos conceitos e indicação de reforço, quando necessário**: Após a avaliação individual dos estudantes, os que ficarem com conceitos finais (considerando ambas as atividades e a participação tanto nas discussões quanto no seminário) abaixo do esperado serão indicados para aulas de reforço, promovidas pela/o docente ou por algum projeto de monitoria da própria escola, em horários extraclasse. Será agendada nova avaliação, fora do momento da aula, conforme disponibilidade da/o docente e dos discentes.

3. Conclusões

É esperado que os estudantes concluam que:

1) A Matemática tem aplicações reais no cotidiano, atuando como ferramenta facilitadora para a compreensão da realidade;
2) A Estatística não é exata, mas baseia-se em dados reais para realizar previsões que se aplicam à realidade;
3) Pesquisas eleitorais são estatísticas;
4) Toda estatística tem uma margem de erro. Quando essa margem é muito grande, a pesquisa é pouco confiável;
5) Quanto menor a margem de erro e mais diversa a quantidade amostral, maior será o nível de confiança da pesquisa;
6) As pesquisas eleitorais devem apresentar a metodologia empregada, bem como sua margem de erro e/ou seu nível de confiança;
7) Gráficos e tabelas são representações visuais de intervalos/ dados numéricos;
8) As representações gráficas aproximam-nos dos números e auxiliam-nos na tomada de decisões.

Formas previstas de avaliação:

Participação nas aulas dialogadas: participou ativamente das discussões, respeitando o momento de fala dos colegas e reconhecendo seu próprio momento de fala? Fez perguntas? Contribuiu de alguma forma para a discussão?
Atividade 01: Compreendeu o que foi solicitado? Justificou coerentemente o uso do tipo de gráfico? Expressou-se bem na apresentação do seminário?
Atividade 02: Demonstrou compreensão dos conceitos trabalhados?

* Na Atividade 01: Os primeiros grupos serão avaliados de modo diferente, por entendermos que os demais grupos já terão uma base privilegiada para suas apresentações.

Interdisciplinaridades:

Eixo do Ensino Técnico de Informática: Sistemas Computacionais – uso de tabelas, gráficos e outros recursos digitais para interpretações científicas de dados.

Eixo do Ensino Médio: Sociologia – compreensão de princípios básicos envolvidos em eleições: o que é um prefeito? Qual sua função social? Qual é a importância do voto?

Referências:

Projeto Pedagógico do Curso Técnico Integrado em Informática. 2015. Disponível em: <https://spo.ifsp.edu.br/images/phocadownload/DOCUMENTOS_MENU_LATERAL_FIXO/TECNICOS/INTEGRADO/INFORMATICA/4_anos/PPC__INFORM%C3%81TICA_SPO_Aprovado_pelo_parecer_PRE_n._09_de_12_de_abril_de_2016_2_1.pdf>. Acesso em 28 de outubro de 2020.

Instituto Surgentis. **Você sabe quais são as funções de um prefeito?** Disponível em: https://www.surgentis.com.br/voce-sabe-quais-sao-as-funcoes-de-um-prefeito. Acesso em 06 de novembro de 2020.

Franco, D. **Eleições 2020: como funcionam as pesquisas eleitorais?** O Tempo. Disponível em: https://www.otempo.com.br/hotsites/eleicoes-2020/eleicoes-2020-como-funcionam-as-pesquisas-eleitorais-1.2406807. Acesso em 06 de novembro de 2020.