UFABC

Cadernos de Práticas de Ensino de Matemática

Volume 4

Augusto Mendes Duarte

Francisco José Brabo Bezerra

Vinícius Pazuch

CATALOGAÇÃO NA FONTE
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

D812c Cadernos de práticas de ensino de matemática [recurso eletrônico] – volume 4 / Organizado por Augusto Mendes Duarte, Francisco José Brabo Bezerra e Vinícius Pazuch. — Santo André, SP : Universidade Federal do ABC, 2022.

202 p. : il.

E-book
ISBN: 978-65-5719-045-6

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Ensino Fundamental. 3. Ensino Médio. 4. Prática de Ensino. 5. Formação de Professores. 6. Educação Matemática. I. Duarte, Augusto Mendes, org. II. Bezerra, Francisco José Brabo de, org. III. Pazuch, Vinícius, org.

CDD 22 ed. – 510.7

Elaborado por Tatiana Hyodo – CRB-8/7392

Apresentação

Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira, às quatro horas da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática.

Freire, Paulo. *A educação na cidade*. São Paulo: Cortez, 1991.

Dando continuidade à iniciativa da professora Virgínia Cardia Cardoso e do professor Vinícius Pazuch, apresentamos o volume 4 do *Cadernos de Práticas de Ensino de Matemática da UFABC*. Este volume foi organizado por um licenciado em Matemática, Augusto Mendes Duarte, e pelos professores do Curso de Licenciatura em Matemática da UFABC, Francisco José Brabo Bezerra e Vinícius Pazuch. Este volume apresenta planos de ensino construídos por estudantes das disciplinas de Práticas de Ensino de Matemática (PEM), ocorridas durante o ano de 2020. Os planos de ensino resultam de planejamentos elaborados pelos estudantes durante a realização da disciplina. Estes planos são produções individuais, em duplas ou mais estudantes. A apresentação final dos planos segue um modelo criado pelos docentes e fornecido aos estudantes para facilitar a elaboração desta publicação.

As PEM são disciplinas obrigatórias da matriz curricular do Curso de Licenciatura em Matemática da UFABC, o qual vem passando por reformulações desde a sua criação em 2010, de forma a se adequar às diretrizes curriculares para a formação de professores e às necessidades advindas das práticas pedagógicas nas redes de ensino, em particular, para atender as demandas da Educação Básica Pública. Na matriz curricular atual, as PEM constituem um conjunto de quatro disciplinas: PEM I, II, III e IV, ministradas ao longo do ano letivo, nos períodos diurno e noturno. As PEM I e II envolvem a abordagem pedagógica e didática de conteúdos matemáticos voltados aos Anos Finais do Ensino Fundamental e as PEM III e IV abordam conteúdos matemáticos estudados no Ensino Médio. Assim, os planos de ensino foram elaborados com o acompanhamento dos docentes destas disciplinas.

Este volume apresenta planos de ensino envolvendo as cinco unidades temáticas da Base Nacional Comum Curricular: álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística. Destacam-se os diferentes recursos didáticos e encaminhamentos metodológicos para a abordagem dos conteúdos matemáticos nos Anos Finais do Ensino Fundamental e/ou no Ensino Médio, refletindo a importância do planejamento no processo de tornar-se professor que ensina matemática.

A ideia de construção destes cadernos, cuja iniciativa se deu em 2019 com a 1ª. edição, foi propiciar um conjunto significativo de sugestões de aulas de matemática, e contribuir na formação dos futuros professores. Ainda que tais planos não reflitam os ideais que buscamos, estes abrem caminhos para novas reflexões e sugestões para a construção de um ensino de matemática em que crianças e jovens acolham a disciplina como algo prazeroso e importante para suas vidas.

O desejo é que os leitores possam encontrar alternativas conceituais e didáticas para a abordagem de conteúdos matemáticos em sala de aula, para reformular planos de aula ou para gerar novos *insights* na prática pedagógica de professores em exercício e de futuros professores. Boa leitura!

Os organizadores

Índice

por ano letivo

Índice

por abordagem

História da Matemática

Investigação Matemática ou Trabalho em Grupo

Materiais Manipuláveis ou Jogos

Recursos Digitais

Índice

por tema

Classificação dos quadriláteros

Gabriel Oliveira Santos

Ano Escolar: 6º. Ano do Ensino Fundamental

Ementa: Noções básicas de Ângulo, Vértice e Aresta;

Classificação dos quadriláteros.

Objetivos: Distinguir os objetos que compõe uma figura geométrica, como ângulos e seus fundamentos, vértices e seus fundamentos e arestas e seus fundamentos; reconhecer os quadriláteros de acordo com as suas características;

Recursos Empregados: Folha quadriculada, E.V.A., palitos de dente, régua, transferidor, lousa para escrever as questões.

Atividades:

1. Introdução: Este plano de aula tem como objetivo orientar o ensino de quadriláteros para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, baseando-se na BNCC (Base Nacional Comum Curricular), habilidade EF06MA20 que visa "Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles." e habilidade EF06MA18 que visa "Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros". Este plano de aula prevê a utilização de três aulas com 50 minutos cada, onde na primeira aula será trabalhada as questões referentes as noções básicas de ângulos, vértices e arestas. Na segunda e terceira aula será abordado a temática específica de quadriláteros. Dependendo da turma talvez seja necessário ampliar o número de aulas, porém deixamos aqui o indicativo de três.

2. Atividades desenvolvidas:

Iniciar a aula contando um pouco do contexto histórico da geometria.

1. **Contexto histórico:** As origens da Geometria (do grego medir a terra) parecem coincidir com as necessidades do dia a dia. Partilhar terras férteis às margens dos rios, construir casas, observar e prever os movimentos dos astros, são algumas das muitas atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas. Documentos sobre as antigas civilizações egípcia e babilônica comprovam bons conhecimentos do assunto, geralmente ligados à astrologia. Na Grécia, porém, é que o gênio de grandes matemáticos lhes deu forma definitiva. Dos gregos anteriores a Euclides, Arquimedes e Apolônio, consta apenas o fragmento de um trabalho de Hipócrates. E o resumo feito por Proclo ao comentar os "Elementos" de Euclides, obra que data do século V a.C., refere-se a Tales de Mileto como o introdutor da Geometria na Grécia, por importação do Egito.

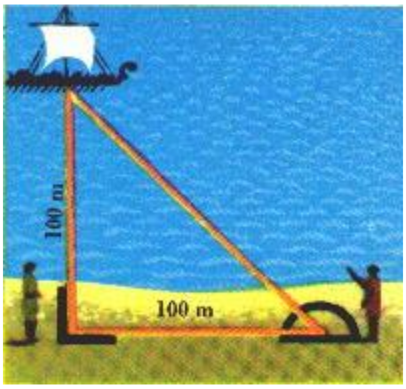
   Tanto entre os sumérios como entre os egípcios, os campos primitivos tinham forma retangular. Também os edifícios possuíam plantas regulares, o que obrigava os arquitetos a construírem muitos ângulos retos (de 90º). Embora de bagagem intelectual reduzida, aqueles homens já resolviam o problema como um desenhista de hoje. Por meio de duas estacas cravadas na terra assinalavam um segmento de reta. Em seguida prendiam e esticavam cordas que funcionavam à maneira de compassos: dois arcos de circunferência se cortam e determinam dois pontos que, unidos, secionam perpendicularmente a outra reta, formando os ângulos retos.

   O problema mais comum para um construtor é traçar, por um ponto dado, a perpendicular a uma reta. O processo anterior não resolve este problema, em que o vértice do ângulo reto já está determinado de antemão. Os antigos geômetras, o solucionavam por meio de três cordas, colocadas de modo a formar os lados de um triângulo-retângulo. Essas cordas tinham comprimentos equivalentes a 3, 4 e 5 unidades respectivamente. O teorema de Pitágoras explica porque: em todo triângulo-retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto). E 32+42=52, isto é, 9+16=25.

Por volta de 500 a.C., as primeiras universidades eram fundadas na Grécia. Tales e seu discípulo Pitágoras coligiram todo o conhecimento do Egito, da Etúrria, da Babilônia, e mesmo da Índia, para desenvolvê-los e aplicá-los à matemática, navegação e religião. A curiosidade crescia e os livros sobre Geometria eram muito procurados. Um compasso logo substituiu a corda e a estaca para traçar círculos, e o novo instrumento foi incorporado ao arsenal dos geômetras. O conhecimento do Universo aumentava com rapidez e a escola pitagórica chegou a afirmar que a Terra era esférica, e não plana. Surgiam novas construções geométricas, e suas áreas e perímetros eram agora fáceis de calcular.

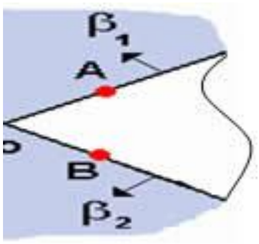
Uma dessas figuras foi chamada polígono, do grego '*polygon*', que significa "muitos ângulos". Atualmente até rotas de navios e aviões são traçadas por intermédio de avançados métodos de Geometria, incorporados ao equipamento de radar e outros aparelhos. O que não é de estranhar desde os tempos da antiga Grécia, a Geometria sempre foi uma ciência aplicada, ou seja, empregada para resolver problemas práticos. Dos problemas que os gregos conseguiram solucionar, dois merecem referência: o cálculo da distância de um objeto a um observador e o cálculo da altura de uma construção.

No primeiro caso, para calcular, por exemplo, a distância de um barco até a costa, recorria-se a um curioso artifício. Dois observadores se postavam de maneira que um deles pudesse ver o barco sob um ângulo de 90º com relação à linha da costa e o outro sob um ângulo de 45º. Isto feito, a nave e os dois observadores ficavam exatamente nos vértices de um triângulo isósceles, porque os dois ângulos agudos mediam 45º cada um, e, portanto, os catetos eram iguais. Bastava medir a distância entre os dois observadores para conhecer a distância do barco até a costa.



2. Ângulos

Denominamos ângulo a região do plano limitada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas recebem o nome de lados do ângulo e a origem delas, de vértice do ângulo.



A unidade usual de medida de ângulo, de acordo com o sistema internacional de medidas, é o grau, representado pelo símbolo º, e seus submúltiplos são o minuto ’ e o segundo ”.
Temos que 1º (grau) equivale a 60’ (minutos) e 1’ equivale a 60”(segundos).

3. Vértice e aresta

De modo geral, vértice é o encontro de duas arestas (no caso de figuras planas) e aresta é a reta que liga dois vértices.

4. Classificando os quadriláteros

Podemos definir os quadriláteros como figuras geométricas planas, poligonais e formadas por quatro lados. Em outras palavras, essa definição implica em características como: figuras definidas em um plano, por isso, não existem pontos dessa figura fora do plano (no que chamamos de espaço) e são formados por segmentos de reta que se encontram em suas extremidades, por isso, são figuras fechadas. Os quadriláteros possuem três classificações básicas:

Outros: Não possuem lados paralelos;
Trapézios: Possuem um par de lados paralelos;
Paralelogramos: Possuem dois pares de lados paralelos.

O paralelismo entre os lados de um **quadrilátero** é perceptível quando se observa seus lados opostos. Lados que possuem ponto em comum não podem ser paralelos justamente por possuírem ponto em comum.

Exemplo de trapézio, paralelogramo e “outros”

Paralelogramos

Para ser paralelogramo, é necessário que o polígono seja um **quadrilátero** e que seus lados opostos sejam paralelos. Essa definição implica uma série de resultados, chamados aqui de propriedades. Elas são válidas para todo **paralelogramo** e serão discutidas a seguir:

1)Ângulos opostos são congruentes;
2)Ângulos não opostos são suplementares;
3)Lados opostos são congruentes;
4)As diagonais do paralelogramo encontram-se no seu ponto médio.

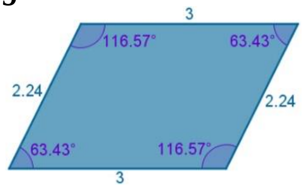
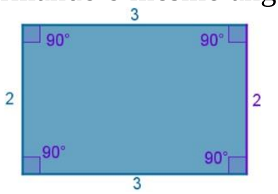


Ilustração das propriedades do paralelogramo

Retângulos

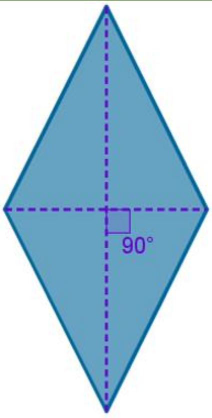
Os retângulos são **quadriláteros** cujos ângulos medem 90°. Um resultado direto disso é que seus lados opostos são paralelos. Para ver isso, basta considerar qualquer um de seus lados como uma reta transversal e observar que ela corta outros dois lados formando o mesmo ângulo: 90°.



Todo retângulo, portanto, é também um paralelogramo. Entretanto, nem todo paralelogramo é um retângulo. Assim, para o retângulo, valem as quatro propriedades dos paralelogramos citadas acima, além da seguinte:
Todo retângulo possui diagonais congruentes.
O resultado mais direto dessa propriedade é o seguinte: Se um paralelogramo possui diagonais congruentes, então ele é um retângulo.

Losangos

Os losangos são paralelogramos que possuem os quatro lados congruentes. Desse modo, todo losango é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um losango.



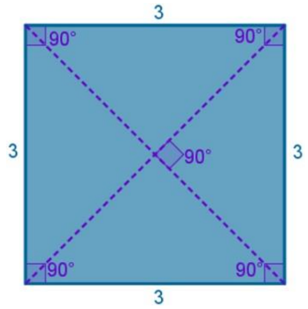
Esse quadrilátero possui as mesmas propriedades dos paralelogramos, além da seguinte:

As diagonais de um losango formam um ângulo reto.

Assim, se um paralelogramo possui diagonais perpendiculares, então ele é um losango.

Quadrado

Um quadrado é um paralelogramo que possui os quatro lados iguais e, além disso, possui ângulos retos. Dessa maneira, um quadrado é, ao mesmo tempo, um losango e um retângulo. Entretanto, nem todo losango é quadrado e nem todo retângulo é quadrado.



A propriedade específica do quadrado é a seguinte:

As diagonais de um quadrado formam ângulos retos e são congruentes.

Assim, se um paralelogramo possui diagonais que formam um ângulo reto e que são congruentes, então esse paralelogramo é um quadrado.

Trapézios

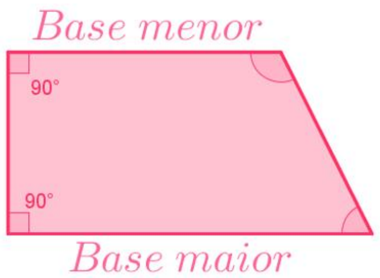
São os quadriláteros que possuem apenas um par de lados opostos paralelos. Esses lados são chamados de *bases* do trapézio. Os trapézios não são paralelogramos, por isso, as propriedades dos paralelogramos não são válidas para os trapézios.

Existem três classes de trapézios: os trapézios quaisquer, os trapézios retângulos e os trapézios isósceles.

A primeira classe diz respeito àqueles que não são retângulos nem isósceles. Já os trapézios retângulos:

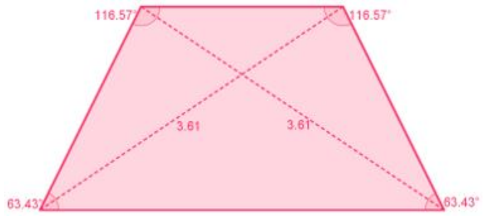
Trapézios retângulos

São trapézios que possuem dois ângulos internos com medida de 90°.

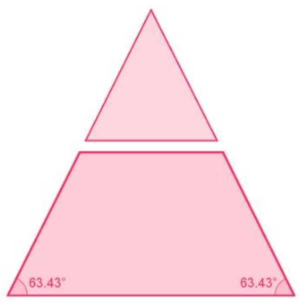


Trapézios isósceles

São os trapézios em que os lados que não são paralelos possuem a mesma medida (são congruentes).



É possível notar que um trapézio isóscele pode resultar do corte feito em um triângulo isósceles, desde que esse corte descreva uma reta paralela à base desse triângulo. Quando isso é feito, o resultado é outro triângulo isósceles semelhante ao primeiro e um trapézio isósceles.

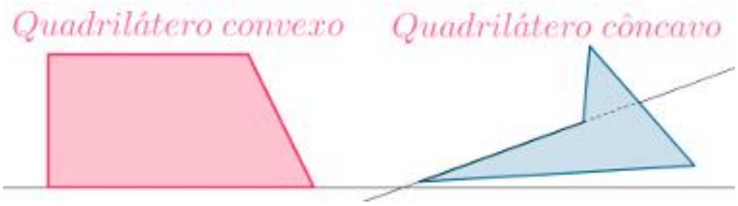


As propriedades específicas para o trapézio isósceles são as seguintes:

1)Os ângulos da base maior do trapézio isósceles são iguais;
2)As diagonais do trapézio isósceles são congruentes.

Quadriláteros convexos

Existem quadriláteros convexos e não convexos. O primeiro grupo é formado por todos aqueles em que a reta que contém qualquer um de seus lados não intercepta o outro lado. Se existe pelo menos um lado que não possui essa característica, então, ele é chamado de não convexo ou côncavo.



5. Atividade proposta

O aluno deve montar o quadrilátero correto a partir da descrição dita pelo professor e ao final das 5 questões deve entregar os quadriláteros que montou. Para iniciar o professor deverá entregar a folha quadriculada, o E.V.A. e os palitos para o aluno. Em seguida o professor explicará a atividade conforme a seguinte sequência:

1. Cada aluno deverá montar os quadriláteros corretamente, conforme as dicas dadas pelo professor.
2. Em seguida deverá identificar o nome do quadrilátero em questão, podendo escrever embaixo da figura que fora mondada pelo aluno com os palitos.
3. O tempo recomendado para cada questão é de 10 minutos.
4. Ao final das montagens, o aluno deverá entregar a folha quadriculada com os quadriláteros montados.

5.1) Questões:

1) Ângulos iguais de 90 graus e lados iguais. Resposta: Quadrado.

2) Ângulos iguais de 90 graus. Resposta: Retângulo.

3) Lados iguais. Resposta: Losango.

4) Dois pares de lados paralelos. Resposta: Paralelogramo.

5) Um par de lados não paralelos iguais. Resposta: Trapézio.

3. Conclusões

A partir do quiz o aluno conseguirá unir a descrição do quadrilátero com a sua imagem de uma forma lúdica.

Formas previstas de avaliação: Participação na atividade e vista da folha quadriculada com as formas montadas em E.V.A. ou palitos.

Referências:

Internet:

Matemática em toda parte | Construção - Quadriláteros. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=BWJvAThwl88>. Acesso em: 20 março de 2020.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Brasília. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 20 março de 2020.

BRASIL. SUGESTÃO DE AULA SOBRE QUADRILÁTEROS. Disponível em: < https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/sugestao-aula-sobre-quadrilateros.htm>. Acesso em: 20 março de 2020.

Livro:

IMENES, LUIZ MARCIO; Matemática. 1ª ed. São Paulo, SP: Editora Moderna, 2010.

DIVISIBILIDADE ATRAVÉS DOS NÚMEROS FIGURADOS	
Autor: Augusto Mendes Duarte	**Turma:** Diurno **Data: 25/05/2020**
Tema tratado: Introdução à Divisibilidade através de Contextualização Histórica com Números Figurados	
Ano escolar: 6ºAno	
Ementa: Paridade, Divisibilidade e Números Primos	
Objetivos: Compreender intuitivamente o conceito de paridade, divisão e números primos através do contexto histórico dos números figurados.	
Recursos empregados: *Slides* para projeção, lousa, giz, fichas	

Descrição de todas as atividades a serem apresentadas:

Como uma introdução à temática da divisibilidade, esta aula tem intenção de explorar conceitos de forma intuitiva sem qualquer formalidade. A partir de uma introdução histórica aos números figurados, é proposta uma atividade utilizando fichas em que se transforma números figurados em outras figuras, com o objetivo de compreender visualmente a divisibilidade.

Descrição de situação 1:

Como abordado no livro *A History of Greek Mathematics* de T. Heath (1921), a noção de paridade e divisibilidade foram importantes na história da matemática, em especial para os pitagóricos e neopitagóricos, pioneiros em seu estudo aprofundado. Como importante escola de característica filosófica e mística, a história dos pitagóricos constitui uma boa situação de ensino em história da matemática. Em especial, esta contextualização histórica pode servir de introdução e precursora para o ensino de outros temas relacionados em anos futuros, como o MDC, o Teorema de Pitágoras e sequências numéricas.

Objetivos: Oferecer uma breve introdução à história dos pitagóricos utilizando *slides* para projeção, com duração aproximada de 20 minutos.

Metodologia: Trata-se de uma sequência expositiva com ocasionais perguntas aos alunos para incentivar a interação. Para não tornar a apresentação entediante, é recomendável que os slides contenham diversas imagens e animações. Aproveitando a situação interdisciplinar, pode-se incluir um mapa da Grécia com menção a localidades, eventos e personalidades históricas.

Desenvolvimento: Pitágoras é uma figura da Grécia antiga cuja história é envolta em mistério. Teria sido o fundador dos "pitagóricos", uma seita filosófica e mística que envolvia estudos e crenças acerca dos números. Segundo T. Roque (2012), existem pesquisas que apontam que ele pode nem sequer ter existido, já que certos relatos se referem apenas aos "pitagóricos", e não ao homem "Pitágoras". No entanto, a versão mais comum sobre sua história o coloca como tendo nascido na ilha de Samos, uma ilha grega na borda da atual Turquia. Importante localidade na antiguidade, tinha como principal atividade a exportação de vinho.

Figura 1 – Localização da Ilha de Samos na Grécia. Fonte: Shutterstock.

Nascido por volta do século VI a.E.C., Pitágoras teria sido filho de um artesão, que em suas viagens pelo Egito e pela Pérsia teria estudado magia, matemática e filosofia. Em dado momento da sua vida teria fundado em Crotona, na atual Itália, a seita dos pitagóricos. Consistia em ensinamentos sobre estilo de vida e crenças espirituais.

O que existe em comum entre todas as coisas que existem no Universo? O que têm de igual pessoas, planetas e gotas d'água? A resposta dos pitagóricos é que "todas elas podem ser contadas". Assim, os números seriam não somente uma propriedade, mas a essência de todas as coisas.

Como relata T. Roque, em sua cosmogonia, o par e o ímpar representavam a dualidade do Universo. De seu casamento surgiu o Um, que não é um número, e sim a origem de todas as coisas. Par e ímpar ao mesmo tempo, ele é aquele que mede a tudo, e todo o existente teria evoluído a partir da unidade. Como tudo é número, existiam números que representam cada animal e cada pessoa. A representação essencial destes números não era escrita, e sim através de formas construídas com pedrinhas. Estas são chamadas de números figurados.

Entre as figuras que podemos construir com pedrinhas estão linhas, triângulos, retângulos, pentágonos e hexágonos. As linhas eram as formas básicas dos números, formadas simplesmente pela disposição de pedrinhas em uma fila. Os triângulos, em especial, possuíam um lugar de destaque na doutrina pitagórica. Para formar um número triangular adicionamos uma sequência de números em linha. Por exemplo, 1 e 2 arranjados um sobre o outro formam o número triangular 3. 1, 2 e 3 em sequência formam um triângulo com seis pontos, e assim por diante. O quarto número triangular tinha um significado especial para eles. 1, 2, 3 e 4 formam 10, que para os pitagóricos era um número sagrado. Sua disposição em triângulo, o chamado *tetraktis*, era descrito como o "princípio do bem-estar".

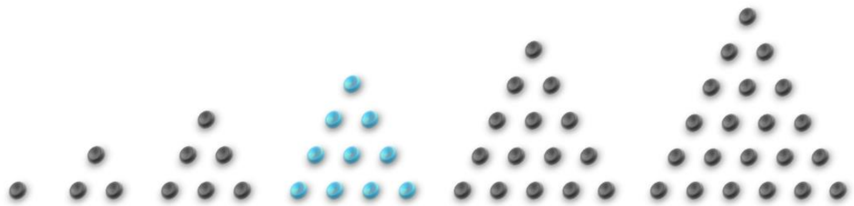


Figura 2 – Sequência dos primeiros seis números triangulares, destacando o *tetraktis*. Fonte: autor.

Conforme T. Heath, número, desde a época de Tales de Mileto, era um conceito concebido por uma “coleção de unidades”. Número remete à pluralidade, e assim sendo, parecia ser uma crença comum a de que o 1 não é um número. Hoje em dia, o nosso conceito de número é bem mais abrangente, de forma que o um, o zero e até números negativos são agrupados sob a alcunha “número”.

Os pitagóricos, além da aritmética, estudavam a astronomia e a música. Eles acreditavam que, assim como a música é feita de razões, todo o Universo era uma grande escala musical. Os planetas e as estelas, todos se movimentariam conforme uma harmonia, como é de sua natureza, já que são números. Razões entre os como os pitagóricos as concebiam podem ser facilmente visualizadas pelo acúmulo de pedrinhas.

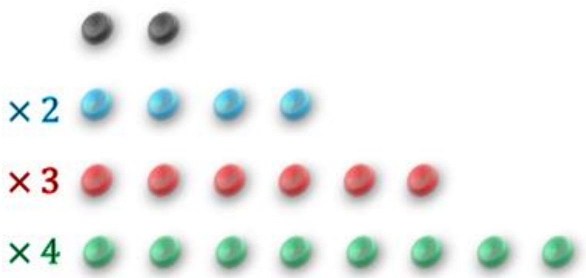


Figura 3 – Razões com pedrinhas mostrando o dobro, o triplo e o quádruplo. Fonte: autor.

Entre as crenças espirituais dos pitagóricos, uma importante é a da metempsicose, segundo a qual quando uma pessoa morre, a alma dela poderia reencarnar em outro corpo, inclusive o de um animal. Existe o relato de que Pitágoras defendeu um cachorro que estava sendo agredido, pois ouviu em seu latido a voz de um amigo morto. As razões, como divisões em partes iguais, representavam também a justiça. Ter igual para todos faz algo ser justo, e quando alguém morre seria julgado se levou uma vida justa ou não. A reencarnação neste mundo seria equivalente a uma punição por injustiça. Alguns relatos argumentam que os pitagóricos eram vegetarianos, pois infligir dor sem motivo em seres capazes de senti-la era um ato de injustiça que diminuía o ser humano.

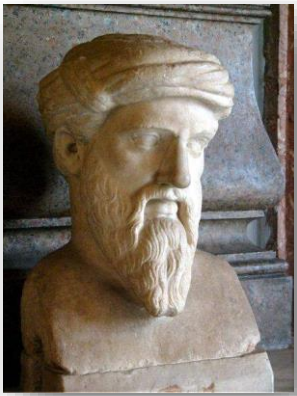
 

Figura 4 – Estátuas de Pitágoras no Museu Capitolini, em Roma (esquerda) e no porto de Samos (direita)

Fonte: Wikipedia, artigo Pythagoras, acesso em 25 de maio de 2020 (esquerda) e Shutterstock (direita)

Descrição de situação 2:

Objetivos: Permitir aos alunos que com o manuseio dos números figurados compreendam intuitivamente os conceitos de paridade, divisibilidade e de número primo.

Metodologia: Os alunos são divididos em grupos e se sentam preferencialmente no chão, para terem à sua disposição espaço para trabalhar com os números figurados. Fichas de diferentes cores são distribuídas aos grupos (no mínimo quatro cores diferentes, para dar conta da quantidade de divisores dos números até 23). A aula continua expositiva e contextualizada com os pitagóricos, e conforme explicações sobre os conceitos são oferecidas, é pedido que os alunos os explorem com as fichas. Esta etapa é programada para durar 30 minutos, o restante da aula.

Desenvolvimento:

a) Paridade: A dualidade do par e do ímpar, segundo a doutrina pitagórica, é o que gerou todo o mundo ao formar o Um. Mas o que seriam "par" e "ímpar"? Números pares são aquelas linhas de pedrinhas que podemos separar em "parezinhos". Se organizarmos os "parezinhos", construímos um número retangular. Este tipo de número era chamado de "alongado" pelos pitagóricos.

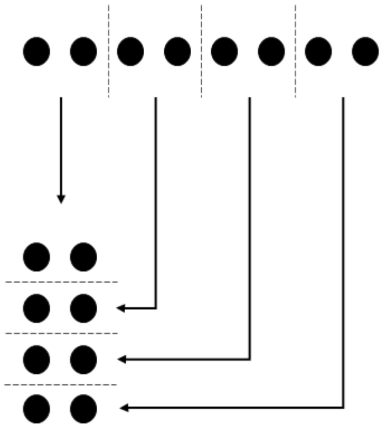


Figura 5: Reorganizando 8 bolinhas em 4 grupos de 2, formando um número alongado. Fonte: autor.

Notamos que estes números são feitos de partes de 2. Todo número par é formado por pequenos pares - grupos de dois -, por isso o nome *par*. Podemos dividir o número alongado ainda de outra forma: verticalmente, em dois grupos iguais. Este é outro motivo pelo qual são chamados de *par*, pois há um grande par de duas partes iguais.

Oferece-se então um número a cada grupo, e pede-se que cada qual tomem um número de fichas correspondente e verifiquem se o número é par, a partir de sua disposição como número alongado.

Conclui-se, visualmente, notando que a sequência dos números alterna um par com outro ímpar, pois formam-se pequenos pares cada vez que alcançamos um múltiplo de 2. Pode-se mostrar este fato formando uma sequência de números ímpares e alongados com as fichas.

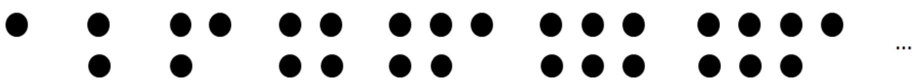


Figura 6: A sequência dos números naturais, mostrando que os pares sempre se constituem de "parezinhos" verticais.

Fonte: autor.

b) Divisibilidade e Primos: Podemos dividir os números não somente em partes de dois. Podemos dividi-los em partes de três, quatro, dez, ou qualquer número que desejarmos. Se conseguimos, por exemplo, dividir 12 em partes de 3, os pitagóricos diziam que 3 mede 12. Isto significava que 3 é uma medida de 12, pois podemos ver "quantos 3 cabem no 12". A forma atual de dizer isso é que 3 *divide* 12. Ou ainda, que 3 é *divisor* de 12. Podemos formar, portanto, números alongados tomando partes de qualquer tamanho, contanto que este tamanho divida o número.

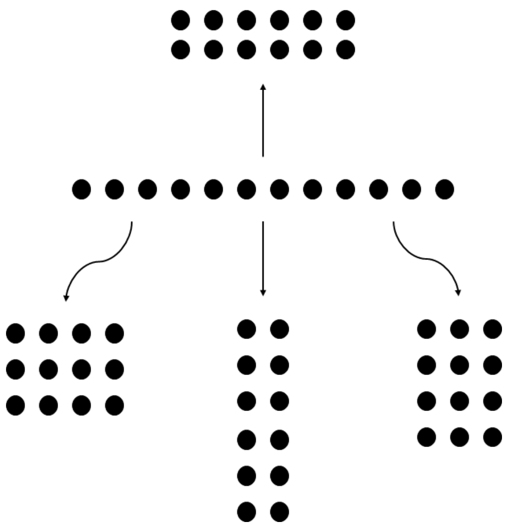


Figura 7: Dividindo 12 fichas em grupos de 6, 4, 2 e 3. Fonte: autor.

Saber se um número é divisível em partes iguais de alguma quantidade é útil para fazer divisões igualitárias, por exemplo quando queremos distribuir objetos para várias pessoas. Isto fazia parte do conceito de justiça dos pitagóricos. Por exemplo, não podemos dividir 12 chocolates igualmente para cinco pessoas, mas se fossem 6 pessoas, poderíamos. Caso não consigamos dividir um número em partes iguais de dado tamanho, significa que ele *não é divisível* por aquela parte. Podemos encontrar todos os divisores de um número testando se ele é divisível pelos números menores que ele, isto é, vendo se formam números alongados correspondentes.

Oferece-se um número a cada grupo e pede-se que cada um deles encontre os divisores, construindo os números alongados correspondentes com as fichas. Se forem números menores que 24, é possível deixar montado quatro números alongados usando as quatro cores de fichas (pois todos possuem no máximo quatro divisores naturais diferentes de 1 e deles mesmos). É útil dar um número primo pequeno a um dos grupos, como 11, para encadear a discussão seguinte.

Exemplos de perguntas que podem ser feitas aos alunos são:

- Por que os números alongados sempre formam pares, um sendo reflexo do outro? Por exemplo, dividir 12 em partes de 2 resulta em 6 partes, e dividir 12 em partes de 6 resulta em duas partes.
- Vale a pena testar como divisores partes maiores do que a metade do número estudado?

Usando como exemplo o número primo oferecido a um dos grupos, explica-se que existem números cuja única forma de serem divididos em partes iguais é se esta parte for o 1. Os números que só podem ser divididos em partes de 1 são chamados de *primos*. “Primo” tem a mesma raiz das palavras “primeiro” e “primordial”, significando algo básico e essencial. Isso é porque eles não podem ser divididos por outros números, apenas servem para medir os demais. Os pitagóricos os chamavam de números retilíneos ou lineares, pois não podemos formar números alongados com eles.

Respondendo a uma das perguntas feitas anteriormente, não faz sentido tentar formar números alongados com partes maiores que a metade. Isto acontece porque não é possível dividir um número, de forma inteira, em menos do que duas partes. Se tomarmos mais do que a metade, a outra fileira do número alongado ficará com menos do que a metade, logo será diferente dela.

Chegamos então a um método básico para dizer se um número é primo: tentamos dividir por todos os números menores que a metade. Oferecendo agora um novo número a cada grupo, pede-se que verifiquem se ele é ou não primo.

Quanto à outra pergunta, obtemos a resposta vinda da tabuada: $2 \times 6 = 12$, assim como $6 \times 2 = 12$. Os números alongados equivalem a um dado número de fileiras seguidas, com um número de fichas em cada fileira. Este número de fichas é, por sua vez, equivalente ao número de fileiras caso o número alongado seja visto espelhado. Quando dividimos 12 em partes de 2 obtemos 6 partes, e quando dividimos em partes de 6 obtemos duas partes. A interpretação depende da orientação do número alongado. Esta é uma forma de mostrar, intuitivamente, a comutatividade da multiplicação.

c) Miscelânea: Caso sobre tempo, pode-se pedir aos alunos que verifiquem se dado número é um número triangular ou um número quadrado, seguida de uma breve explicação sobre eles.

Formas previstas de avaliação: Tratando-se de uma aula introdutória, verifica-se a atenção dos alunos nas partes expositivas e a participação nos trabalhos em grupo.

Referências

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular** – matemática. Brasília, MEC, 2020. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 25 de maio de 2020.

HEATH, T. **A History of Greek Mathemathics**, Oxford, Dover Publications, 1921.

ROQUE, T. **História da Matemática**, Rio de Janeiro, Editora Zahar, 2012.

WIKIPEDIA, **Pythagoras**. Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras. Acesso em 25 de maio de 2020.

MMC e MDC

Lorena Rodriguez Haase

Ano Escolar: 6° Ano do Ensino Fundamental.

Ementa

Mínimo Múltiplo Comum (MMC); Máximo Divisor Comum (MDC); operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; frações; números primos.

Objetivos

- Relacionar conceitos de divisível, múltiplo e divisor;
- Identificar corretamente os múltiplos e divisores de um número natural;
- Calcular o MMC e MDC entre dois números naturais através de problemas.

Recursos Empregados

Lousa, giz, canetinhas hidrográficas coloridas, folhas impressas com as atividades em sala, lápis, borracha, caneta.

Atividades

1. Introdução

A ideia de Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum passa a ser introduzida na educação básica desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Isto se dá pelo fato de que os estudos do m.m.c. e do m.d.c. auxiliam de forma bastante direcionada o estudo de muitos outros conteúdos matemáticos, além de ampliar os conceitos que os alunos possuem de divisibilidade e da relação entre números (estudo da Aritmética).

Inserido na unidade temática "Números" para o 6° ano, a BNCC (2018) propõe como dois objetos do conhecimento envolvendo a ementa proposta neste plano: *Múltiplos e divisores de um número natural* e *Números primos e compostos.* A habilidade de matemática prevista é:

> *(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.*

Como conhecimentos prévios, espera-se que o aluno já conheça e manipule com clareza as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão; assim como, tenha conhecimento de suas propriedades. É importante que reconheça e opere contas com frações e tenha estudado números primos e, se possível, a decomposição em fatores primos.

Esse plano prevê a utilização de **8 aulas** de 50 minutos.

Os conceitos de MMC e MDC fazem parte da teoria aritmética dos números. Dessa forma, para entender essas definições formalmente, da álgebra temos que:

- **Definição de MDC**: dados dois números inteiros a e b não nulos, define-se o máximo divisor comum (MDC), como sendo o maior inteiro que divide simultaneamente a e b. Assim, o MDC de dois números será indicado por MDC (a, b). É possível ter o MDC de n números inteiros, como a1, a2, a3, ..., an; assim indicaremos por MDC (a1, a2, a3, ..., an).
    - Exemplo: MDC dos inteiros 10 e 14.
      Os divisores positivos de 10 são: 1, 2, 5, 10
      Os divisores positivos de 14 são: 1, 2, 7, 14
      Os divisores comuns são, ou seja: 1 e 2. Portanto, MDC (10, 14) = 2.

- **Definição de MMC**: dados dois números inteiros a e b não nulos, define-se o mínimo múltiplo comum - MMC, indicado por MMC (a,b), como sendo o menor inteiro positivo, múltiplo comum de a e b.
    - Exemplo: MMC dos inteiros 10 e 14.
      Os múltiplos positivos de 10 são: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, ...
      Os múltiplos positivos de 14 são: 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, ...
      Portanto, o mínimo múltiplo comum é igual a 70, indicamos por MMC (10,14) = 70.

Além das definições formais, podemos ressaltar outros conceitos importantes que auxiliam o ensino dos múltiplos e divisores:

- **Número Primo**: Um número inteiro positivo é denominado número primo, se e somente se os seus divisores positivos são 1 e p. Pode-se provar que o conjunto dos números primos é um conjunto infinito. Sendo P o conjunto dos números primos, podemos escrever:
  P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 61, ...}
  Observa-se que 2 é o único número par que é primo.

- **TFA**: Todo número inteiro maior do que 1, que não é primo, pode ser decomposto num produto único de fatores primos. Esta afirmação é conhecida como o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Por exemplo:
  $$240 = 2.2.2.2.3.5 = 2^4.3.5$$

Na prática, podemos usar o seguinte esquema de decomposição de fatores primos, esta que é conhecida também como fatoração, já que o número é decomposto em fatores de uma multiplicação:

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	2.2.2.2.3.5

Por fim, podemos destacar aqui algumas **propriedades**:

I. O MMC entre dois números primos entre si é igual ao produto deles;
II. O MMC entre dois ou mais números naturais, onde o maior é múltiplo do(s) outro(s), é o maior;
III. Qualquer múltiplo do MMC de dois ou mais números, também será múltiplo desses números;
IV. O produto de dois ou mais números naturais diferentes de zero é igual ao produto do MDC pelo MMC deles;
V. Dividindo-se o MMC de dois ou mais números naturais A, B, C, ..., por cada um deles, encontramos sempre quocientes primos entre si.
VI. Multiplicando-se ou dividindo-se o MMC de dois ou mais números naturais por um número diferente de zero, o MMC deles também ficará multiplicado ou dividido por este número.

2. Atividades desenvolvidas

1) Contexto Histórico

Início de conversa com os alunos para falar sobre relação entre números.

Você sabia? Pesquisadores concordam que os primeiros seres humanos aprenderam as primeiras noções de contagem antes mesmo de aprenderem a falar ou a escrever! Daí percebe-se que o pensamento lógico matemático mais primitivo e básico é algo primordial da espécie humana podendo também ser observado em outras espécies de animais. A noção de grandeza, por exemplo, é considerada entre os animais, principalmente com a quantidade 2 ou 3.

Uma civilização que deixou suas marcas na história humana foi a sociedade **Egípcia.** Esta ficou marcada por suas grandes construções arquitetônicas que foram base para o crescimento fértil de muitos conhecimentos matemáticos. Pela construção das grandes pirâmides do Egito fez-se necessário o desenvolvimento de um grande estoque de registros matemáticos. Os egípcios dispunham de um grande conhecimento em relação às operações com grandezas.

O mais famoso dos registros matemáticos da sociedade egípcia é o **papiro de Rhind**. Este papiro ficou assim conhecido por ter sido adquirido pelo egiptólogo escocês Alexander Rhind no ano de 1858. Sua datação é de 1650 a. c. O conteúdo do papiro consta de 84 problemas de ordem aritmética e geométrica com suas respectivas soluções.

Para trazer uma abordagem histórica mais interativa, o professor pode elaborar um papiro caseiro com papel manchado com café e levar para a sala de aula para que os alunos possam escrever ou desenhar figuras como se estivessem no Antigo Egito, enquanto o professor conta a história. Tal abordagem pode incentivar os alunos a imaginarem como se construía o conhecimento naquela época.

Figura 1: O papiro de Rhind

Fonte: Os Papiros da Matemática Egípcia. Disponível em: <https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html>. Acesso em: 02 jun. 2020.

Exemplo de como os egípcios calculavam a multiplicação 6 x 28.

I. Desenvolviam uma tabela parecida com uma "tabuada" particular, mas se preocupando com o número anterior da tabela e com as proporções. Ou seja, 2 x 28 = 56, pois **28 + 28 = 56**. Já 4 x 28 = 112, pois 56 + 56 = 112. E assim por diante.

   1 → 28

   2 → 56

   4 → 112

II. Somavam os fatores da primeira coluna para ver se encontraram o número desejado. No nosso caso, é o número 6, sabemos que 4 + 2 = 6, portanto **6 x 28 = 56 + 112 = 168**.

2) Múltiplo e Divisor

Relembrar os conceitos de múltiplo e divisor.

- **Múltiplo**: trata-se do número ou da quantidade que contém um ou outra várias vezes de maneira exata. As tabuadas são exemplos de múltiplos. Por exemplo: 12 é um múltiplo de 3, pois:

3 x 4 = 12

São múltiplos de 3 os números 6, 9, 12, 15, 18, etc. Deixar claro que essa sequência segue um padrão, é infinita e crescente no conjunto dos naturais, pois um múltiplo é sempre um número maior ao fator que comparamos.

Para identificar se um número é múltiplo de outro, basta demonstrar que sua divisão deixa resto 0 (zero). Por exemplo, para sabermos se 16 é múltiplo de 4, basta fazer:

$$16 \div 4 = 4 \text{ (com resto zero)}$$

Portanto, 16 é múltiplo de 4.

- **Divisor:** Muito relacionado ao conceito de múltiplo, porém não é a mesma coisa. Se trata de um número que quando dividido por outro, deixa resto zero. Por exemplo, 5 é divisor de 20, pois:

$$20 \div 4 = 5 \text{ (com resto zero)}$$

Todo divisor é menor ou igual ao fator que estamos comparando. Também são chamados de fatores os divisores de um número. Por exemplo, São fatores de 16 os números 1,2,4 e 8.

Importante lembrar: qualquer número natural é divisor de si próprio e o número 1 é divisor de todos os números. Relembrar definição de número primo, que só possui dois divisores: o 1 (um) e ele mesmo. Por exemplo, 1 é divisor de 13, pois:

$$13 \div 1 = 13 \text{ (com resto zero)}$$

E 13 é divisor de 13, pois:

$$13 \div 13 = 1 \text{ (com resto zero)}$$

- **Relacionar múltiplo e divisor**: Mostrar que os dois possuem uma relação íntima de significado. Por exemplo, 20 é múltiplo de 5 e 5 é divisor de 20.

Aplicar atividade **"Os múltiplos do Calendário"** (folha entregue aos alunos em anexo - **Anexo 1**), para exercitar os conceitos de múltiplos, já dando uma introdução para o conceito de MMC. Abaixo, temos um exemplo de possível abordagem com a Questão 1:

*"Em **Janeiro**, sempre faz muito sol e dá vontade de tomar um sorvete gelado! Durante esse mês, um caminhão de sorvete passa na sua rua em **dias múltiplos de 3** e outro passa na rua do seu melhor amigo em **dias múltiplos de 5**. Quantos dias você vai conseguir tomar sorvete duas vezes?*

Conforme a imagem, é importante que os alunos utilizem cores para pintar o calendário e destacar aqueles números que, nesse caso, são múltiplos de 3 (amarelo), múltiplos de 5 (azul) e múltiplo dos dois (verde).

Essa atividade deve ser feita em sala, com o professor lendo os exercícios como se fossem histórias, de forma descontraída, interagindo com as experiências, raciocínios e respostas dos alunos.

3) Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

A palavra "comum" estabelece uma comparação entre 2 ou mais elementos, nesse caso, números. Por isso, nunca veremos o MMC de um número isolado, sempre se trata de uma comparação. Já a palavra "mínimo" mostra que é o menor desses números em comum encontrados. Portanto, o MMC é uma operação para encontrar o menor número positivo, excluindo o zero, que é múltiplo comum entre todos os números dados.

- Quando você usaria o MMC de dois números? No contexto do 6° ano, podemos dizer que uma aplicabilidade seria para encontrar um <u>denominador comum</u> para operar adição ou subtração com frações.

- **Encontrar múltiplos**: Revisite os conceitos trabalhados sobre múltiplos. É importante dar exemplos na lousa, e também deixar alguns exemplos para serem feitos individualmente. Apresente aos alunos os conjuntos de múltiplos de um certo número. Eles deverão relacionar esse conjunto com os resultados de uma tabuada.
    - Múltiplos de 2 = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14...}
    - Múltiplos de 10 = {10, 20, 30, 40, 50...}
    - Múltiplos de 15 = {15, 30, 45, 60, 75...}

- **Calcular MMC**: Para que seja mais descontraído, faremos um jogo.
    - Nesse momento monte duas equipes na sala (ex: direita e esquerda);
    - Peça para que cada equipe escolha dois números (entre 1 e 20, para que não sejam contas muito longas);
    - Fale para cada equipe escolher um representante para ir na lousa e escrever os 10 primeiros múltiplos desses dois números (no formato que ele achar conveniente), nesse momento é provável que vire uma competição, deixem que pensem em equipe;
    - Usando outra cor de giz (se possível), fale que cada equipe precisa circular todos os múltiplos que são comuns da equipe adversária e deixar em evidência qual deles é o MENOR dos múltiplos.
    - Depois da brincadeira, reveja tudo que foi feito e corrija os erros matemáticos e (se possível e necessário) recompense os alunos por terem participado.
    - Exemplo:
        - Equipe 1: Escolhe 8 e 6.
            - Múltiplos de 6 = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60}
            - Múltiplos de 8 = {8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80}
            - Múltiplos comuns = 24, 48
            - Mínimo múltiplo comum = 24

Uma questão que pode surgir é a seguinte: *"E se eu não usar o mínimo múltiplo, mas usar um intermediário?"*. Bom, nesse caso, é importante destacar que o fato de não se utilizar o mínimo múltiplo comum resulta em precisar simplificar a sentença em questão. Já o uso do mínimo não necessita de simplificação futura, já está na sua forma mais reduzida.

Como exemplificado na introdução deste plano, a decomposição de fatores é um dos métodos que se utilizam para encontrar o MMC e MDC de dois ou mais números inteiros. Contudo, o objetivo desse plano é tratar os conceitos de forma fundamental, sem relacioná-los diretamente com a fatoração.

4) Máximo Divisor Comum (MDC)

Assim como o MMC, a palavra "comum" estabelece uma comparação entre 2 ou mais números. Por isso, nunca veremos o MDC de um número isolado, sempre se trata de uma comparação. Já a palavra "máximo" mostra que é o maior desses números em comum encontrados. Portanto, o MDC é uma operação para encontrar o maior número positivo que é divisor comum entre todos os números dados.

O máximo divisor comum entre dois ou mais números naturais é o maior de seus divisores. Dois números naturais sempre têm divisores em comum.

- Quando você usaria o MDC de dois números? No contexto do 6° ano, podemos dizer que uma aplicabilidade seria para reduzir frações.

Relembrar regras de divisibilidade:

É DIVISÍVEL POR	SE	EXEMPLO SIM	EXEMPLO NÃO
2	o número é par	4	5
3	a soma dos dígitos é múltiplo de 3	24 → 2+4 = 6	25 → 2+5 = 7
4	os últimos dois dígitos são múltiplos de 4	224	225
5	o número termina em 5 ou 0	15	33
6	o número é divisível por 2 e 3	24	33
9	se a soma dos dígitos é um múltiplo de 9	81 → 8+1 = 9	78 → 7+8 = 15
10	se o número termina em zero	60	91

- **Encontrar divisores:** É importante fazer exercícios simples na lousa e depois deixar que os alunos façam individualmente para encontrar os divisores dos números.
  - Divisores de 2 = {1, 2}
  - Divisores de 10 = {1, 2, 5, 10}
  - Divisores de 15 = {1, 3, 5, 15}

- **Encontrar MDC**: Aplicar Atividade **"Encontrando o MDC" (Anexo 2)** como "aquecimento", já que os conceitos de MMC já foram estudados, deixar que eles explorem os significados do MDC, sempre acompanhando os resultados dos grupos. Baseado no exercício anterior de encontrar os divisores, resolva os três exercícios da atividade, explicando as suas particularidades e deixando claro que esse não é o único método:

  1. **Exercício 1.**
     Divisores de 12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

     Divisores de 18 = {1, 2, 3, 6, 9, 18}

     Perguntar e circular os divisores que são comuns: 1, 2, 3, 6. Perguntar qual o maior deles: 6. Portanto, 6 é o máximo divisor comum entre 12 e 18. Ou **m.d.c (12, 18) = 6.**

     Observe que existem outros, mas estamos na busca do maior!

  2. **Exercício 2.**
     Divisores de 12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

     Divisores de 24 = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

     Divisores comuns: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Máximo divisor comum: 12.

     m.d.c (12, 24) = 12 → Mostrar que quando os números são múltiplos entre si, o MDC é o menor deles.

  3. **Exercício 3.**
     Divisores de 15 = {1, 3, 5, 15}

     Divisores de 14 = {1, 2, 7, 14}

     Divisores comuns: 1. Portanto o máximo divisor comum é o 1.

Aplicar atividade **"Descobrindo Algumas Propriedades" (Anexo 3)**. Através dessa atividade, os alunos irão descobrir algumas propriedades que relacionam o MMC com o MDC. Realizar atividade em sala, com interação do professor nos grupos e discussão dos resultados no final da aula, formalizando as possíveis propriedades descobertas.

3. Conclusões

O plano proposto tem a intenção de introduzir os conceitos de Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum de uma forma mais interativa, entre professor e alunos e entre aluno e aluno. A intenção é incluir os alunos na construção do conhecimento, através das discussões coletivas propostas em cada atividade.

Além disso, como recurso didático ressalto a História da Matemática, que foi brevemente citada com o Papiro de Rhind, mas pode ser trabalhada em futuras atividades com a sala, pois além de dar um suporte contextual, é capaz de envolver e integrar conceitos de uma forma mais orgânica e menos mecânica. Para mim, a intenção de um professor é alcançar as o máximo de formas de aprendizagem possível, por isso ele busca trazer outros elementos ou abordagens para a sala de aula. Por exemplo, a "brincadeira" proposta com o Papiro em uma aula, para que se sintam no

Egito, é uma forma de transferir aos alunos a responsabilidade de construir um conceito e elaborá-lo para que futuramente, outras civilizações utilizem-no.

As dificuldades que os alunos podem encontrar nesse plano, ainda permeia as operações básicas. Ou seja, encontrar os múltiplos e os divisores pode ser um desafio, por isso é essencial que eles não se confundam entre esses conceitos e tenham eles claros, para encontrar o MMC e MDC. Além disso, podem encontrar dificuldades em aplicar esses conceitos em exercícios com expressões que contém frações, nesse momento é importante fazer a conexão entre o conceito ensinado e sua aplicação em exercícios com essa forma.

Em conclusão, esse plano busca trazer umas das ferramentas fundamentais da matemática para desenvolvimento de conceitos futuros na continuidade da educação básica.

Formas previstas de avaliação:

Realização e participação das atividades elaboradas em sala de aula.

Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 18 mai. 2020.

CLARENDON LEARNING. **Greatest Common Factor.** Disponível em: <https://clarendonlearning.org/lesson-plans/gcf-and-lcm/>. Acesso em: 19 mai. 2020.

CPALMS. **Factoring out the Greatest:** Lesson Plan. Disponível em: <https://www.cpalms.org/Public/PreviewResourceLesson/Preview/48678>. Acesso em: 20 mai. 2020.

MATEMÁTICA BÁSICA. **MMC: Mínimo Múltiplo Comum.** Disponível em: <https://matematicabasica.net/mmc-minimo-multiplo-comum/>. Acesso em: 19 mai. 2020.

PAULO. M. **MMC e MDC**, Álgebra I, UFPE. Disponível em: < https://www.passeidireto.com/arquivo/60074002/mdc-e-mmc>. Acesso em: 02 jun. 2020.

PINTO, F. **O Ensino do MMC e do MDC na Matemática**: um estudo sobre métodos e possíveis aplicações em sala de aula. Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, IFSP, São Paulo, 2012. Disponível em: <https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/120360/mod_resource/content/0/Felipe%20Marcos%20Pinto.pdf>. Acesso em: 19 mai. 2020.

PORTUGAL. **Conceito de Múltiplo**. 2014. Disponível em: <https://conceito.de/multiplo>. Acesso em: 19 mai. 2020.

SANTOS, I; BARRETO, I. **Matemática II p/ EspCEx** (Escola Preparatória de Cadetes do Exército). Estratégia Concursos. Disponível em: <www.estrategiaconcursos.com.br> , Acesso em: 20 mai. 2020.

SILVIA, T. **A criatividade no ensino do M.D.C.**: atividades práticas para a sala de aula. Monografia (Especialização) - UFRN. Caicó, RN, 2016. Disponível em <https://monografias.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/2842/1/TCC%20Terezinha%20de%20Medeiros%20Silva.pdf>. Acesso em: 19 mai. 2020.

ANEXOS

Anexo 1 - ATIVIDADE: "OS MÚLTIPLOS NO CALENDÁRIO"

Instruções:

- Atividade em duplas;
- Material: canetinhas hidrográficas coloridas;
- Utilize as canetinhas para circular os múltiplos de cada questão, use as cores.

CALENDÁRIO 2020

Siga as instruções do professor para responder às questões abaixo.

1) Em **Janeiro**, sempre faz muito sol e dá vontade de tomar um sorvete gelado! Durante esse mês, um caminhão de sorvete passa na sua rua em **dias múltiplos de 3** e outro passa na rua do seu melhor amigo em **dias múltiplos de 5**. Quantos dias você vai conseguir tomar sorvete duas vezes?
R: 2 dias (15 e 30).

2) **Outubro** é o mês das crianças. Durante esse mês, seus pais deixam você dormir tarde em **dias múltiplos de 6** e também deixam você ver filmes de terror em **dias múltiplos de 3**. Quais dias você poderá ficar acordado até tarde e ver um filme de terror? Terá algum dia que eu posso dormir tarde, mas não posso ver um filme de terror? Por quê?
R: Dias 6, 12, 18, 24 e 30. Não, pois 6 é múltiplo de 3.

3) Em **Abril**, Você decide que irá fazer exercícios e correr na rua todos os **dias múltiplos de 4**. Porém, a previsão do tempo diz que irá chover todos os **dias múltiplos de 5**. Quais dias do mês você irá correr na chuva?
R: Apenas dia 20.

4) **Fevereiro** é o mês do carnaval e você pode usar fantasias na escola em **dias múltiplos de 3.** Além disso, todos os **dias múltiplos de 4** são dias de prova na sua escola. Sabendo que você só tem aula em dias úteis da semana, quais dias você fará prova fantasiado?
R: Dias 12 e 24.

5) Durante o mês de **Julho** a plantações de morango começam a frutificar. Então, os morcegos frutíferos aparecem nas plantações em **dias pares** e a cada dia que aparecem, **comem 3 morangos**. Mas um grande cachorro toma conta da plantação em **dias múltiplos de 5** e é capaz de espantar esses morcegos. No final do mês, quantos morangos um morcego frutífero terá comido?
R: Ao todo são 15 dias pares, menos 5 dias múltiplos de 5 (10, 20, 30), restam 12 dias. 12 x 3 = 36 morangos.

Anexo 2 - ATIVIDADE "ENCONTRANDO O MDC"

Instruções:
- Atividade em duplas;
- Resolva os exercícios abaixo e deixe claro qual seu raciocínio, chame o professor para dúvidas.

Exercícios: Pense no significado que estudamos de divisor e tudo que aprendemos sobre MMC. Baseado nisso, encontre o Máximo Divisor Comum (MDC) dos números abaixo:

1. MDC de 12 e 18
R: m.d.c (12, 18) = 6.

2. MDC de 12 e 24
R: m.d.c (12, 24) = 12.

3. MDC de 14 e 15
R: m.d.c (14, 15) = 1.

Anexo 3 - ATIVIDADE "DESCOBRINDO ALGUMAS PROPRIEDADES"

Instruções:
- Atividade em duplas ou trios;
- Complete a tabela abaixo, sem apagar as contas que você fez para cada exemplo;
- Responda as questões com seus colegas.

Tabela 1: MMC e MDC de dois números

a	b	M = m.m.c.(a, b)	D = m.d.c. (a, b)	a x b	M x D
3	**5**	15	1	15	15
4	**8**	8	4	32	32
14	**21**	42	7	294	294
28	**32**	224	4	896	896
72	**168**	504	24	12096	12096

Questões:

1) O que você observou preenchendo essa tabela? Explique usando exemplos da tabela.
   R: a x b é sempre igual ao MMC x MDC (possibilidade).

2) Por que vocês acham que isso acontece?
   R: (Livre)

3) Portanto, qual a relação que o MMC e o MDC tem com os números a e b?
   R: Formalizar propriedade “Ao multiplicar o MMC de dois números pelo máximo divisor comum (MDC) entre eles, o resultado obtido é o produto desses números”.

4) Através da tabela, você consegue descobrir outras formas de calcular o MMC e o MDC sem usar a decomposição ou sem encontrar os fatores?
   R: Usando a propriedade, por exemplo 28 x 32 = 896, se o MDC é 4, então MMC = 896 ÷ 4 = 224.

Ao terminarem, compartilhem os resultados com os colegas.

A ONIPRESENÇA DA MATEMÁTICA	
Autores: Paulo Henrique Souza Nakamura	**Turma:** PEM I **Data:** 24/06/2020
Tema tratado: Transformações geométricas	
Ano escolar: 7º ano	
Ementa: Noções introdutórias sobre as transformações geométricas de translação, reflexão e rotação. Aplicações dessas transformações em áreas fora da matemática: artes, física (óptica) e astronomia.	
Objetivos: Despertar nos alunos a noção de que a matemática se faz presente em muitas outras áreas do conhecimento e que ela pode ser empregada para resolver diversos problemas.	
Recursos empregados: Metalofone, espelho mágico, desenhos impressos, computadores	

Descrição de todas as atividades a serem apresentadas:

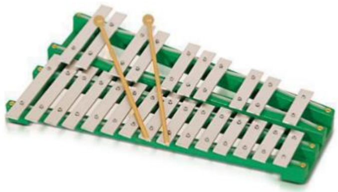
Descrição de situação 1:

Objetivos: Apresentar o instrumento metalofone, aproveitando para destacar alguns aspectos básicos do som e da música.

Metodologia: Atividade exploratória

Desenvolvimento: O compositor alemão Carl Orff (1895-1982) criou um método de alfabetização musical baseado em instrumentos de percussão, por serem relativamente fáceis de tocar e de serem acompanhados por movimentos corporais, o que estreita o envolvimento dos alunos com a música. Nesta aula, o professor irá apresentar à turma o metalofone (neste plano de aula, utilizou-se o modelo cromático com 25 teclas – de Sol a Sol – da marca Jog-Vibratom), um dos instrumentos recomendados por Orff, com teclas feitas de metal, as quais são percutidas utilizando-se baquetas. Deve-se tocar com uma baqueta em cada mão.

Figura 1: metalofone sopranino 25 teclas (G5 a G7)

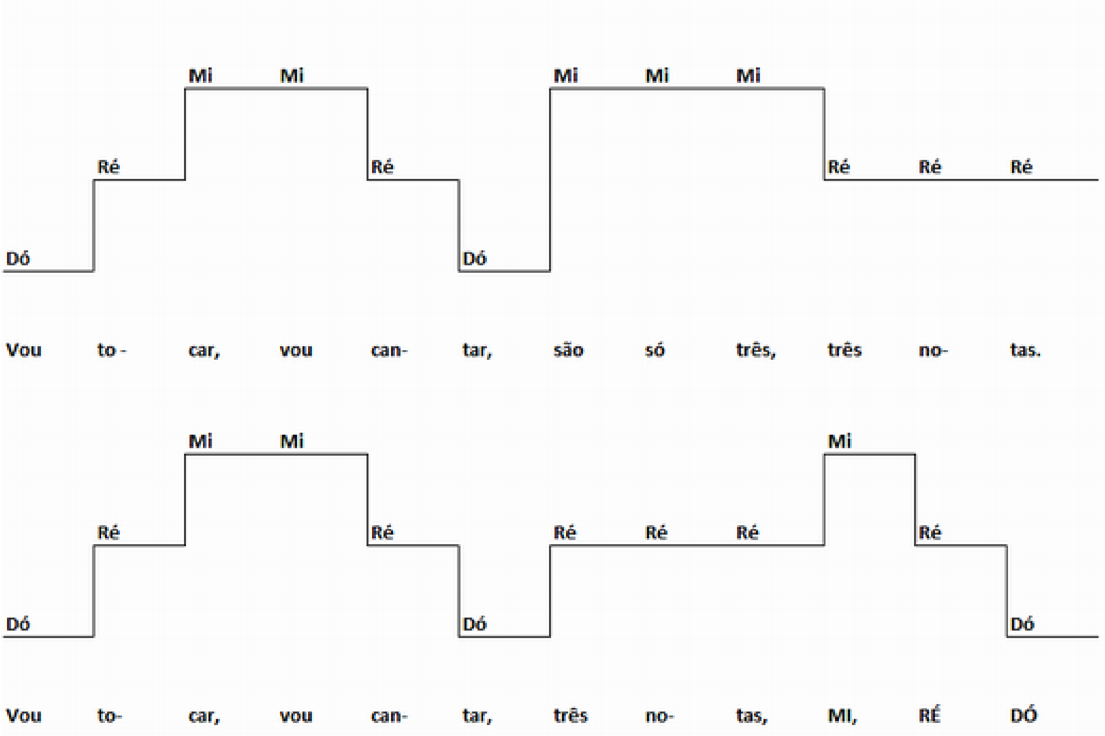


Fonte: http://www.jogvibratom.com.br/metalofones.php

O professor deve aproveitar para explicar o que é a altura do som. Trata-se da propriedade que indica se um som é mais grave ou mais agudo do que outro (é uma propriedade relativa). No metalofone, quanto mais à esquerda estiver uma tecla, mais grave será a nota produzida por ela; e, quanto mais à direita, mais aguda será a nota correspondente. Entre duas teclas consecutivas quaisquer do metalofone, há uma distância (em termos das alturas das notas produzidas por cada uma) de um semitom, ou seja, uma tecla qualquer produz uma nota 1 semitom mais aguda do que a tecla imediatamente à sua esquerda.

Além da altura das notas que compõe uma música, outra característica importante é a duração de cada uma delas (e dos momentos de silêncio), já que a música é uma arte que acontece no tempo. Existem muitos outros parâmetros que podem ser estudados, mas, para o escopo desta aula, é suficiente representar a altura das notas e a duração das notas e dos silêncios de uma música. Os músicos representam isso através de uma notação chamada partitura. Todavia, em virtude do caráter introdutório desta aula, é conveniente adotar uma notação simplificada. Uma tal notação, em forma de "escada", foi desenvolvida pelo brasileiro Antônio de Sá Pereira. Um exemplo de música escrita nesse formato pode ser visto na figura 3.

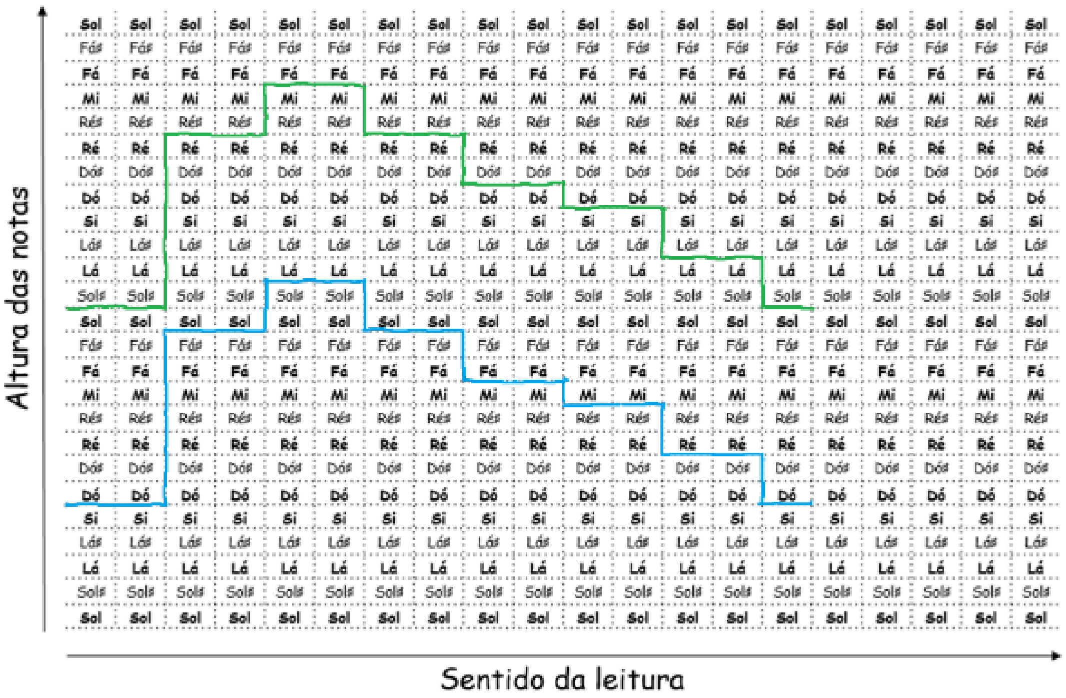
Figura 2: "Canção das três notas musicais" escrita na notação de Sá Pereira



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=8300

Para que os alunos, além de lerem, possam também escrever suas próprias músicas, recomenda-se o uso da planilha exibida na figura 4 - inspirada na notação de Sá Pereira.

Figura 3: Planilha para registrar músicas



Fonte: elaboração própria (2020)

A figura mostra a canção “Brilha, brilha estrelinha” (uma canção folclórica francesa) escrita de duas maneiras diferentes (em azul e em verde). Trata-se da mesma música nos dois casos, há apenas uma mudança uniforme na altura das notas de uma versão para a outra. Deve-se notar que as notas marcadas em verde correspondem às notas azuis transladadas oito unidades para cima (ou, equivalentemente, as notas em azul correspondem às verdes transladadas oito unidades para baixo). O processo de reescrever uma música, alterando a altura de suas notas, chama-se transposição, e é um expediente muito utilizado por instrumentistas que desejam executar uma música contendo notas fora do alcance de seu instrumento.

Uma sugestão é que o professor apresenta à turma uma planilha como a da figura 4, em que já esteja escrita uma música, e peça que eles a executem no metalofone. Em seguida, os alunos seriam convidados a reescrevê-la em alturas diferentes, mediante uma translação, sempre executando cada nova versão a fim de comprovar que o efeito produzido é sempre o mesmo.

Outro problema que pode ser proposto é o seguinte: dada uma música, é possível começar a tocá-la no metalofone (lembrando que o instrumento tem apenas 25 teclas) a partir de determinada tecla/nota? Por exemplo: a música escrita na figura 3 não poderia começar pelo dó mais agudo do instrumento, pois nesse caso faltariam notas mais agudas para continuar a execução.

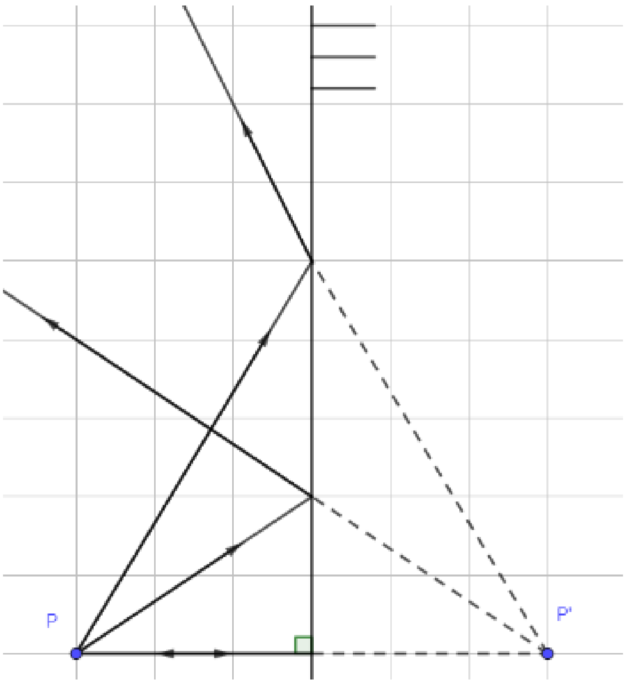
Descrição de situação 2:

Objetivos: Comprovar experimentalmente as leis que regem a reflexão num espelho plano

Metodologia: Atividade em grupo

Desenvolvimento: Ao colocarmos um objeto pontual luminoso diante de um espelho plano, os raios dele provenientes serão refletidos, isto é, retornarão ao meio original. Nesse processo, duas leis básicas são observadas. A primeira lei afirma que o raio incidente, a normal (levantada do ponto de incidência) e o raio refletido são coplanares; já a segunda lei garante que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Consequentemente, o prolongamento dos raios refletidos encontrar-se-ão num mesmo ponto, chamado imagem do objeto. Esse ponto tem a propriedade de que ele e o objeto são simétricos em relação ao espelho - se encontram à mesma distância dele.

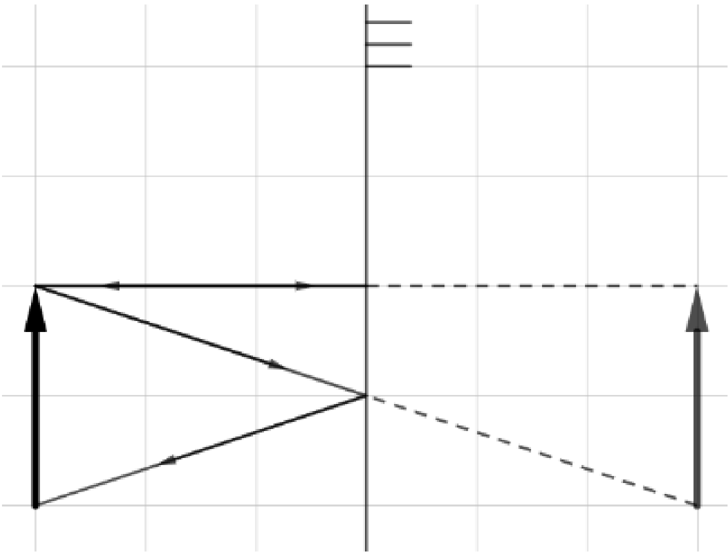
Figura 4: reflexão de um ponto no espelho plano



Fonte: elaboração própria (2020)

Se o objeto for extenso, ele e sua imagem também serão simétricos em relação ao espelho. Em particular, o tamanho de ambos será o mesmo. É interessante que o professor frise, nesse momento, que um objeto qualquer e sua reflexão em relação a um espelho plano dão a ideia de figuras congruentes.

Figura 5: reflexão de um objeto extenso no espelho plano



Fonte: elaboração própria (2020)

Para que os alunos comprovem experimentalmente as leis de reflexão, recomenda-se o uso do "espelho mágico", ou seja, um espelho para copiar desenhos, como o mostrado na figura.

Figura 6: espelho mágico

Fonte: elaboração própria (2020)

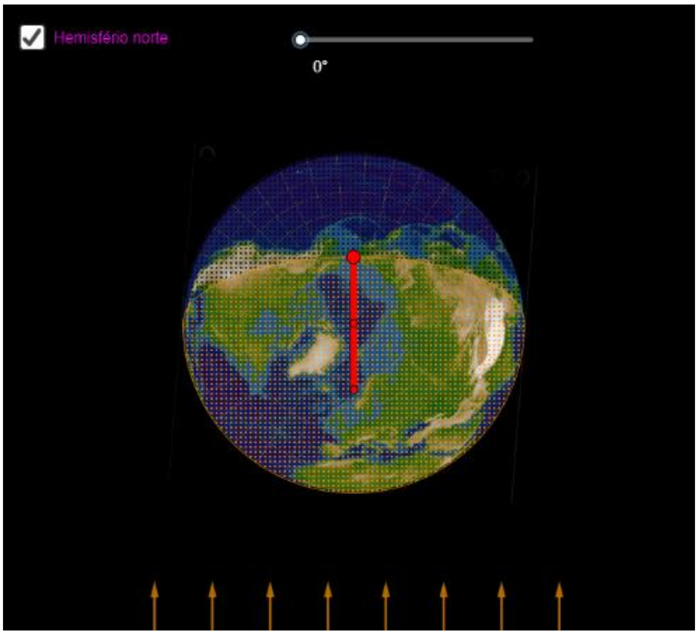
É interessante que a turma seja dividia em pequenos grupos e que cada grupo receba um espelho emprestado e um desenho impresso. Depois de montar o espelho de tal maneira que ele fique aproximadamente perpendicular à mesa, os grupos irão copiar o desenho recebido. Terminada a cópia, os alunos deverão sobrepor ela e o desenho original para constatar que as duas figuras são congruentes. Algumas diferenças certamente irão existir devido ao espelho não ficar totalmente perpendicular, à falta de firmeza da mão etc.

Descrição de situação 3:

Objetivos: Explicar o movimento de rotação da Terra mediante um objeto de aprendizagem
Metodologia: Atividade exploratória em um objeto de aprendizagem (no computador)

Desenvolvimento: Inicialmente, o professor deve recordar a turma sobre o movimento de rotação da Terra. Trata-se do "giro" que o planeta executa em torno do eixo que passa pelos polos Norte e Sul. Ele faz com que, constantemente, metade da superfície terrestre seja iluminada diretamente pela luz do Sol, passando pelo dia, enquanto na outra metade ocorre a noite. A Terra leva cerca de 24 horas para completar uma volta em torno de seu eixo.
Para facilitar o entendimento dos alunos, sugere-se o uso do objeto de aprendizagem disponível no link: https://www.geogebra.org/m/d75y5fmx. Nele, é apresentada uma representação do planeta em que é possível simular a rotação da Terra. O professor deve solicitar aos alunos que interajam com o objeto, movimentando o controle deslizante que é disponibilizado, a fim de que a representação da Terra se movimente.

Figura 7: representação da Terra



Fonte: elaboração própria (2020)

Em seguida, o professor deve chamar a atenção para o fato de que a inclinação do eixo de rotação da Terra, de aproximadamente 23,5°, em relação ao plano de sua órbita - o chamado plano da eclíptica -, faz com que a inclinação dos hemisférios em direção ao Sol mude no decorrer do ano. Esse fenômeno dá origem às quatro estações. O verão, por exemplo, ocorre quando um dos hemisférios se inclina mais diretamente para o Sol, consequentemente recebendo os raios por mais tempo – os dias são mais compridos do que as noites – e com maior intensidade, ao mesmo tempo em que o outro hemisfério (onde ocorre o inverno) recebe os raios por menos tempo e de maneira suavizada. O verão é precedido pela primavera e o inverno, pelo outono. Na primavera, observa-se um aumento gradual da temperatura e da duração do dia, e no outono, o contrário disso. Isso pode ser simulado no objeto de aprendizagem movimentando-se o botão vermelho.

Por fim, sugere-se um exercício relacionando a rotação da Terra com a transformação geométrica de rotação. Primeiramente, deve-se notar que a rotação do planeta em torno de seu eixo corresponde, no objeto de aprendizagem, pela rotação do disco que representa a Terra em relação ao seu centro. Admitindo-se que uma volta completa (360°) dure 24 horas, pergunta-se: quanto tempo é gasto para completar uma volta de: 30°? 45°? 60°? 90°? 180°? 270°? Uma volta e meia? E, inversamente: em x horas, qual é o valor do ângulo correspondente? Esse exercício pode ser resolvido facilmente fazendo regra de três. Também podem ser emprestados geoplanos circulares para facilitar a resolução desse exercício.

Formas previstas de avaliação: Recomenda-se que a avalição seja em função do interesse e esforço demonstrados por cada aluno na execução das atividades propostas.

Referências

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; BONJORNO, V.; RAMOS, C. M. Física completa. 2. ed. São Paulo: Editora FTD, 2001.

INVESTIGAÇÃO NA CORRIDA DAS ÁREAS	
Autores: Katarina Duarte Fernandes	**Turma:** PEM.I matutino **Data:** 04/06/2020
Tema tratado: Equivalência de área de figuras planas	
Ano escolar: 7º ano	
Ementa: Unidade de área, área de retângulos, área de triângulos, decompor figuras planas em triângulos e retângulos para o cálculo da área.	
Objetivos: Desenvolver a percepção de que uma figura pode ser decomposta em outras com as quais se saiba trabalhar, no caso retângulos e triângulos; Realizar medições e representá-las em menor escala mantendo a proporção entre os lados; Resolver uma situação-problema na qual é preciso calcular a área de figuras planas decompondo-as em retângulos e triângulos.	
Recursos empregados: Figuras construídas com fita adesiva branca ou colorida no chão do pátio ou outro local que possa ser realizada a atividade; Vídeo com os primeiros 04:08 minutos do episódio Planaltópolis do desenho animado Cyberchase; Projetor ou televisão para passar o vídeo; Lousa e giz/quadro branco e caneta; Réguas; Papel quadriculado para os grupos.	
Descrição de todas as atividades a serem apresentadas: **1.Introdução** São várias as dificuldades que os alunos da escola básica podem ter ao se depararem com a tarefa de resolução de problemas, principalmente, quando envolve os conceitos de Geometria. Proença e Stefani (2018) verificaram que seus alunos de sétimos e oitavos anos não possuíam domínio sobre os conceitos de área e perímetro, principalmente ao fato de não relacioná-los a resolução de problemas.	

A abordagem de resolução de problemas como ponto de partida no ensino aparece explicitada no PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), assim sendo, estimula-se que novos conteúdos sejam estimulados por situações-problema iniciais para depois se introduzir de modo mais formal os conceitos matemáticos necessários, sendo um trabalho de exploração das resoluções de situações-problema.

Tendo isso em mente este plano de aula propõem uma tarefa de resolução de problemas para a partir da exploração da situação-problema introduzir o conceito de equivalência de áreas no cálculo de área de figuras planas decompostas em retângulos e triângulos. Dividido em 3 momentos esse plano de aula prevê a utilização de 2 aulas de 45 minutos. A primeira para a revisão dos conceitos prévios e exploração da situação-problema e a segunda para finalização da resolução do problema e formalização do conteúdo.

2.Atividades a serem desenvolvidas

2.1. Descrição de situação 1

Objetivos: Discutir o conceito de área e cálculo da área do retângulo e do triângulo.

Metodologia: Aula expositiva com atividades de revisão de conhecimentos prévios sobre área.

Desenvolvimento: Nesse primeiro momento da aula a proposta é realizar uma breve revisão do conceito e do cálculo da área de triângulos e retângulos e da unidade de área. Em sala de aula com os alunos já separados em pequenos grupos o professor deverá perguntar o que área de uma figura plana. Após os alunos responderem, o professor pode desenhar na lousa diferentes quadrados, retângulos e triângulos que os alunos receberão desenhados em papel quadriculado, e dado o valor dos lados e altura do triângulo chegar tanto na visualização da unidade de área (um quadrado unitário da folha quadriculada) como no cálculo da área dessas figuras (Exemplo na Figura 1).

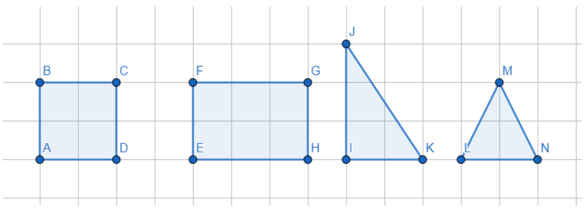


Figura 1: Quadrado, retângulo e triângulos quadriculados para revisão do conceito de área.

Tópicos:

- Unidade de área.
- Área Quadrado= lado (L) x lado (L)=L^2
- Área Retângulo= base (b) x altura (h)=bh
- Área Triângulo= (base (b) x altura (h))/ 2 = bh/2

Nessa revisão é importante que os alunos consigam visualizar e relembrar que um quadrado pode ser dividido em 2 triângulos para terem em mente a noção que é possível decompor uma figura em outras, que será usado na situação seguinte para resolverem a situação-problema a ser proposta.

2.2. Descrição de situação 2:

Objetivos: Perceber que é possível calcular a área de diferentes figuras planas dividindo-as em triângulos e retângulos.

Metodologia: Trabalho em grupo com resolução de problemas.

Desenvolvimento: Após revisar os conceitos básicos de unidade de área e área de retângulos e triângulos, os alunos assistirão os minutos iniciais do episódio *Planaltópolis* do desenho animado *Cyberchase - a corrida do espaço*, que irá contextualizá-los para a situação-problema que será proposta a seguir.

Situação-problema:

"O episódio Planaltópolis mostra uma corrida por terras no velho oeste, onde cada um dos competidores dessa corrida deve conseguir um pedaço de terra para si próprio. Obviamente todos querem conseguir o maior terreno que esteja disponível, mas existe uma lei que diz que ninguém pode ter um terreno maior que o da juíza Trudie.

No desenho a xerife Judie suspeita que um dos competidores descumpriu a lei com um terreno maior que o da juíza. Seu grupo deve ajudar a xerife de Planaltópolis a descobrir se algum dos competidores descumpriu essa lei.

Para isso vocês verão no pátio o traçado dos terrenos da Juíza e de 5 competidores que serão investigados.

Descubram a área do terreno da juíza. Quem conseguiu o maior terreno possível? Algum dos competidores descumpriu a lei e pegou um terreno maior que o da juíza?"

Os alunos já divididos em 5 grupos e informados da situação problema devem ir para o pátio ou outro local amplo da escola, onde encontrarão no chão figuras 6 desenhadas com fita no chão, uma delas destacada, desenhada com uma cor diferente (Figura 2) que representam os terrenos, o da juíza é o de cor diferente e os alunos serão informados disso assim que chegarem no local. Cada grupo receberá folhas de papel quadriculado, fita métrica e régua. Para saberem as medidas das figuras os alunos precisarão realizar as medidas.

Como é possível visualizar na Figura 2, os terrenos devem ser feitos de modo que um dos terrenos tenha exatamente a mesma área do da juíza, dois com uma área maior que o da juíza e dois com área menor. Quatro dos terrenos traçados no formato de retângulos ou triângulos e dois no formato de figuras que podem ser decompostas nessas outras.

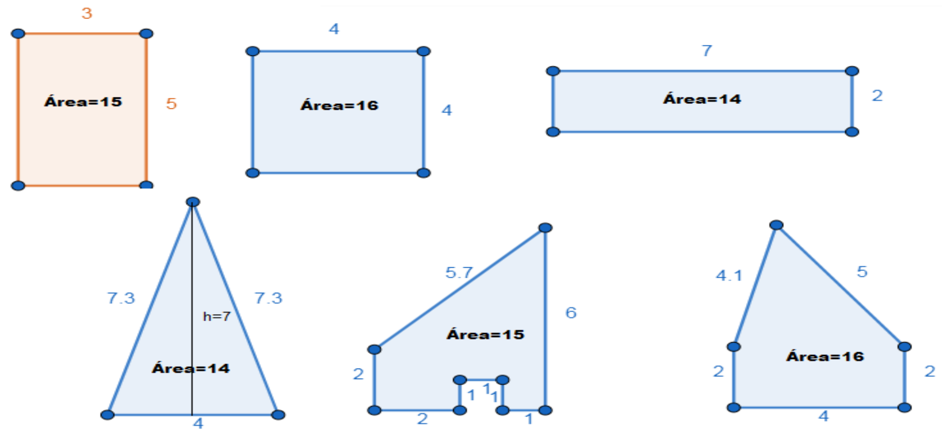


Figura 2: Figuras planas dos terrenos da situação problema. O terreno em vermelho é o da juíza, os em azul dos competidores.

Nesse momento, após ter certeza que os grupos entenderam a tarefa proposta, o professor deixará que cada grupo pense em modos de resolver o problema proposto, podendo mediar, tirar dúvidas e fazer sugestões para que *"usem o papel quadriculado para representar os terrenos em tamanho reduzido mas respeitando as medidas"*, *"lembrar que é possível dividir um quadrado em dois triângulos, será que é possível dividir a figura do terreno em outras conhecidas?"*. Tais sugestões devem ser feitas sempre dando a oportunidade dos grupos explorarem e chegarem em suas próprias conclusões com a mediação do professor.

2.3. Descrição de situação 3:

Objetivos: Formalizar o conteúdo de cálculo de área a partir da decomposição de figuras planas em retângulos e triângulos.

Metodologia: Exposição de conclusões da exploração da situação-problema pelos grupos, discussão a partir dessa exposição. Aula expositiva do professor a partir do que foi mostrado pelos alunos, para formalizar o conteúdo.

Desenvolvimento: Nessa aula, com os alunos de volta à classe os 5 grupos devem se reunir novamente e relembrar o que fizeram na atividade no pátio, as conclusões que chegaram e como chegaram nessas conclusões, e então cada grupo deve compartilhar com os colegas suas descobertas e as respostas que chegaram. Em seguida o professor fará observações e correções pertinentes. Após finalizar a discussão, o professor mostrará que sabendo calcular a área de retângulos e triângulos se consegue calcular a área de outras figuras planas que podem ser decompostas nessas mais simples conhecidas.

Formas previstas de avaliação:

Os alunos serão avaliados continuamente das seguintes formas:

- Participação no trabalho em grupo durante a resolução do problema proposto;
- Entrega do grupo da resolução do problema com o passo a passo de como chegaram nela;
- Participação no momento de expor para os colegas as conclusões e discussão final sobre a resolução do problema feita pelos outros grupos.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Fundamental.** Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em 04 de jun. de 2020.

BRASIL. Secretaria de ensino fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: SEF/MEC, 1998.

CARDOSO, V. C.; PAZUCH, V. **Cadernos de práticas de ensino de matemática da UFABC [recurso eletrônico] - vol.1: planos de aulas para o ensino médio /** Santo André, SP: Universidade Federal do ABC, 2019

PLANALTÓPOLIS (Temporada 1, ep. 5). **Cyberchase** [seriado]. Direção de Larry Jacobs. Produtora Nelvana, 2002. Youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=lThKJOs2GYM&t=248s >. Acesso em 04 de jun. de 2020.

PROENÇA, M.C.; STEFANI, A. **Resolução de problemas de área e perímetro: análise dos conhecimentos e dificuldades de alunos dos anos finais do ensino fundamental.** Revista Valore, Volta Redonda, 3 (Edição Especial): 353-363., 2018

MDC – UMA INTERPRETAÇÃO VISUAL DO ALGORITMO DE EUCLIDES	
Autor: Augusto Mendes Duarte	**Turma:** Noturno **Data: 31/08/2020**
Tema tratado: Introdução ao algoritmo de Euclides para cálculo do MDC utilizando contextualização histórica e números figurados	
Ano escolar: 7ºAno	
Ementa: Máximo Divisor Comum, Algoritmo de Euclides	
Objetivos: Compreender intuitivamente o conceito de máximo divisor comum.	
Recursos empregados: *Slides* para projeção, lousa, giz, fichas, palitos	

Descrição de todas as atividades a serem apresentadas:

Como uma introdução à temática do máximo divisor comum, esta aula tem intenção de explorar conceitos de forma intuitiva sem demasiada formalidade. A partir de uma introdução histórica e com recurso aos números figurados, utiliza-se de fichas para representar os processos do Algoritmo de Euclides. Esta aula pode ser considerada uma continuação do plano de aula de Divisibilidade contextualizada com os pitagóricos e números figurados, utilizando diversos conceitos lá explorados.

Descrição de situação 1:

A intenção desta primeira situação é relembrar os alunos sobre o que foi estudado sobre divisibilidade a partir da contextualização com os pitagóricos. A noção de paridade e divisibilidade, importantes para os pitagóricos e neopitagóricos, assim como suas representações em números figurados, precisam ser relembradas para a compreensão desta aula. A vantagem de oferecer ao aluno uma compreensão intuitiva reside na capacidade de se explicar o funcionamento do Algoritmo de Euclides, em vez de somente orientar os alunos a decorar o processo. Entre as aplicações deste algoritmo, está a possibilidade de demonstração de incomensurabilidade. No ensino superior, o Algoritmo de Euclides desempenha um papel importante na Teoria Aritmética dos Números, como o de explicar diversas propriedades da operação módulo e sua relação com a identidade de Bézout.

Objetivos: Relembrar o estudado sobre os pitagóricos e números figurados. O tempo médio de explicação não supera 20 minutos.

Metodologia: Trata-se de uma sequência expositiva com ocasionais perguntas aos alunos para incentivar a interação. Para não tornar a apresentação entediante, é recomendável que os *slides* contenham diversas imagens e animações. Aproveitando a situação interdisciplinar, pode-se continuar a contextualização com a disciplina de História.

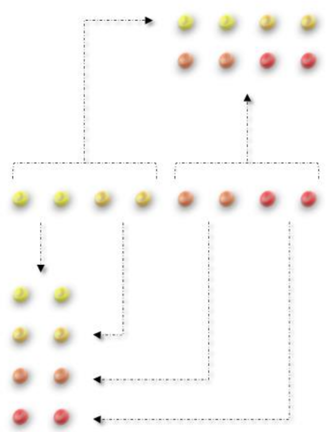
Desenvolvimento: De acordo com Roque (2012), uma característica importante da matemática pitagórica era a aritmética de pedrinhas, os chamados “números figurados”. Tratam-se de uma quantidade de objetos cuja disposição assume diferentes figuras.

Fonte: autor.

Figura 1 – Os números quadrados - um exemplo de números figurados.

Em sua qualidade de seita mística, a doutrina pitagórica era uma mistura de adoração religiosa das propriedades numéricas ao mesmo tempo em que contemplava estudo e classificações similares às atuais.

Apesar das grandes diferenças em relação a matemática contemporânea, diversas noções trabalhadas por eles ainda perduram até hoje. A ideia de divisibilidade, por exemplo, ocupa um lugar especial. Através da alternância entre a disposição retilínea e quadrilátera de pedrinhas, por exemplo, têm-se uma representação visual da divisibilidade.

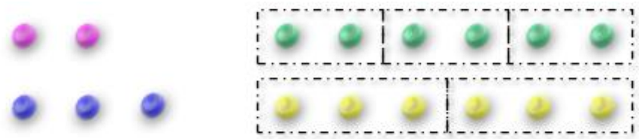


Fonte: autor.

Figura 2 – O número 8 retilíneo sendo dividido em partes de 2 e partes de 4.

Conforme Heath (1921), números na forma de quadriláteros eram chamados de números alongados. Para transformar um número em forma de linha em um retângulo, é necessário dividi-lo em partes iguais. Por conseguinte, se um número não puder se tornar um número alongado, ele não pode ser dividido. Este tipo de número é chamado de “primo”.

Por vezes, na Grécia antiga, se um número divide outro dizia que ele “mede” o número maior. Isto é, o número menor é uma medida do número maior.

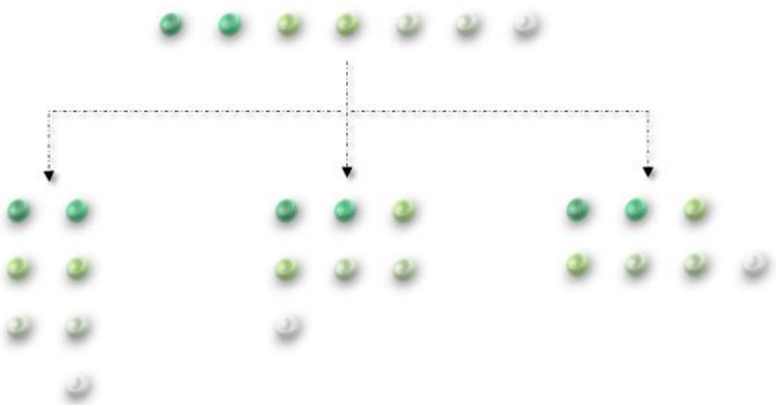


Fonte: autor.

Figura 3 – Tanto 2 quanto 3 são medidas do número 6. Ambos medem 6.

Medir se resume a tomar uma quantidade como medida, e ver quantas dela cabem em um número maior. Se um número pode ser medido por outro, ele pode ser dividido por ele.

Existe, contudo, um número que mede todos os outros. É o número 1. Em partes devido a esta propriedade, este era um número especial para os pitagóricos. Para eles, na verdade, como o um não consiste em uma pluraridade, não era considerado um número. Era simplesmente a Unidade. Conforme discutido na aula anterior, esta ideia tem relação com a cosmogonia dos pitagóricos – todo número é uma coleção de “uns”, logo o Um seria a origem de todos os demais. Como todas as coisas podem ser contadas, tudo se resume a números, e o Um seria portanto a origem de toda a existência.



Fonte: autor.

Figura 4 – Exemplo de uma tentativa de divisão do número primo 7. Não é possível completar os retângulos de partes de 2, 3 ou 4.

Por consequência, os primos são um tipo especial de pluralidade. Afinal, seus únicos divisores são o próprio um. Isto significa que eles não podem ser medidos por nenhum número (no sentido dos pitagóricos), somente servem como medida para outros. Daí seu nome que significa “primeiro”, “primordial”. Segundo Heath (1921), por este motivo, estes também eram chamados de retilíneos ou lineares – afinal não podem formar retângulos.

Descrição de situação 2:

Objetivos: Permitir aos alunos que através do manuseio dos números figurados vão além do conceito de divisibilidade, alcançando e compreendendo o conceito de Máximo Divisor Comum.

Metodologia: Após a breve explicação contextualizada sobre medidas, os alunos são divididos em grupos e se sentam preferencialmente no chão, para terem à sua disposição espaço para trabalhar com os números figurados. Fichas e palitos são distribuídos aos grupos. A aula continua expositiva e contextualizada com a matemática grega e os números figurados, e conforme explicações sobre os conceitos são oferecidas, é pedido que os alunos os explorem com as fichas. Esta etapa é programada para durar 40 minutos.

Desenvolvimento:

a) Medida: No mundo atual, qual a importância das medidas? Pergunta-se a opinião dos alunos. Para que servem? Existem diferentes unidades de medidas? Por que existem tantas? Podemos exemplificar a diversidade com diversos aspectos da sociedade humana. Por exemplo, por que existem tantas línguas, todas diferentes?

Apesar de diferentes, os diversos idiomas expressam conceitos bem similares. Temos uma palavra para “pessoa”, por exemplo, em cada um dos idiomas do mundo, e em quase todos eles a palavra é diferente. Um dos motivos para isso é que a criação dos idiomas é atrelada às culturas dos povos em que se inserem. Além da pronúncia diferente, cada povo oferece uma acepção diferente do que seria uma “pessoa”.

A escrita da língua, o que chamamos de “notação”, segue a mesma rota. Grande parte dos povos ocidentais usam o alfabeto com o que escrevemos. Apesar disso, a língua árabe ou a chinesa, por exemplo, usam outros tipos de escrita[1]. A dos árabes é chamada de *abjad*. Em sua forma mais tradicional, esta escrita utiliza apenas consoantes. Cnsg lr st? A dos chineses, por outro lado, é uma escrita logográfica[2], o que essencialmente significa que cada letra é originalmente um desenho que transmite um conceito, seja concreto ou abstrato. É parecido com o que fazemos na atualidade ao escrever com *emojis*.

Apesar de ser para um objetivo tão semelhante – a escrita, capa povo escolheu uma maneira diferente para concretizar esta ação. Isto se refere a tudo: às leis, aos costumes, à religião, às técnicas de plantação, caça, guerra...

Uma outra razão para tais diferenças é a necessidade, e isto é bem exemplificado com as medidas. Pergunta-se aos alunos se eles já ouviram falar em anos-luz. Esta medida se trata de uma forma de se medir distâncias no espaço sideral. A nossa galáxia, por exemplo, mede em torno de 100 000 anos-luz. A estrela mais próxima além do Sol, Proxima Centauri, fica a por volta de 4 anos-luz de distância. Pergunta-se aos alunos se eles acham que seria uma boa ideia medir em anos-luz a distância de casa até a escola. Se de fato medíssemos, ficaria algo em torno de 0,0000000000002114 anos-luz. Imagine colocar este tanto de zeros toda vez que vamos medir uma distância! Este exemplo mostra que existem medidas que são melhores para umas coisas, e outras que são mais adaptadas a outras. É mais conveniente medir a distância da casa até a escola em quilômetros, por exemplo.

Vejamos outro exemplo mais próximo da realidade. Suponha que você bebeu 6 copos de suco em uma festa. Você, por exemplo, sabe dizer que bebeu seis copos de suco. Portanto, você pode medir o tanto que você bebeu em copos. Se você souber quantos ml tem em cada copo, é possível medir o total também em ml. Qual é mais confortável? Sem dúvida dizer, informalmente, apenas a quantidade de copos. Mas quando um médico diz que é recomendável beber mais de 2 litros de água por dia, vemos que em certas ocasiões é bom medir em litros ou em ml. As medidas existem para se adaptar a diversas situações.

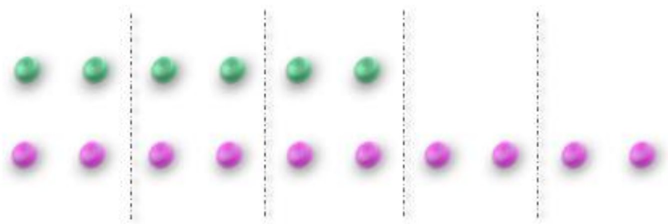


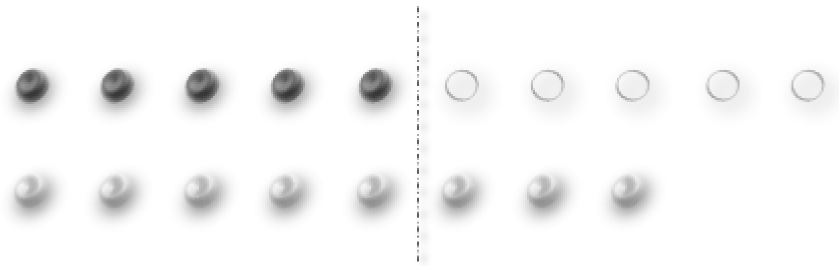
Figura 5 – O número 2 mede tanto 6 quanto 10.

Fonte: autor.

A capacidade principal de toda medida é que ela pode ser utilizada em várias situações diferentes. Por exemplo, quilômetros servem para medir a distância de casa até a escola assim como servem também para medir a distância de São Paulo a Santos. Podemos então, por exemplo, medir dois números com o mesmo valor.

b) Investigação: Sabemos que o número 1 mede todos os outros números. Ele é o menor divisor de todos. Se temos dois números, uma pergunta mais interessante seria: qual a maior medida comum de ambos? Qual o maior número que mede os dois ao mesmo tempo?

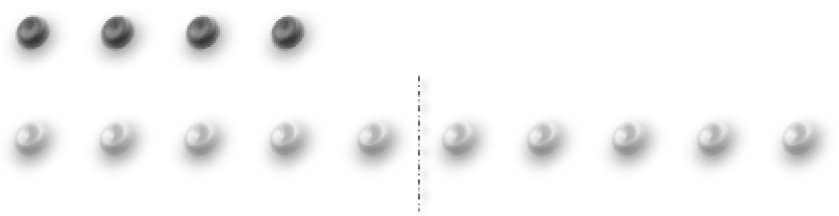
Distribui-se fichas aos alunos e os separa-se em grupos. A cada grupo se oferecem dois números, de preferência não maiores do que trinta. É útil que os números de um dos grupos sejam primos entre si, e que em outro o MDC seja o menor dos dois números. Os discentes deverão através das fichas decidir qual a maior medida que mede ambos os números, ou seja, o máximo divisor comum. O professor pode mostrar algumas dicas iniciais. Da aula anterior pode-se lembrar, por exemplo, que só podemos dividir um número por outro que seja menor ou igual à sua metade.



Fonte: autor.

Figura 6 – 5 é maior que a metade de 8.

Além disso, a maior medida comum está entre os divisores do menor número. O número maior pode possuir, por exemplo, divisores que eles próprios são maiores que o número menor. Estes divisores já podem ser excluídos como candidatos ao máximo divisor comum.

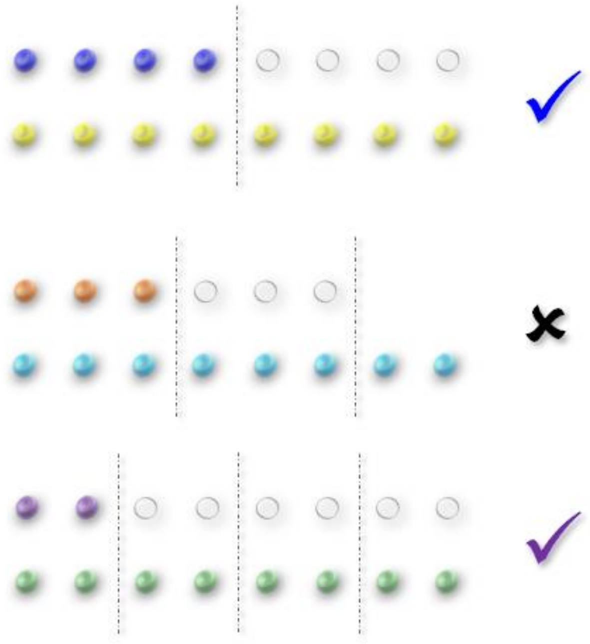


Fonte: autor.

Figura 7 – 5, divisor de 10, é maior que o outro número, 4.

A partir destas ideias, os alunos devem tentar encontrar o MDC, podendo tanto formar números alongados quanto construir separações sobre os números nos formatos de linha como os acima. Utilizariam-se os palitos como separadores, fazendo o papel das linhas tracejadas das imagens.

Em suma, ordenando os dois números em forma de linha um sobre o outro, basta colocar os palitos separando a quantidade de fichas que se deseja que consista no divisor. Caso os palitos dividam os dois números exatamente em partes iguais, é um divisor. Quando os alunos encontrarem um divisor comum, eles devem ainda verificar se não existe um outro maior. O início desse processo pode estar, de forma mais conveniente, no menor dentre os dois números.



Fonte: autor.

Figura 8 – Números que são e não são divisores.

c) Introdução ao Algoritmo: quando todos os grupos tiverem terminado, o professor poderá chamar atenção para o grupo que teve os números primos entre si. Explicaria neste momento que, quando a única medida comum é o 1, os números são ditos primos entre si. Este nome é uma comparação com o conceito de primo, já que o 1 é o único divisor comum.

Em seguida chamamos a atenção para o grupo que chegou ao MDC como um dos dois números. Discute-se que, quando se descobre que o menor número é divisor do maior, já se sabe de imediato que o MDC é o número menor, pois não pode haver divisor maior do que este.

Fazemos então a seguinte pergunta: será que é possível encontrar um método mais rápido para achar o MDC? Os gregos antigos desenvolveram um método chamado *antifairese*, que significa "subtração recíproca". Segundo Roque (2012), Proclus[3] argumenta que esta teoria, relacionada com a comensurabilidade, foi desenvolvida primeiramente na aritmética, posteriormente se aplicando às grandezas. O método de estudo das razões também pode ter sido baseado nesta prática.

O pensamento para desenvolver o método é o seguinte: até agora viemos testando divisores menores ou iguais ao menor número, e quando o próprio não for o MDC, menores que a metade dele. Será que existe algum "chute" inicial melhor do que este? Quando olhamos para o número maior, notamos:

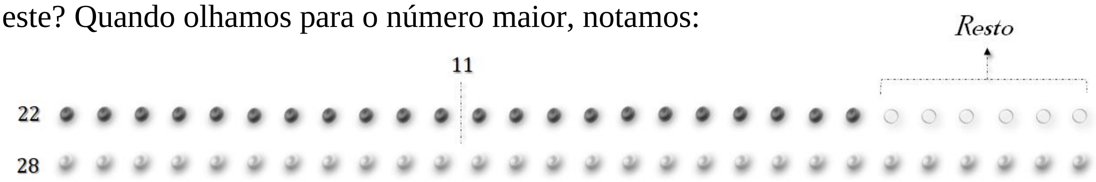


Figura 9 – 22 em relação a 28. Metade de 22 é 11 e o resto da divisão de 28 por 22 é 6.

Fonte: autor.

Existe um resto em relação ao número menor. É o resto da divisão, no caso do exemplo é o que falta para o número menor alcançar o maior. Podemos observar que, caso um número seja divisor tanto de 28 quanto de 22, ele também vai ter que, necessariamente, dividir o resto.

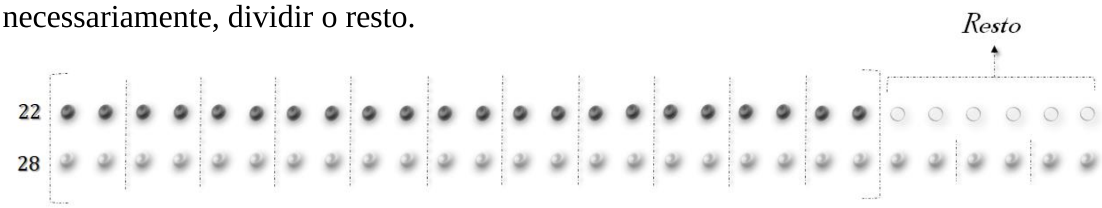


Figura 10 – 2 divide tanto 22 quanto 28.

Fonte: autor.

Se observarmos os números linha entre colchetes, notamos que se 2 divide 22, ele também vai dividir o 22 que está dentro do 28. Assim, para que divida também o 28, necessariamente terá que dividir também o que sobrou, o resto, para que tudo possa ser dividido em partes de 2. Portanto, um divisor de ambos sempre deverá ser divisor do resto.

Com esta análise, obtemos um "chute" melhor do que a metade do menor número. No caso acima, a metade seria 11, mas podemos em vez disso testar apenas os divisores do resto. Quando o número é pequeno, podemos simplesmente testar todos os divisores do resto para encontrar o maior.

Figura 11 – obtenção do resto de 8 por 22.

Fonte: autor.

Neste momento, oferece-se números maiores aos grupos, para que encontrem o MDC a partir do que foi discutido sobre o resto. Espera-se que os alunos compreendam melhor a possibilidade de encontrar o maior divisor através do resto com o manuseio físico dos números figurados.

d) Algoritmo Intuitivo: após a familiarização dos alunos com a utilização do resto, o próximo passo será notar que se pode repetir o processo para facilitar a descoberta do MDC quando os números são muito grandes.

Figura 11 – obtenção do resto de 38 por 26.

Fonte: autor.

Por vezes, o resto ainda será grande, e testar seus divisores pode ser um problema. Para tanto, temos uma outra possibilidade. No caso acima, o resto é 12. Um divisor de 38 e 26 teria portanto que também dividir 12. Se concentrarmos o olhar no 26, podemos pensar em uma outra proposta.

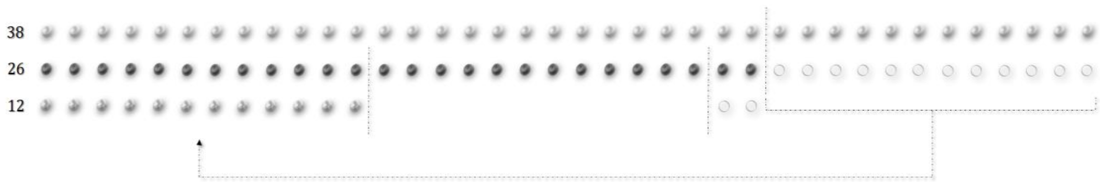


Figura 12 – tomando o resto entre de 38 e 26 e repetindo e encontrando o resto entre 26 e 12, que resulta 2.

Fonte: autor.

Como o máximo divisor comum deve dividir tanto o 26 quanto o resto 12, podemos repetir o processo que temos para achar o MDC entre dois números. Ou seja, em vez de tentar os divisores de 12, tentamos os divisores do resto de 26 dividido por 12. O resto será 2.

Figura 13 – 2 divide 12 em partes iguais. Portanto, o MDC entre 38 e 26 é 2.

Fonte: autor.

Verificando se 12 é divisível em partes de 2, encontramos que de fato o é. Assim, o máximo divisor comum de 26 e 12 é 2, e consequentemente o de 38 e 26 também é 2. É por retirarmos um número do outro para descobrir o resto que este método era chamado de *antifairese* - subtrações sucessivas.

Segundo Roque (2012), houve um famoso matemático grego chamado Euclides. Seu principal trabalho foi compor uma obra chamada de Elementos, hoje conhecida como “Elementos de Euclides”. Trata-se de um livro, provavelmente de objetivo didático, que resume técnicas matemáticas diversas. Entre elas, Euclides apresentou detalhadamente o método da *antifairese*. Por isso, este método é hoje mais conhecido como “Algoritmo de Euclides”.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sanzio_01_Euclid.jpg.

Fonte: domínio público.

Figura 14 – Parte da obra “A Escola de Atenas”, de Rafael, importante pintor do Renascimento. Retrata o estudo da matemática.

Uma vez feito alguns exemplos com os alunos, o próximo passo será pedir aos grupos que tentem encontrar o MDC de dois números relativamente grandes utilizando o algoritmo sobre os números figurados. Novamente será útil, por exemplo, fazer com que um dos grupos fique com números primos entre si, para que possam interpretar a relação desta denominação com o MDC 1.

e) Finalização: como conclusão, pergunta-se aos alunos como eles fariam, por exemplo, se fosse pedido para encontrar o MDC entre 3060 e 108. Como até então trabalhamos apenas com números figurados, seria extremamente inconveniente fazer o processo com as fichas e palitos. Para tanto, poderíamos somente fazer as contas – divisões, restos e subtrações. Com a intenção de operar com números grandes, o algoritmo pode ser feito somente no papel, sem números figurados. Esta deixa será utilizada para que, em uma próxima aula, se explique o algoritmo no papel e sua relação íntima com o processo feito com as fichas.

Formas previstas de avaliação: Tratando-se de uma aula introdutória, verifica-se a atenção dos alunos nas partes expositivas e a participação nos trabalhos em grupo.

Referências

HEATH, T. **A History of Greek Mathemathics**, Oxford, Dover Publications, 1921.

ROQUE, T. **História da Matemática**, Rio de Janeiro, Editora Zahar, 2012.

[1] Estas escritas não são chamadas de alfabéticas, já que um alfabeto descreve fonemas com suas letras. *Abjads* não são alfabetos pois não possuem letras que representam as vogais.

[2] Logograma é a denominação mais correta para os caracteres chineses, já que ideograma representa símbolos que transmitem ideias, e pictograma imagens cuja acepção é exatamente o que é retratado. A escrita chinesa é uma mistura de ambos, ainda incluindo compostos que possuem componentes fonéticos.

[3] Filósofo do século V. Comentou diálogos de Platão e, com relação à matemática, os Elementos de Euclides. Também ofereceu alguns relatos sobre História da Matemática.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA	
Autora: Julia Lima Souza	**Turma:** Diurno **Data:** 24/06/2020
Tema tratado: Construções Geométricas	
Ano escolar: 8° ano do Ensino Fundamental	
Ementa: Construções geométricas com régua e compasso. Construção de mediatrizes, bissetrizes, retas paralelas e retas perpendiculares a uma reta dada.	
Objetivos: Introduzir os alunos às construções geométricas com régua e compasso, a partir de construções simples, como segmentos de retas, retas paralelas e retas perpendiculares, para que estes possam compreender e resolver situações problemas que envolvam estes conceitos.	
Recursos empregados: Quadro negro, giz, régua de lousa, compasso de lousa, réguas de 30 cm, compassos, transferidor folhas de papel sulfite e computadores com acesso à internet para utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra.	
Descrição de todas as atividades a serem apresentadas: A Geometria é uma área da Matemática fundamental para formação dos alunos, nela são estudados conceitos necessários para a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento, como a Física, por exemplo. Relações entre figuras, tanto planas quanto espaciais, simetrias e outras transformações geométricas são estudadas nesta unidade temática. Nos Anos Finais do Ensino Fundamental são consolidadas as aprendizagens dos Anos Iniciais, aqui é esperado que os alunos já tenham um pensamento geométrico parcialmente desenvolvido e possam até realizar demonstrações simples. Neste plano serão apresentadas atividades a serem desenvolvidas numa sequência de duas aulas de cinquenta minutos cada para turmas do oitavo ano do Ensino Fundamental. As atividades aqui propostas vão ao encontro com os objetivos de conhecimento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da unidade temática Geometria. Além disso, na elaboração deste plano também se foi pensado no	

desenvolvimento da habilidade de manusear tecnologias através da utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra.

Descrição de situação 1:

Objetivos: Apresentar aos alunos as construções geométricas fundamentais. Ao final desta aula é esperado que os alunos saibam construir, utilizando régua e compasso, a mediatriz de um segmento e a bissetriz de um ângulo.

Metodologia: Aula expositiva e investigação matemática.

Desenvolvimento: No início da aula será apresentado aos alunos o conceito de construções geométricas: o que são e motivações para estudá-las. Serão entregues aos alunos folhas de papel sulfite e será pedido que tenham em mãos suas réguas e compassos para que eles possam acompanhar o professor nas construções, serão disponibilizados materiais para aqueles alunos que, por qualquer motivo, não os tenham consigo. Abaixo está a descrição passo a passo das construções a serem feitas:

- **Mediatriz de um segmento de reta**

  Trace um segmento de reta. Vamos chamar as extremidades deste segmento de A e B. Com a ponta seca em A, trace uma circunferência de raio maior que a metade de AB. Com a mesma abertura, trace uma circunferência com centro em B. Vamos chamar de C e D os pontos de intersecção destas duas circunferências. Trace a reta CD. Esta é a mediatriz do segmento AB.

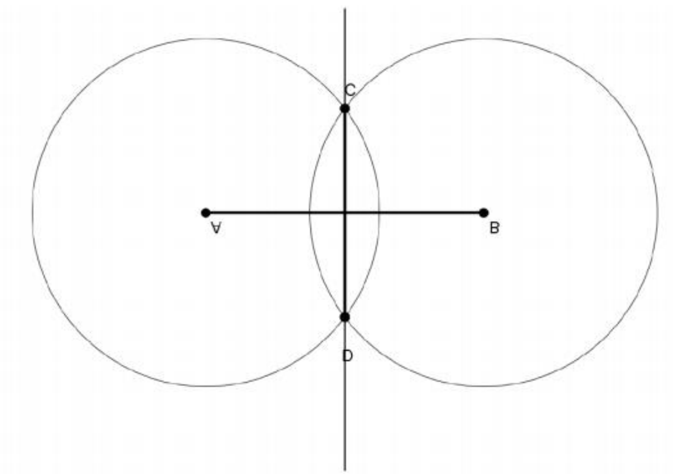


Figura 1: construção da mediatriz do segmento AB [4]

- **Bissetriz de um ângulo qualquer**

Trace um ângulo qualquer. Vamos chamar este ângulo de Ô. Com a ponta seca do compasso no ponto O, trace um arco de circunferência que passe pelas duas semirretas que formam o ângulo Ô. Vamos chamar os pontos de intersecção do arco com as semirretas de A e B. Agora, com a ponta seca em A, trace um arco de circunferência de raio maior que a metade de AB. Com a mesma abertura, trace um arco com centro em B. Vamos chamar de C o ponto de intersecção destes dois arcos. Trace a reta OC. Esta reta é a bissetriz de Ô.

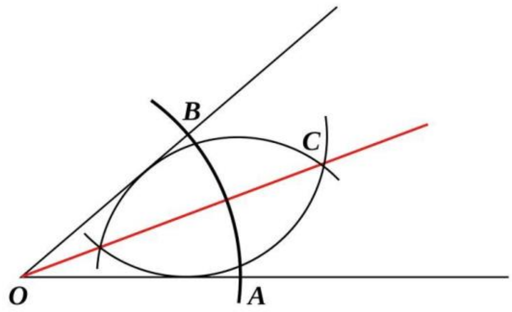


Figura 2: construção da bissetriz do ângulo Ô

Após feitas as construções em papel, os alunos, em duplas, farão as mesmas construções com o software GeoGebra, auxiliados pelo professor.

Ao final das construções, os alunos serão separados em pequenos grupos para resolução de um questionário (questões abaixo).

I. Construção de Mediatrizes

1. Você sabe dizer porque a reta construída com o professor é, de fato, mediatriz do segmento AB?
2. Qual a relação entre as medidas dos segmentos AB, BC, CD e DA?
3. Qual polígono formado pelos pontos A, C, B e D?
4. Existe alguma propriedade sobre as diagonais da figura da reposta acima?
5. Após responder as perguntas acima, você sabe dizer porque a reta construída com o professor é, de fato, mediatriz do segmento AB?

II. Construção de Bissetrizes

1. Você sabe dizer porque a reta construída com o professor é, de fato, bissetriz do ângulo Ô?

2. Qual a relação entre a distância entre A e O e a distância entre B e O?
3. Qual a relação da distância entre A e C e a distância entre B e C?
4. Após responder as perguntas acima, você sabe dizer porque a reta construída com o professor é, de fato, bissetriz do ângulo Ô?

Descrição de situação 2:

Objetivos: Apresentar aos alunos as construções geométricas fundamentais. Ao final desta aula é esperado que os alunos saibam construir, utilizando régua e compasso, retas paralelas e retas perpendiculares a qualquer reta dada.

Metodologia: Aula expositiva e investigação matemática.

Desenvolvimento: Assim como na aula anterior, serão entregues aos alunos folhas de papel sulfite e será pedido que tenham em mãos suas réguas e compassos para que eles possam acompanhar o professor nas construções, serão disponibilizados materiais para aqueles alunos que, por qualquer motivo, não os tenham consigo. Abaixo está a descrição passo a passo das construções a serem feitas:

- **Reta paralela a uma reta dada**

  Com a régua trace uma reta no papel. Vamos chamar esta reta de r. Desenhe um ponto qualquer no papel fora da reta r. Vamos chamar este ponto de P. Com a ponta seca do compasso em P, trace um arco de circunferência que passe por r. Vamos chamar o ponto de intersecção deste arco com r de B. Agora, com a ponta seca do compasso em B, trace um arco de circunferência com o mesmo raio (mesma abertura do compasso) do arco traçado anteriormente que passe por r. Vamos chamar o ponto de intersecção deste arco com r de C. Novamente com a ponta seco do compasso em B, trace um arco de circunferência de raio PC que passe pelo primeiro arco construído. Vamos chamar de D o ponto de intersecção destes dois arcos. Por fim, trace a reta que passa por P e D. Esta reta é paralela à reta r.

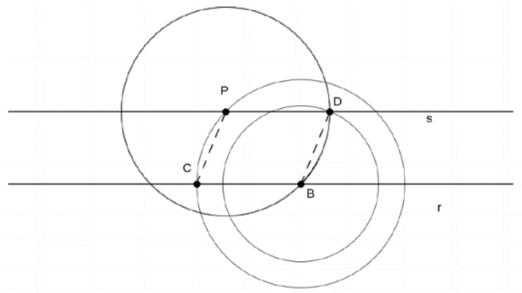


Figura 3: construção de reta paralela a uma reta dada [4]

- **Reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto exterior**

Com a régua trace uma reta no papel. Vamos chamar esta reta de r. Desenhe um ponto qualquer no papel fora da reta r. Vamos chamar este ponto de P. Com a ponta seca do compasso em P, trace uma circunferência que passe por r em dois pontos. Vamos chamar estes pontos de A e B. Com a ponta seca em A, trace um arco de circunferência de raio maior que a metade de AB. Com a mesma abertura, trace um arco com centro em B. Vamos chamar de C o ponto de intersecção destes dois arcos. Por fim, trace a reta PC. Esta reta é perpendicular à reta r.

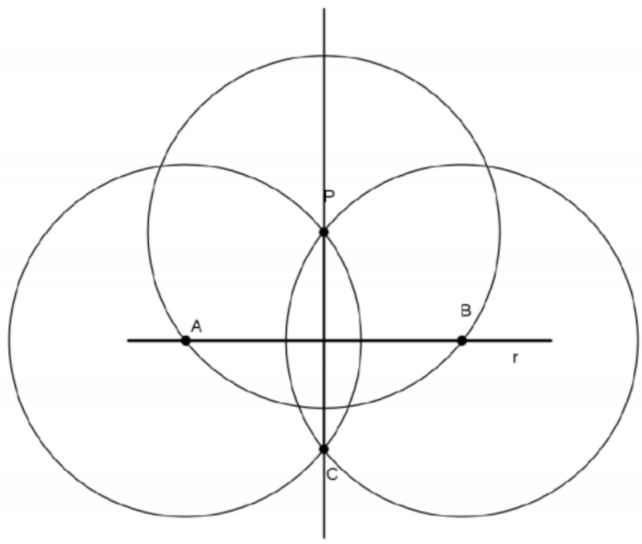


Figura 4: construção de reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto exterior [4]

Ao final das construções, os alunos serão separados em pequenos grupos para resolução de um questionário (questões abaixo).

I. Construção de Retas Paralelas

1. Você sabe dizer porque as retas r e s construídas junto com o professor são paralelas?
2. Qual a relação entre as medidas dos seguimentos PC, CB, BD e DP?
3. Qual polígono formado pelos pontos P, C, B e D?
4. Existe alguma propriedade sobre os lados opostos da figura da reposta acima?
5. Após responder as perguntas acima, você sabe dizer porque as retas r e s construídas junto com o professor são paralelas?

II. Construção de Retas Perpendiculares

1. Você sabe dizer porque a reta construída com o professor é, de fato, perpendicular à reta r?
2. Qual a relação entre a reta PC e o segmento AB?
3. Responda novamente à questão 1, baseando-se na resposta da questão 2.

É sugerido que em casa os alunos brinquem no GeoGebra tentando refazer as construções feitas em papel na sala.

Formas previstas de avaliação: A avaliação será feita de forma continuada a partir do acompanhamento dos grupos durante a resolução dos questionários ao final de cada aula.

Referências

[1] BRASIL, MEC, Base Nacional Comum Curricular – BNCC, versão aprovada pelo CNE, novembro de 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf.

[2] DANTE, L.R. Tudo é Matemática. 2a Edição. Editora Ática, São Paulo, 7a Série, 2007.

[3] WAGNER, E. Construções Geométricas. Com a colaboração de João Paulo Carneiro. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 1993, 110 p.

[4] Luís Pereira da Silva Júnior. Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis. UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE. 2013. Disponível em: www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Luis.pdf. Acesso em 24 de junho de 2020.

GRÁFICOS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS	
Autores: Gustavo Ferreira da Silva Santana	**Turma:** PEM I **Data:** 06/2020
Tema tratado: – Estatística: leitura e construção de gráficos	
Ano escolar: 8º ano	
Ementa: Construção e leitura de gráfico, resolução de problemas, elementos de gráficos.	
Objetivos: Promover o protagonismo e autonomia de alunos cegos e videntes a partir da construção de gráficos táteis e da sua aplicação em exercícios propostos por eles.	
Recursos empregados: Folha com instruções, tecido de algodão, cola 3D, papel camurça, barbante, EVA, lápis, borracha e caneta.	

Descrição de todas as atividades a serem apresentadas:

Descrição de situação 1:

Objetivos: Construir gráfico tátil a partir de materiais escolares.

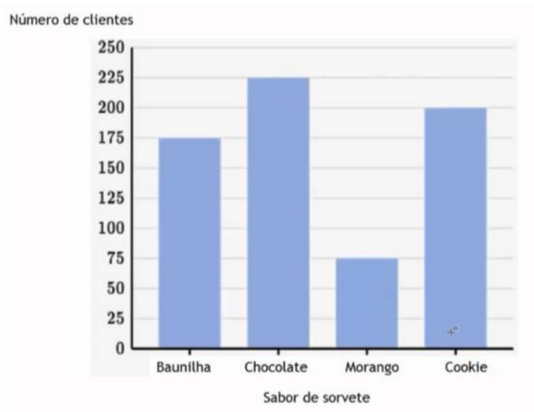
Metodologia: Explicar os componentes de um gráfico de setores e de colunas, bem como distribuir os materiais e realizar a construção de gráficos táteis a partir da perspectiva do desenho universal da aprendizagem (DUA). Este conceito tem por base a ideia de tornar mudar o ensino, tanto fisicamente quanto em questões pedagógicas, de modo a atender todos os públicos. Não se trata, por exemplo, de adaptar uma atividade para um aluno surdo ou para um aluno com deficiência intelectual, e sim propor estratégias diferenciadas para que ambos e os demais estudantes aprendam. Deste modo, algo que teria sido pensado inicialmente para um público específico passa a poder ser utilizado por qualquer outro, seja público-alvo da educação especial ou não.

Desenvolvimento:

No primeiro momento da aula, o professor apresentará características de um gráfico de setores (chamado também de gráfico de pizza). Mostrará conceitos como a relação entre o valor numérico do dado e a porcentagem da área do gráfico que cada um corresponde, como também o fato de se ser limitado quando se deseja comparar valores muito próximos e por não poder conter muita informação (pois quando se tem setores muito pequenos, a visualização é prejudicada). Analogamente, os alunos serão apresentados às características de gráficos de colunas, entendendo o conceito de escala e como determinar o tamanho de cada eixo e de seu incremento.

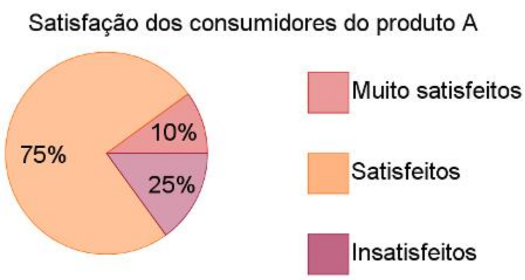
Depois da parte introdutória, os alunos construirão, com o auxílio da mediação do professor, gráficos utilizando os materiais disponibilizados. Os formatos dos gráficos poderão ser como os modelos das Figuras 1 e 2, a diferença estará no relevo. Os limites dos gráficos, assim como a escala, poderão ser confeccionados e colocados em relevo utilizando se barbante (para as linhas) e a cola 3D (para caracteres).

Figura 1 – Modelo de Gráfico de barras



Fonte: Resolução de mais problemas com gráficos de barra. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=NPLnApf_l-A. Acesso em 05 de junho de 2020.

Figura 1 – Modelo de Gráfico de setores



Fonte: Resolução de mais problemas com gráficos de barra. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=NPLnApf_l-A. Acesso em 05 de junho de 2020.

As áreas de preenchimento do gráfico de setores deverão ser de diferentes materiais, como EVA, tecido ou papel camurça. No gráfico de colunas a é possível utilizar o mesmo material em todas as colunas, pois elas são bem definidas pelos limites (barbante) e separada uma das outras.

Descrição de situação 2:

Objetivos: Promover a autonomia dos alunos e aprimorar suas capacidades de resolução de problemas referente a gráficos de setores e de coluna.

Metodologia: Cada aluno será responsável por criar três exercícios sob a mediação do professor, que tenha relação com o gráfico criado por ele, e trocará com outro colega. Como haverá dois gráficos e suas formas, serão definidas durante a construção, a escala poderá ser mudada. Dessa forma será possível verificar se o conceito de escala ficou claro após a explicação inicial.

Desenvolvimento:

O professor disponibilizará 3 exercícios distintos para cada aluno e estes serão responsáveis por realizar pequenas adaptações, numéricas ou no texto, para que os seus gráficos fiquem adequados aos enunciados. Após isso, os alunos trocarão, dois a dois, de exercício e resolverão o que foi recebido. Se a escola não tiver impressora Braille ou se os alunos cegos não souberem Braille, os exercícios poderão ser lidos pelo colega vidente com que os gráficos foram trocados ou pelo professor.

Formas previstas de avaliação:

A avaliação será de forma qualitativa e quantitativa: O professor avaliará a construção dos gráficos bem como a forma com que os alunos adaptaram os exercícios e também a quantidade de acertos e erros de cada exercício.

Referências

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2007.

WALICHINSKI, D. ; JUNIOR, G. S. **A Estatística nos Anos Finais do Ensino Fundamental: contribuições de uma sequência de ensino contextualizada**.

Florianópolis: ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 6, n. 2, p. 81-111, 2013.

TREVISAN, T. S.; MARTINS, P. L. O. **A prática pedagógica do professor de química: possibilidades e limites**. UNIrevista, v. 1, n° 2, 2006.

ZERBATO, A. P.; MENDES, E. G. **Desenho universal para a aprendizagem como estratégia de inclusão escolar**. Revista Educação Unisinos, v. 22, n. 2, p. 147-155, abr/jun, 2018.

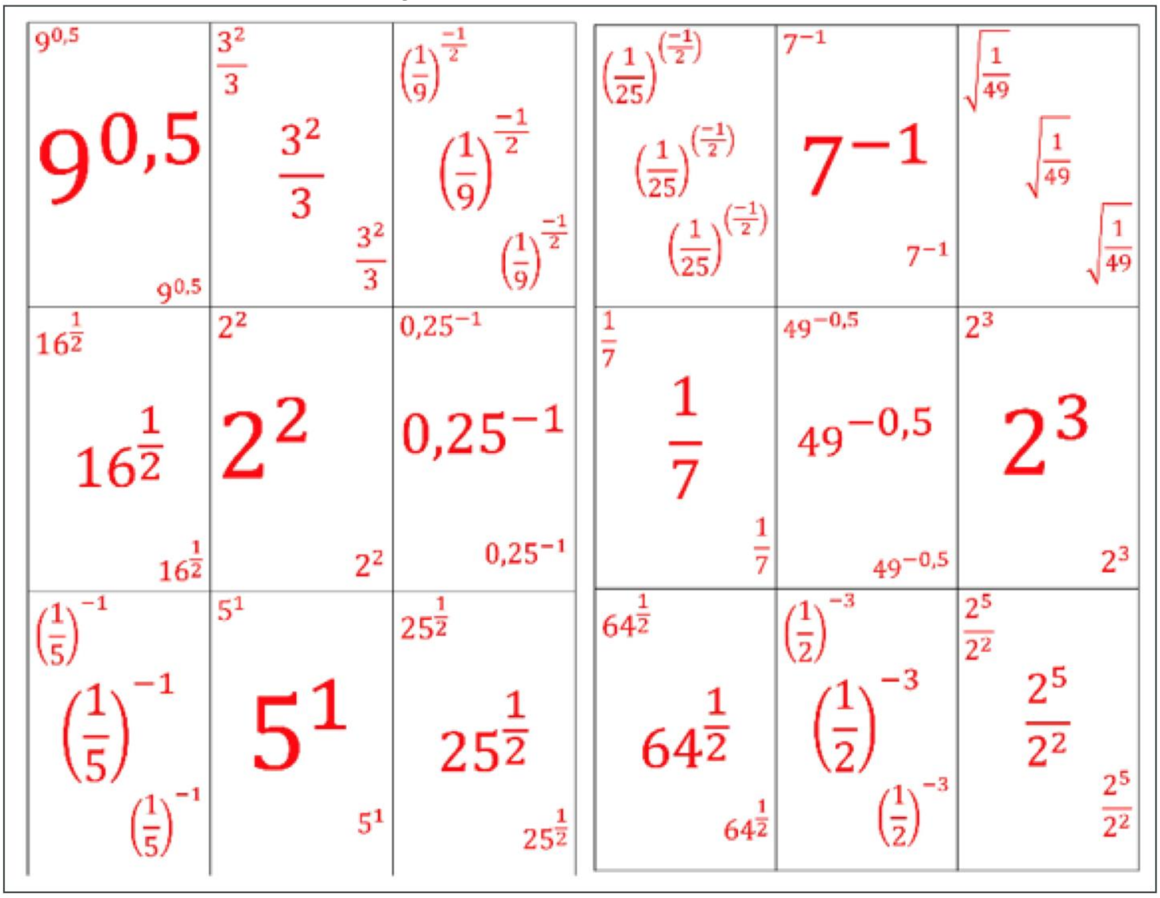
NOTAÇÃO CIENTÍFICA - CONEXÃO PASSADO E FUTURO
Julia Yumi Ito
Ano Escolar: 8º. Ano do Ensino Fundamental
Ementa: Notação Científica: Potenciação; Números racionais; Cálculo de potência.
Objetivos: **Objetivo geral:** Representar números em notação científica e realizar operações básicas com esses números. **Objetivos específicos:** • Diferenciar “números grandes” e “números pequenos”; • Escrever “números grandes” e “números pequenos” com poucos algarismos; • Operar cálculos “simples” como soma e subtração de números em notação científica; • Identificar e calcular corretamente potências de base 10.
Recursos Empregados: Vídeos para demonstração de exemplos de aplicação de notação científica em diferentes contextos; quadro/lousa e caneta/giz (pode ser projeção de slides, conforme cenário da aula virtual ou presencial) para apresentação das operações e resolução dos exercícios propostos; baralhos construídos para jogo (vide figuras da atividade de check-in);

Atividades:

1. Introdução

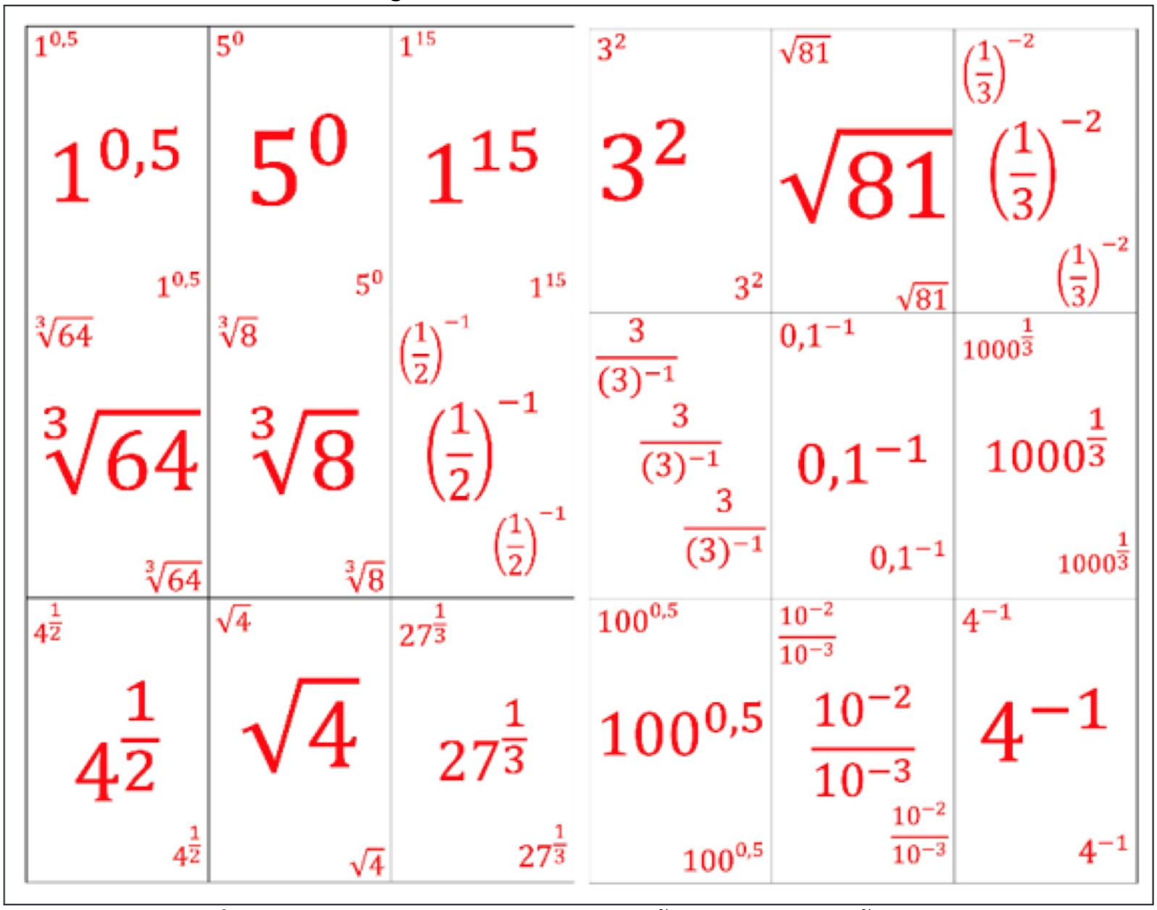
- Check-in: Jogo PIFE da Potenciação e Radiciação
  Jogo para grupos de 4 pessoas, cada grupo recebe um baralho formado por 52 cartas com operações envolvendo potenciação e radiciação (números reais) conforme figuras 1, 2 e 3.

Figura 1: Cartas 1 a 18 do baralho



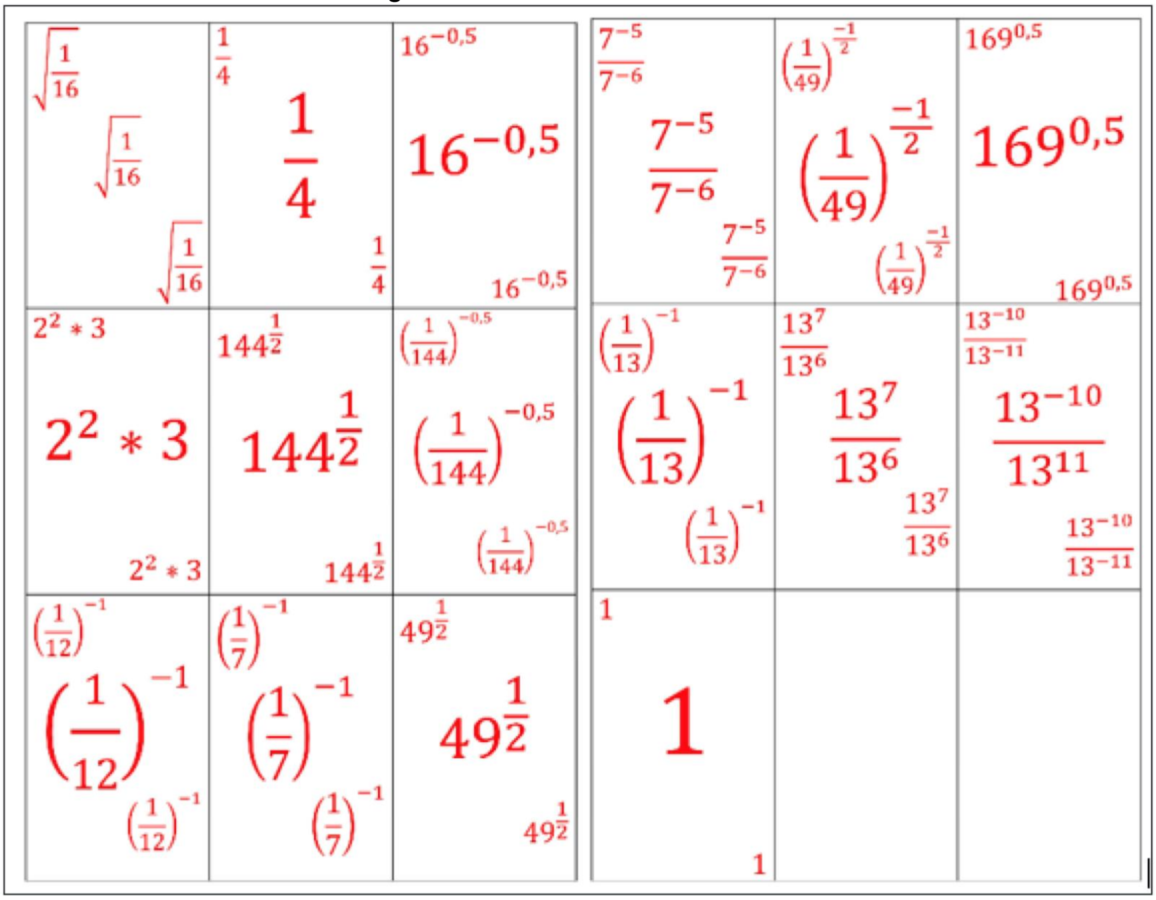
Fonte: SANTOS, Í. A. R. et al. PIFE DA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA. 2019

Figura 2: Cartas 19 a 36 do baralho



Fonte: SANTOS, Í. A. R. et al. PIFE DA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA. 2019

Figura 3: Cartas 37 a 52 do baralho



Fonte: SANTOS, Í. A. R. et al. PIFE DA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA. 2019.

Cada jogador recebe nove cartas e tem como objetivo formar três trincas (três cartas do mesmo valor). As demais cartas ficam no maço, o primeiro jogador compra uma carta do maço e descarta uma de sua mão para a lixeira (pode ser a mesma que ele comprou, se quiser), passando a vez para o próximo jogador. Sugere-se escolher um sentido (horário ou anti-horário) para organizar a vez de todos os jogadores do grupo. Cartas da lixeira podem ser compradas apenas pelo jogador seguinte. O jogador que conseguir juntar as três trincas ganha o jogo.

Reflexão: os alunos relembraram as operações de potenciação e radiciação? Tiveram dificuldades com o jogo?

"Se quisermos desenvolver competência em nossos alunos, teremos de ir além do ensino para a memorização de conceitos abstratos e fora de contexto. É preciso que eles aprendam para que serve o conhecimento, quando e como aplicá-lo. Isso é competência". (Guiomar Namo de Melo)

• Relembrando: O que é potência e quais são seus elementos

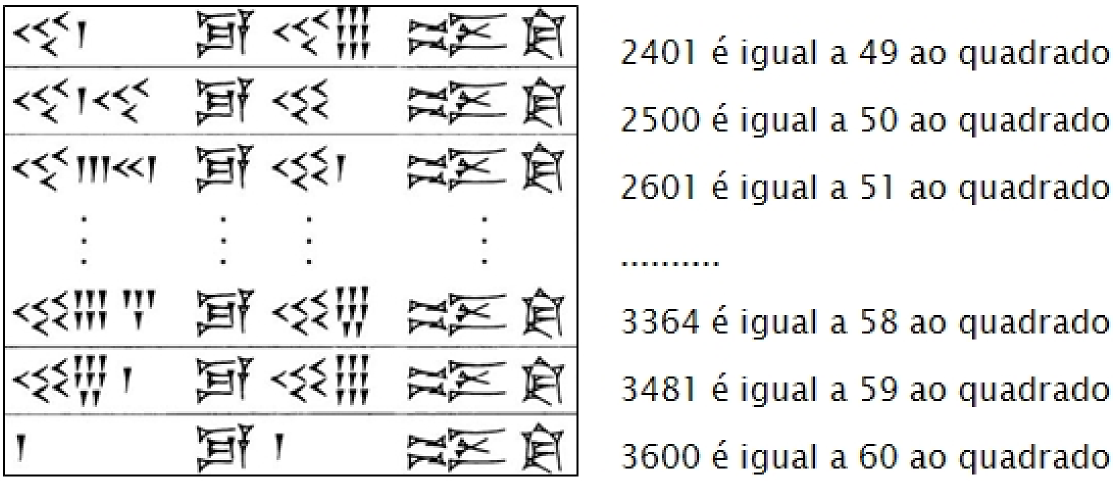
Parece simples a escrita simbólica de uma potência, mas os alunos não entendem como chegou-se nesse modelo de notação, encarando a matemática como uma “ciência pronta e acabada”.

“Uma matemática viva, em progresso, em construção surge aos olhos dos alunos quando se recorre a “História da Matemática”.

Linha do tempo:

Cerca de 2100-1580a.C.: Papiro egípcio encontrado com uma das primeiras referencias as operações de potenciação com o cálculo do volume de uma pirâmide quadrangular. Usa-se um par de pernas para simbolizar o quadrado de um número. Babilônios já conheciam potência conforme o conteúdo de uma das tabulinhas babilônicas de argila, conhecida como a tabulinha de Larsa.

Figura 4: Tabulinha de Larsa.



Fonte: http://lianamatematica.blogspot.com/2013/05/potenciacao.html

470 a.C.: Hipócrates de Quio é atribuída a utilização da palavra “potencia”, no contexto da matemática. Ele designou o quadrado de um segmento pela palavra “*dynamis*”, que significa “potência”, portanto originalmente era potência de expoente 2.

300 a.C.: Neugebauer encontrou em Tábula do Louvre dois problemas interessantes sobre sequências. Um deles afirma que $1+2+2^2+\ldots+2^9 = 1+ 2^9+2^9$. Logo percebemos que já trabalhavam com potências de expoente 9 .

250 a.C.: Arquimedes escreveu o livro *Psammites (Computador de Areia),* para determinar o número de grãos de areia necessários para encher o universo solar, o que para ele consistia numa esfera tendo a Terra como centro e a sua distância ao Sol como raio, obtendo a solução 10^{51}, muito grande para escrever numericamente com base nas letras do alfabeto (máximo de até 10 000 - uma miríade). Assim, Arquimedes criou um novo sistema de numeração considerando os números de 1 a 10, ou seja, até uma miríade de miríade, que se podiam escrever na numeração grega como sendo de primeira ordem e depois, os números de 10^8 até 10^{16} como sendo de segunda ordem, em que a unidade é 10, e assim sucessivamente. Desta forma, Arquimedes utilizou uma regra equivalente a propriedade da multiplicação de potencias de mesma base: $10^{51} = 10^3 .10^8 .10^8 .10^8 .10^8 .10^8 .10^8$ ....

250 d.C.: Diofante, matemático grego, começou a fazer uso de abreviações para potencias de números e para relações e operações em seu livro *Arithmetica*. Ele só não continuou a escrever potencias de maior grau pois os problemas que trabalhou não o exigiam. Em todas as potencias, bases e expoentes eram números naturais. Diofante, contudo, “t*inha nomes especiais para os recíprocos das primeiras seis potências da incógnita, quantidades equivalentes as nossas potencias de expoente negativo”*

*1*360 d.C.: Nicole Oresme (Bispo da Normandia) no livro “*De proportionibus proportionum*” generalizou a teoria das proporções de Bradwardine, incluindo qualquer potência de expoente racional e deu regras para combinar proporções que são equivalentes às nossas propriedades das potências. No livro “*Algorismus proportionum*”, Oresme sugeriu o uso de notações especiais para potencias fracionárias.

1484 d.C.: Nicolas Chuquet no livro "T*riparty en la sciense des nombres"* indica a potência da quantidade desconhecida por um expoente associado ao coeficiente do termo; em nossa notação moderna: 5*x*, 6*x* ,10*x* na notação de Chuquet apareceriam como .5. , .6. , .10. Chuquet conhece potências de expoentes zero e negativos.

1572 d.C.: Rafael Bombelli também elaborou uma notação simbólica para os expoentes. Em seu livro *Álgebra* utilizou um numeral arábico com um pequeno arco por baixo para representar o expoente da incógnita 1 significava a incógnita elevada a 1, 2 significava a incógnita elevada a 2, 3 significava a incógnita elevada a 3, e assim sucessivamente.

1591 d.C.: O francês François Viete tinha uma álgebra fundamentalmente sincopada e não simbólica, ou seja, em sua maioria sua álgebra consistia de palavras e abreviações. Por exemplo: representava a segunda potência como "*A quadratus*", e a terceira potência como "*A cubus*".

1637 d.C.: No livro *La Geometrie* do pensador e matemático francês, René Descartes surge a notação usada atualmente. Ele escreveu: "*aa ou* a^2 *para multiplicar a por si mesmo e* a^3 *para multiplicar ainda mais uma vez por a e deste modo até ao infinito".* Descartes trabalhou somente com expoentes inteiros positivos.

Definição: A potenciação é uma multiplicação de fatores iguais.

"Dados dois números naturais a e n (com n > 1), a expressão $\mathbf{a^n}$ representa um produto de n fatores iguais ao número a, ou seja: $\mathbf{a^n}$ = a.a.a.a...a.a (n vezes)". Temos que (+2).(+2).(+2)=$(+2)^3$.

Na potência $(+2)^3 = +8$, temos: (+2) = Base; 3 = Expoente; +8 = Potência

Propriedades:

1. Produto de potências de mesma base: Mantemos a base e somamos os expoentes.
2. Potência de potência: Para escrever a potência elevada a outro expoente, mantem-se a base e multiplicam-se os expoentes.
3. Quociente de potências de mesma base: Mantemos a base e subtraímos os expoentes.

2. Atividades desenvolvidas

- Notação científica e potências de base 10: História e conceito

A notação científica, como forma de representação e simplificação de um número muito grande ou muito pequeno, de uso muito constante tanto em computadores como em máquinas de calcular, assume aqui uma abordagem lúdica, cujo objetivo é tornar os cálculos mais fáceis e rápidos, além de consolidar e favorecer aplicação de conceitos de distintos campos do conhecimento para a compreensão da realidade, tendo como ponto relevante a aplicação interdisciplinar do tema.

Os sistemas de escrita dos numerais, símbolos que representam números, evoluíram muito até chegar ao que temos hoje, citamos como exemplo o sistema de numeração egípcio (cerca de 3500 a.C.) que usavam símbolos daquele lugar como a flor de lótus e o peixe para representar quantidades; podemos citar também o sistema de numeração romano (100 d.C.) que usavam letras para representar as quantidades. Nenhum destes sistemas tinha um símbolo para o zero, e não era posicional, o que dificultava muito na escrita de números grandes e para as operações.

Por volta do século V d.C., surge, na Índia, um sistema de numeração posicional de base 10, que usamos atualmente, este sistema foi divulgado na Europa em torno de 825 d.C. pelo matemático Árabe Mohamed Ben Mussa Al Khawarismi, por isso que o sistema ficou conhecido como sistema indo-arábico. Na obra intitulada *Aryabhatiya* (de 449 d.C.), aparece a frase "de lugar para lugar, cada um vale dez vezes o precedente". Isso significa o seguinte: por exemplo, tomemos o número 3333. Segundo *Aryabhata*, cada número vale dez vezes o precedente. Sendo o primeiro número o da direita, o segundo aquele que está à esquerda do primeiro, o terceiro à esquerda do segundo e assim por diante, o quarto número 3 vale dez vezes o terceiro, que vale dez vezes o segundo, e que vale dez vezes o primeiro. Portanto, se o primeiro vale três, uma vez que não há outro número que o antecede, o segundo vale trinta, o terceiro vale trezentos e o quarto vale três mil. Temos, portanto: 3333 = 3+30+300+3000.

Inicialmente, os hindus não utilizavam o zero. A criação de um símbolo para o nada, ou seja, o zero foi uma das grandes invenções daquele povo. Atualmente este sistema é conhecido como sistema de numeração decimal que resolveu todas as situações desfavoráveis dos sistemas anteriores, inclusive resolveu o problema de representar e operar com números grandes.

- Desafio 01 - Filme "Quem quer ser um milionário":

  - Peça para os alunos colocarem em ordem crescente os números 241000000000; 48200000000; 0,000000000021 e 0,00000000043.
  - Reflita com eles sobre o tempo que demoram e se perderam a conta dos zeros.
  - Apresente o conceito abaixo sobre notação científica, você pode utilizar projeção de slides ou o quadro branco/negro como recursos visuais.
  - Resolva junto com eles este desafio em notação científica.

Notação científica: Convenção para representar números, especialmente adequada para números muito grandes ou muito pequenos e que simplifica os cálculos entre estes, transmitindo duas propriedades de uma medida que são úteis: algarismos significativos e ordem de grandeza.

Conforme mencionado anteriormente, Arquimedes foi considerado "pai da notação científica" pela obra "O contador de Areia". No sentido de compreender a notação científica é necessário abordar as potências de base 10.

- Uma potência de base 10 e expoente natural n, representada por 10^n, é o resultado da multiplicação de 10 por si mesmo n vezes, isto é, 10^n=10x10x...x10=10...0 (n zeros). Assim, 10^1=10; 10^2=10x10=100; 10^3=1000, etc.
- Para indicar números entre 0 e 1 são utilizadas potencias de base 10 com expoentes negativos. Define-se 10^{-1} = 1/10 = 0,1; 10^{-2} = 1/ (10^2) = 0,01; 10^{-3} = 0,001 e assim sucessivamente. Em geral, 10^{-n} corresponde a 1 precedido por (n - 1) zeros e uma vírgula decimal, isto é, 10^{-n} = 0,0...01(n-1 zeros no total após a vírgula).
  Exemplo: $0,\underbrace{00}1 = 10^{-3}$, ou seja, (n - 1) = 2 zeros após a vírgula.

A escrita dos números num padrão uniformizado, notação científica, segue a forma b x 10^n, onde o coeficiente b, denominado mantissa, é um número real cujo valor absoluto (distância até à origem) é igual ou maior que 1 e menor que 10 e o expoente n, a ordem da grandeza, é um número inteiro. Faz parte da convenção ter apenas um dígito não nulo à esquerda da vírgula decimal.

- Exemplos multidisciplinares de “números grandes”: podem ser apresentados por fotos e/ou trechos de vídeos (Exemplo: documentários / filmes) que apresentam valores como exemplos abaixo:
  - População mundial: 5.10^9 habitantes;
  - Distância da Terra ao Sol: $1,5.10^8$ km;
  - Volume de água no planeta:$1,4.10^9$ $km^{3;}$
  - Contagem atual das casas decimais do número π: $5\ .10^{12}$ casas.

- Exemplos multidisciplinares de “números pequenos”: podem ser apresentados por fotos e/ou trechos de vídeos (Exemplo: documentários / filmes) que apresentam valores como exemplos abaixo:
  - Massa de um próton (elemento do centro de um átomo) é aproximadamente 0,00000000000000000000000000167 kg = $1,67.^{10-27}$ kg.
  - Constante de Avogadro: 6.10^{-23} mol-1;

Sugestão: Faça um levantamento de exemplos conhecidos pelos alunos de números grandes e de números pequenos em cada um dos momentos, não necessariamente com o valor correto (eles podem buscar o número correto para uma próxima aula) mas para que eles possam relacionar com exemplos do dia a dia deles.

- Desafio 02: Proponha um desafio a eles, trazer na próxima aula uma evidência de uso de notação cientifica em notícias, eles podem compartilhar recortes de revista, *printscreen* de uma matéria ou foto. No dia combinado, faça uma brincadeira para que eles se organizem em ordem crescente (pode ser na sala, de pé, sentados, ou com representação por desenho no quadro/lousa/projeção de tela), eles poderão ter dificuldade para comparar números e recorreram a notação cientifica para se organizarem. Para dificultar a busca, você pode definir um período para a noticia (Exemplo: apenas do período do mês atual), sendo necessário o registro da data também na evidência. Uma opção também é reconhecer o “maior número” e o “menor número” encontrado na turma.

- Exercícios de relação entre potência e grandezas de unidades: exercícios podem ser projetados ou feitos na lousa/quadro em conjunto ou individualmente e compartilhado em grupo:

  - Régua de comprimento: mm, cm, dm, m, dam, hm, km;

  - Relação entre um milhar (10^3), um milhão (10^6), mil milhões (10^9), um bilhão (10^{12}).

Notação científica (na forma de potência)	Ordem de grandeza do número, ou classes
10^0	Classe das unidades
10^3	Classe dos milhares
10^6	Classe dos milhões
10^9	Classe dos bilhões
10^{12}	Classe dos trilhões

(ENEM 2015) As exportações de soja no Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012. A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:

A. 4,129 x10^3

B. 4,129 x10^6

C. 4,129 x10^9

D. 4,129 x10^{12}

E. 4,129 x10^{15}

Resolução: Como uma tonelada tem 1000 kg, temos que a exportação de soja no Brasil naquele mês foi de 4 129 000 x 1000 = 4 129 000 000 = 4,129 x10^9 kg. Letra c.

• Relação entre unidades de tempo: 1000 segundos são cerca de 17 minutos, 1 milhão de segundos são cerca de 11 dias e meio e que mil milhões de segundos são aproximadamente 32 anos.

• Bytes da computação: Foco no futuro nanotecnológico, evolução do armazenamento de dados em computadores, celulares, *tablets* etc.

Tabela 1: Relação entre unidades de grandeza de bytes.

Prefixo binário (IEC)			Prefixo do SI		
Nome	Símbolo	Múltiplo	Nome	Símbolo	Múltiplo
byte	B	2^0	**byte**	B	10^0
kibibyte(quilobyte)	KiB	2^{10}	quilobyte	KB	10^3
mebibyte(megabyte)	MiB	2^{20}	megabyte	MB	10^6
gibibyte(gigabyte)	GiB	2^{30}	gigabyte	GB	10^9
tebibyte(terabyte)	TiB	2^{40}	terabyte	TB	10^{12}
pebibyte(petabyte)	PiB	2^{50}	petabyte	PB	10^{15}
exbibyte(exabyte)	EiB	2^{60}	exabyte	EB	10^{18}
zebibyte(zettabyte)	ZiB	2^{70}	zettabyte	ZB	10^{21}
yobibyte(yottabyte)	YiB	2^{80}	yottabyte	YB	10^{24}

Fonte: https://www.adassoft.com/unidade-de-medida-em-informatica-byte-quilobyte-megabyte-gigabyte/

Sugestão: Abra espaço para que eles tragam exemplos de outras relações relacionadas ao dia a dia deles e, também de outros exemplos atuais e de novas tecnologias (Exemplos: tamanho de um fio de cabelo; diâmetro de uma célula humana; tamanho do vírus COVID19; massa de uma formiga; e a massa de um elefante, entre outros).

- Operações baseadas em exemplos:

  - Exercício 1: Lenda do Jogo de Xadrez

Compartilhe a lenda com a turma:

Segundo uma lenda antiga, o jogo de xadrez foi inventado na Índia, para agradar a um soberano, como passatempo que o ajudasse a esquecer os aborrecimentos que tivera com uma desastrada batalha. Encantado com o invento, o soberano, rei Shirham, quis recompensar seu súdito Sissa Ben Dahir, o inventor do xadrez. Shirham disse a Sissa que lhe fizesse um pedido, que ele, rei Shirham, o atenderia prontamente. Sissa disse, simplesmente: "Bondoso rei, dá-me então um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda casa, quatro (= 2^2) pela terceira, oito (= 2^3) pela quarta, e assim por diante, até 2^{63} grãos de trigo pela última casa do tabuleiro, isto é, a 64ª casa". O rei achou esse pedido demasiado modesto e, sem dissimular seu desgosto, disse a Sissa: "Meu amigo, tu me pedes tão pouco, apenas um punhado de grãos de trigo. Eu desejava cumular-te de muitas riquezas - palácios, servos e tesouros de ouro e prata". Como Sissa insistisse em seu pedido original, o rei ordenou a seus auxiliares e criados que tratassem de satisfazê-lo. O administrador do palácio real mandou que um dos servos buscasse um balde de trigo e fizesse logo a contagem.

Sabemos que a produção brasileira de trigo em 1992 foi de 2,839 milhões de toneladas, um total de 65 297 000 000 000 grãos.

Pergunta para a turma: Qual a quantidade de grãos do pedido de Sissa? Esse pedido poderia ser atendido?

Resolução: A quantidade de grãos pedido por Sissa era exatamente: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$. Este número dividido pelo número de grãos de trigo que o Brasil produziu em 1992 é certamente maior do que: 18×10^{18} dividido por $65 \times 10^{12} = 277\ 000$ (aproximadamente). Isso significa que seriam necessários mais do que 277 000 anos de produção brasileira de trigo, no nível da safra de 1992, para atender ao pedido de Sissa.

Pergunta reflexiva para a turma: Foi fácil chegar no resultado? Imaginem sem a notação científica…

• Exercício 2: Caso SEMASA - "Produção" de água em Santo André

Compartilhe com a turma a reportagem abaixo:

Figura 4: Reportagem do website do jornal "Diário do Grande ABC".

Santo André quer produzir a própria água

Isis Mastromano
Do Diário do Grande ABC

Em vez de comprar, produzir água. Santo André pode ser o primeiro município da região a engatilhar a ideia que pode render economia para a cidade que hoje deve mais de R$ 780 milhões à Sabesp (Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo) pela compra de água no atacado.

É a estatal quem capta, produz e vende água para todas as cidades sendo as autarquias municipais responsáveis somente pela distribuição para casas e indústrias e pelo gerenciamento da água. Somente São Bernardo, Ribeirão Pires e Rio Grande da Serra são atendidas pela própria Sabesp.

Historicamente, Santo André é a única cidade do Grande ABC que já consegue produzir parte da água que consome. Em 1943 construiu a ETA (Estação de Tratamento de Água) Guarará que gera atualmente 6% da água que os moradores consomem, ou, 150 litros de água por segundo.

A ideia de municipalizar a produção de água não é nova, é ensaiada desde 1996 pela cidade e os novos gestores municipais pretendem retomá-la.

Em 1997, por decisão da administração vigente, a iniciativa foi interrompida.

O Semasa (Serviço Municipal de Saneamento Ambiental de Santo André) aposta em três frentes para que o plano ganhe vida: reduzir as perdas com o conserto de redes de água e combate a fraudes e construir duas ETAs, uma de água potável e outra de água de reúso.

A futura ETA se serviria de dois braços da Represa Billings, os ribeirões Grande e Pequeno. Ambos mananciais responderiam por 1.500 litros de água por segundo.

A construção da estação de água de reúso seria voltada para servir as indústrias do Polo Petroquímico e as empresas do eixo Tamanduateí e produziria 400 litros por segundo.

Atualmente, até mesmo para ter água de reúso Santo André precisa de arcar com a compra dos 780 mil litros que utiliza para lavagem de vias públicas, regar áreas verdes e desobstruir redes de esgoto e galerias de águas pluviais todo mês.

A água reaproveitada também é vendida pela Sabesp e é fruto da ETE (Estação de Tratamento de Esgoto) ABC.

O Semasa garante que com as novas estações de tratamento de água aliadas ao trabalho de redução de perdas é possível abastecer todo o município, visto que hoje o consumo em Santo André é de 2.100 litros por segundo.

HISTÓRICO - Há 13 anos o Semasa obteve autorização do DNAEE (Departamento Nacional de Água e Energia Elétrica) para dar o pontapé inicial na produção de sua própria água. A autarquia estuda agora pedir autorização ao DAEE (Departamento de Água e Energia Elétrica) do Estado que autoriza empresas, indústrias e órgãos públicos a captarem água de mananciais. Não há cobrança pela água retirada da natureza e a lei que pretende onerar quem explora o recurso natural aguarda ser autorizada pelo governo estadual.

De acordo com o Semasa, ainda não existe uma definição sobre a verba que o município economizaria se produzisse 100% de sua água.

"Não há determinação legal para que a cidade não produza sua própria água, mas para o Estado não é interessante que o município seja autossuficiente", aponta o pesquisador do departamento de hidráulica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Lauro Mendes.

O Semasa afirmou não sofrer bloqueio da Sabesp para entrar no rol dos produtores de água. A Sabesp foi procurada pela reportagem mas não quis comentar o assunto.

Fonte: Diário do Grande ABC < www.dgabc.com.br >.

Perguntas para discussão com a turma:

- Água pode ser produzida?

Resolução: O que a cidade de Santo André pretende é fazer o tratamento da água utilizada pelo município, construindo duas Estações de Tratamento de Água (ETA), em dois braços da represa Billings, que passam pela cidade.

- O consumo de água da cidade atualmente é de 2.100 litros por segundo, quais são os consumos diário, mensal e anual?

Resolução: Cada dia tem 86.400 segundos, o consumo diário, de água, na cidade é de 181.440.000 litros de água. 181.440.000, poder-se-á escrever 1, 8144.10^8 litros por dia. Já o consumo mensal será de $4{,}35456.10^9$ litros e o anual de $1{,}5894144.10^{12}$ litros.

- Qual a média de consumo de água por habitante?

Resolução: Para essa resolução em grupo, os alunos precisarão buscar a informação atualizada de quantidade de habitantes de Santo André, disponível na página do IBGE. Considerando o valor de 2019, 718.773 habitantes. Por meio de uma divisão, obtém-se que a média do consumo de água por habitante, é de 252,4 litros de água por dia, 6.058 por mês e 2.211.0288 por ano.

Perguntas reflexivas: Esses dados estão corretos? É possível que cada habitante consuma 250 litros de água por dia? Quanto de água é consumido por dia na sua casa? E por mês?

Resolução: Consumo diário calculado é maior do que realmente se consome. Exemplos: água utilizada para lavagem de vias públicas, regar áreas verdes, desobstruir redes de esgoto e galeria de águas pluviais e, também, o fato de a cidade em questão ter várias indústrias, onde o consumo de água pode ser superior ao residencial.

Sugestões:

- Você pode pedir para os alunos levarem uma conta de água no dia anterior a essa aula, para embasar a discussão do grupo;

- O grupo pode discutir sobre o consumo consciente de água.

3. Conclusões

- Revisão do conteúdo:

  - O que vimos?

  - Agora que aprendemos, onde podemos usar esse conhecimento? Reflexão multidisciplinar (física, química, biologia), você pode compartilhar exemplos que eles já conhecem e, também de conteúdos importantes que eles aprenderão nos próximos anos que utilizaram a notação cientifica.

Em estudo feito em uma escola do ensino médio em Tocantins, as maiores dificuldades dos alunos no aprendizado de conceitos e aplicações em Física está relacionado a falta de conhecimento básico do ensino fundamento em práticas matemáticas, sendo notação cientifica um dos principais tópicos, junto com operações matemáticas, regras de três, conversar de unidades e sinais matemáticos.

- Retrospectiva da aula:

  - Como foi a aula? O que mais gostaram? Sugestões de melhorias?

  - Colete feedbacks dos jogos, desafios e exemplos utilizados. O quanto mais próximo da realidade deles, melhor será a absorção do conteúdo estudado.

Formas previstas de avaliação: Participação no levantamento e compartilhamento de exemplos de aplicação de “números grandes”, “números pequenos” e notação científica; participação nos exercícios de operações e discussão na resolução.

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2020.

BORGES, J. C. O ensino da matemática através da astronomia para o ensino médio. 2019. Disponível em: <http://dspace.mackenzie.br/bitstream/handle/10899/20059/JEFFERSON%20DE%20CAMPOS%20BORGES.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 01 jun. 2020.

MACIEL, R. R., BORGES, B. W. A Astronomia nas aulas de Física: Uma proposta de utilização de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (**UEPS**). Material de Apoio ao Professor de Física. Diss. Universidade Federal de Santa Catarina, 2016. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/94926005.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2020.

ROTA, B.; DE MAMANN, Â. T. W.; GAMA R. F.; PERINGER, S. R. Z.; MAI, I. Alfabetização científica como uma possibilidade de inclusão social. *6ª Mostra de Ensino Pesquisa e Extensão (MOEPEX),* 2017. Disponível em: <https://eventos.ifrs.edu.br/index.php/MoEPExIbiruba/6MOEPEX/paper/viewFile/3322/1402>. Acesso em: 01 jun. 2020.

DA SILVA, M. M. B.; GUARDA, P. M.; MOREIRA JR., J. C. B.; SANT'ANA, N. J. Importância da matemática no ensino da física. IV Congresso Nacional - Educação (CONEDU), 2017. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV073_MD1_SA13_ID9844_15102017205551.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2020.

MARTINS, M. D. C. Notação científica: uma forma eficaz de representar e operar com pequenos e grandes números. Correio dos Açores, 16-16, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10400.3/3736>. Acesso em: 07 jun. 2020.

DIONYSIO, J. S. Notação científica: Uma viagem interdisciplinar. LABEM-IME-USP.

RICHARTZ, M. Potenciação: um estudo didático. Florianópolis, 2005. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96531/Marize_Richartz.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 08 jun. 2020.

SANTOS, Í. A. R., CARVALHO, J. P. A., DE MACEDO, J. A., AMORIM, L. I. F. (2019). Pife da potenciação e radiciação: Uma alternativa metodológica. *Ensino Aprendizagem de Matemática*, 26. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Eliane_Vasquez/publication/335665813_Leonhard_Euler_1707-1783_e_Estudo_da_Formula_de_Poliedros_no_Ensino_Medio/links/5d72e9cb92851cacdb249d89/Leonhard-Euler-1707-1783-e-Estudo-da-Formula-de-Poliedros-no-Ensino-Medio.pdf#page=36 >. Acesso em: 08 jun. 2020.

PEREZ, J. F. Modelagem Matemática: Possibilidades Para Um Trabalho Em Sala De Aula. ISSN 2175-9227 Revista Acadêmica Eletrônica Sumaré, v.12, n.2, 2014. Disponível em: <http://revistaqualis.sumare.edu.br/index.php/revista/article/view/24>. Acesso em: 09 jun. 2020.

QUARTIERI, M. T. et al. Formação Continuada para Professores de Física e de Matemática: Possibilidade de Integração de Recursos Tecnológicos na Prática Pedagógica. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v.11, n.2, 2018. Disponível em: <http://monografias.ufrn.br/handle/123456789/2840>. Acesso em: 09 jun. 2020.

MARIZ, F. P. Funções e os Números Grandes. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2018v11n2p111-119>. Acesso em: 09 jun. 2020.

ROSA, T. O. D. Potenciação e radiciação: contribuições dos jogos no ensino médio. Universidade Federal do Pampa, Caçapava do Sul, 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/riu/1440>. Acesso em: 09 jun. 2020.

BELINELLI, E. O.; DALTO, J. O.; ANTUNES, T. P. Jogos em sala de aula: relato de uma experiência com potenciação. 2014. Disponível em: <https://dspace.unila.edu.br/bitstream/handle/123456789/2877/PIBID1%2c1418-1422.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 09 jun. 2020.

KESSLER, D. et al. A utilização de metodologia de engenharia didática para analisar as contribuições dos jogos da memória de potenciação e radiciação. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/RE/RE_2_Kessler_Damares.pdf>. Acesso em: 09 jun. 2020.

ADASSOFT. Disponível em: <https://www.adassoft.com/unidade-de-medida-em-informatica-byte-quilobyte-megabyte-gigabyte/ >. Acesso em: 09 jun. 2020.

IBGE. Santo André. Disponível em:<https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/sp/santo-andre.html>. Acesso em: 15 jun. 2020.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010.

BIANCHINI, E. **Matemática.** São Paulo: Moderna (5 edição)

Potenciação: Construindo Flores

Tainá M. Zabaneh

Ano Escolar: 8º. Ano do Ensino Fundamental

Ementa:

Operações com números inteiros (em especial a multiplicação e a divisão); Potência de números reais; Potência com expoente negativo; Operações com potência.

Objetivos:

Objetivo geral: Reconhecer e resolver exercícios que envolvam potenciação.

Objetivos específicos:

- Resolver potenciação de expoente negativo.
- Resolver exercícios com operações entre potências de mesma base.
- Reconhecer potências de mesmo valor em diferentes escritas.

Recursos Empregados:

Cartolina e caneta (para produzir as flores), lousa, giz, lápis e papel.

Atividades:

1. Introdução

O estudo de potenciação se inicia no 6º ano do Ensino Fundamental. Porém, é no 8º ano em que esse estudo se aprofunda e é estudado as operações com potências e potências de expoente negativo.

Na BNCC, aparece na unidade temática Números do 8° ano, nas habilidades:

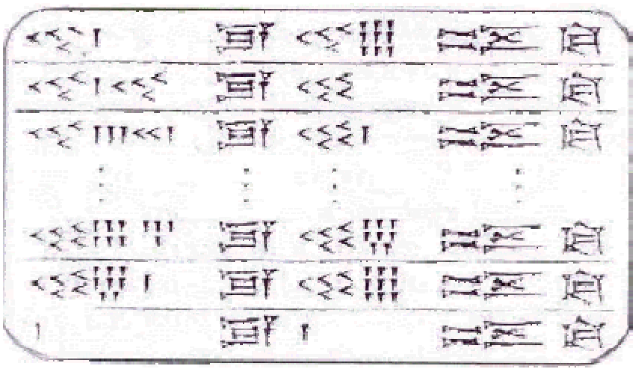
(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.

(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

Um passeio pela história da potenciação:

A importância de se conhecer um pouco da história da matemática e, em especial para esse plano de aula, a história da potenciação se traduz na oportunidade de mostrar aos alunos que a matemática não é estagnada. Como diz Dambros (1997), “É possível ao professor deixar claro para o aluno que a matemática não é uma Ciência morta, mas uma Ciência viva na qual um progresso contínuo é realizado.”. Apesar deste plano de aula não utilizar dessa ferramenta, ela pode se tornar útil ao longo do processo de ensino e nos momentos de revisão do conteúdo e discussão coletiva que estão presentes nas atividades propostas.

As primeiras referências à ideia de potenciação ocorrem entre 2100 e 1580 a.C. pelos egípcios e os babilônios. Um papiro egípcio contem esta ideia ao realizar um cálculo de uma pirâmide quadrangular. Já os babilônios possuíam tábulas contendo vários valores elevados ao quadrado ou elevado ao “expoente” três. Claro que naquele período esses nomes não existiam, e a referência da quantidade de vezes em que o valor foi multiplicado aparecia através da quantidade de traços desenhados.



→ 2401 é igual a 49 ao quadrado

→ 2500 é igual a 50 ao quadrado

→ 2601 é igual a 51 ao quadrado

......

→ 3364 é igual a 58 ao quadrado

→ 3481 é igual a 59 ao quadrado

→ 3600 é igual a 60 ao quadrado

Fonte: RICHARTZ (2005)

O nome “Potência” surgiu por volta de 410 a.C. pelo Hipócrates de Quio. Mas seu nome se popularizou a partir de seu uso no livro de Euclides, Os Elementos, ao falar do teorema de Pitágoras.

O conceito da potência, e suas diferentes formalizações ao redor do mundo continuam por anos. Mas para esse resumo da história não se estender muito, será apontado apenas mais dois momentos importantes para essa atividade.

O primeiro momento se relaciona ao uso de expoentes fracionários e as combinações entre potências de expoentes racionais, que são, em suma, as regras de potenciação que serão utilizadas na atividade proposta. Esse marco ocorreu por Nicole Oresme (Bispo da Normandia) em 1360 d.C.

O segundo momento se relaciona ao uso dos expoentes negativos e ao expoente zero, que ocorreu por Nicolas Chuquet , em 1484 d.C.

Essa é uma síntese da história da potenciação, o intuito é mostrar novas possibilidades para a sala de aula, tanto para esse momento da atividade proposta, como para demais momentos do ensino desse conteúdo. O professor pode se aprofundar mais nas teorias e utilizar em demais momentos de sala de aula.

Os conceitos de potenciação:

A potenciação é utilizada em diversos momentos da trajetória da aprendizagem matemática e de outras matérias das ciências.

Definição: Seja um número real **a** e um número natural **n**, com **n > 1**, chamamos de potência de base a e expoente n o número a^n, isto é, o produto de **n** fatores iguais a **'a'**.

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$$

Chamamos a de base e n de expoente, e a multiplicação sucessiva após a igualdade chamamos de potência.

A potência com expoente zero: Toda potência com expoente zero tem seu valor igual a 1.

A potência com expoente negativo: Seja a um número real diferente de zero, e n um número natural, chamamos de potência de base a e expoente -n o número a^{-n}, que é o número inverso de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Operações com potências:

- Multiplicação entre potências de mesma base: um produto de potências de mesma base pode ser escrito na forma de uma única potência: conservamos a base e **adicionamos os expoentes**.

$$2^3 \text{ x } 2^7 = (2 \text{ x } 2 \text{ x } 2) \text{ x } (2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2)$$

$$\mathbf{2^3} \qquad \mathbf{2^7}$$

$$2^3 \text{ x } 2^7 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = \mathbf{2^{10}}$$

$$2^3 \text{ x } 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$$

- Divisão entre potências de mesma base: uma divisão de potências de mesma base pode ser escrito na forma de uma única potência: conservamos a base e **subtraímos o expoente do numerador pelo do expoente do denominador**.

$$\frac{x^7}{x^3} = \frac{\cancel{2} \text{ x } \cancel{2} \text{ x } \cancel{2} \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2}{\cancel{2} \text{ x } \cancel{2} \text{ x } \cancel{2}} = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 2^4$$

$$\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$$

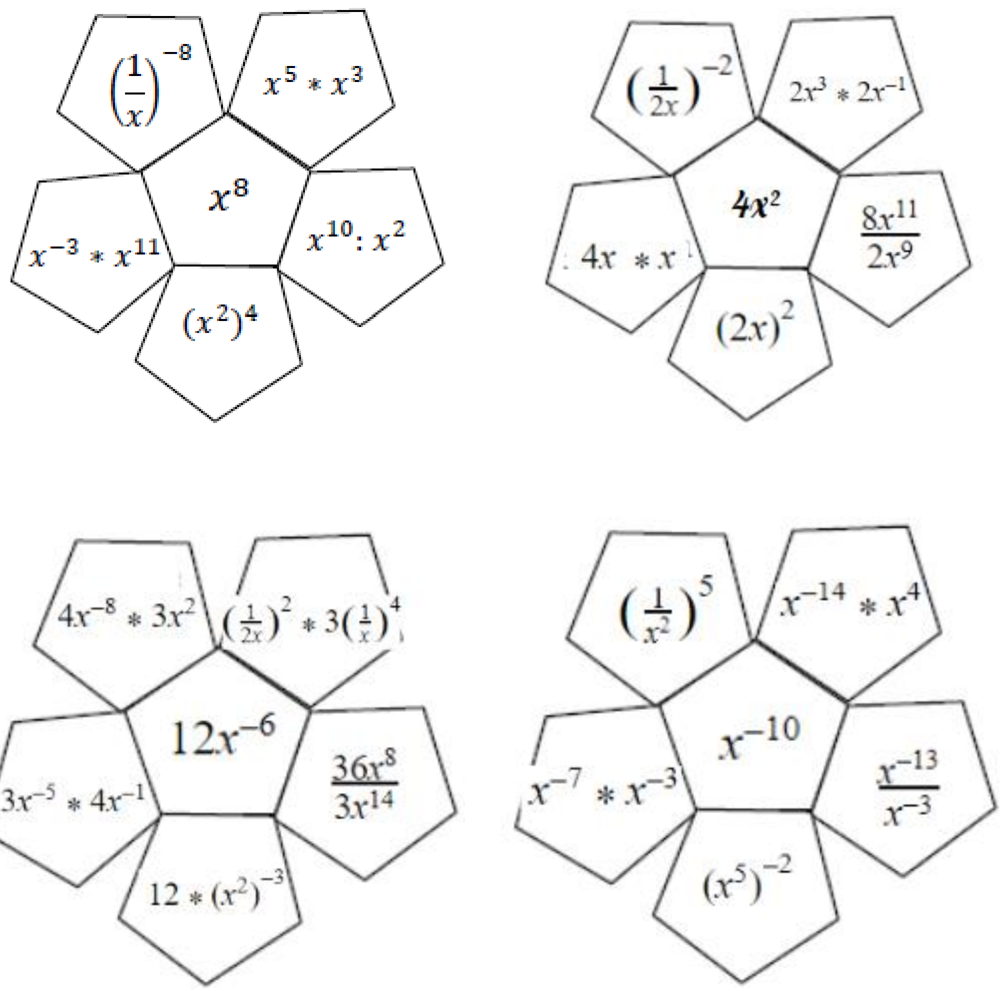
2. Atividades desenvolvidas

A aula a ser desenvolvida pressupõe conhecimento teórico anterior de potenciação com expoentes negativos e operações com potência. Essa aula seria um momento de colocar em prática esses conhecimentos, e não um momento inicial da aprendizagem desse conteúdo.

Apesar disso, a primeira parte da aula será uma pequena revisão dos conceitos aprendidos e que serão utilizados na atividade.

Será realizado o jogo “Potenciação Floral”, jogo retirado da pesquisa de ROSA (2016). Esse jogo, que foi pensado como um jogo competitivo, se mostrou mais eficiente quando jogado de forma conjunta. Dessa forma os alunos serão divididos em pequenos grupos de 4 alunos.

Cada grupo receberá 3 “miolos” de flores e 15 pétalas (5 para cada miolo). Cada miolo terá uma potência de base “x”. Em cada uma das pétalas terá uma expressão ou operação que ao simplificá-la terá o mesmo valor do miolo. Assim, a atividade consiste nos alunos conseguirem formar as três flores. Segue sugestões de esquema de uma flor.



Fonte: Rosa (2016)

Durante a atividade, é encorajado que o professor fique monitorando o trabalho dos alunos e prestando atenção em suas discussões. Como não é uma atividade competitiva, o professor pode intervir ao perceber que algum grupo está com dificuldades, podendo reforçar os conceitos ou tirar dúvidas pontuais. Ao perceber que existe um problema geral dos alunos em alguma parte específica da matéria, o professor pode interromper a atividade para tirar essa dúvida para todos, ou tirar as dúvidas dos grupos individualmente quando surgirem e, por fim, retomar na discussão coletiva.

O importante é o professor perceber ideias e respostas dos alunos que estão corretas e incorretas para comentá-las ao final da atividade, na discussão coletiva.

Ao final da atividade o professor, por meio de uma plenária, poderá pedir para os alunos falarem seus resultados e resolver na lousa para todos os alunos; tirar dúvidas de quem chegou em resultados diferentes; além de reforçar alguma ideia, que tenha percebido durante a aula, ainda não está totalmente entendida. A ideia é uma interação entre os alunos com o professor para que possam discutir as ideias que tiveram durante a atividade para expô-las aos outros alunos. Essa ideia é discutida no texto de STEIN (2008).

3. Conclusões

Ao final dessa atividade espera-se que os alunos tenham mais segurança ao resolver operações com potência.

Formas previstas de avaliação:

A avaliação será realizada a partir da participação dos alunos na atividade. Não será avaliado a rapidez, ou se foi possível finalizar a atividade. Mas o envolvimento na mesma, a comunicação e interação com os colegas.

Essa atividade pode proporcionar um guia para o professor entender quais as dificuldades de seus estudantes. Dessa forma, pode se planejar para futuras aulas.

Referências:

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >. Acesso em: 18 mai. 2020.

DAMBROS, Adriana A.. **O valor didático da história da matemática.** Trabalho de Conclusão de Curso. UFSC/ CFM, 1997.

RICHARTZ, Marise. **Potenciação - Um estudo didático.** Dissertação UFSC-2005.

ROSA, Taynara Oliveira da. **Potenciação e radiciação: contribuições dos jogos no ensino médio**. 2016.

STEIN, Mary Kay et al. **Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell.** Mathematical thinking and learning, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

TRIÂNGULOS ATRAVÉS DO GEOGEBRA	
Autor: Willyan Almeida Lima	**Turma:** Diurno **Data:** 24/06/2020
Tema tratado: Área de triângulos e de figuras triangulares.	
Ano escolar: 8ºAno	
Ementa: Área de triângulos e técnicas de cálculo de áreas de triângulos.	
Objetivos: Abordar o conceito de área de triângulo de maneira construtiva e significativa, ensinar a fórmula que calcula áreas de triângulos de forma ancorada na construção geométrica feita no GeoGebra e na fórmula para o cálculo da área de paralelogramos. Avaliar os alunos com base em questões instigantes de raciocínio e aplicação do conceito aprendido.	
Recursos empregados: Quadro negro, gizes brancos, computadores com recurso ao Geogebra.	
Descrição de todas as atividades a serem apresentadas: As atividades propostas neste plano de aula têm em vista alguns importantes aspectos da formação dos alunos, como a habilidade de manusear tecnologias de informação, que é contemplada neste plano com o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra, a aprendizagem significativa do conceito de área de triângulo, com base no de área de retângulo e de paralelogramo, bem como da expressão matemática principal utilizada para calcular a área dos triângulos, que é contemplada na demonstração da fórmula utilizada para esse cálculo e a capacidade de resolução de problemas, que é contemplada no momento da avaliação. Na vida escolar é essencial ter o conceito de área de triângulo bem fixado, porque o triângulo é o polígono mais elementar, e existe a necessidade de conhecer as suas propriedades mais frequentemente a partir do oitavo ano, quando se estuda congruência e semelhança de triângulos, no nono ano, quando se estuda as relações métricas e	

trigonométricas dos triângulos retângulos e no ensino médio, em que se estudam poliedros com faces triangulares.

Descrição de situação 1:

Objetivos: Conhecer e manusear ferramentas básicas do GeoGebra e verificar por meio de investigação matemática a constância da área de um triângulo se mantidos constantes a medida de um lado e de sua respectiva altura.

Metodologia: No início desta aula, os alunos deverão ter acesso a uma sala com computadores para duplas, e neles deverão ter acesso ao GeoGebra para que possam fazer a atividade, que consiste em realizar uma construção instruída pelo professor de um triângulo manipulável com área predefinida. O professor deve instruí-los para que construam um segmento de reta com comprimento predefinido e uma reta paralela com distância ao segmento também predefinida, pode ser um segmento de comprimento 4 e a distância entre ele e a reta sendo 7. A construção deve ser feita se valendo das ferramentas do GeoGebra e de modo que seja inspirado na construção com régua e compasso, para que os alunos, já aptos a realizar construções elementares como reta perpendicular a uma reta dada e reta paralela a uma reta dada em um ponto não tenham muita dificuldade em fazer a mesma construção com os instrumentos físicos.

Então será tomado um ponto qualquer na reta que junto aos pontos do segmento constituirão um triângulo. Essa é a parte vantajosa de utilizar o software, pois será possível mover o último ponto sobre a reta de deformar o triângulo, mas a área será mantida constante. Assim, os alunos poderão inferir que a área de um triângulo pode ser determinada de forma única se mantidos constantes a medida de um lado e sua respectiva altura.

Desenvolvimento: Quando os alunos tiverem acessado o software GeoGebra nos computadores, o professor deverá indicar a eles como entrar no modo Geometria. Então eles começarão criando um ponto A arbitrário e deverão construir uma circunferência centrada nesse ponto e com um raio predefinido, digamos, 4, marcarão um ponto B qualquer sobre a circunferência e utilizarão a ferramenta “Segmento de

Reta" para ligar os dois pontos. Depois, deverão construir uma outra circunferência com centro no ponto B e mesmo raio que a primeira, e traçarão uma reta sobre os pontos de intersecção das duas circunferências. Sobre o ponto de intersecção entre o segmento e a reta, construirão uma circunferência de raio predefinido, digamos, 7 e marcarão qualquer um dos dois pontos de intersecção entre essa circunferência e a reta e o chamarão de D. Depois, utilizarão a ferramenta "Reta Paralela" para construir a reta que passa por D e é paralela ao segmento. Daí marcarão um ponto qualquer C sobre essa reta, e com a ferramenta "Polígono" deverão clicar em A, depois em B, depois em C e depois em A novamente para definir o triângulo. Depois, na ferramenta "Área" deverão clicar no triângulo e aparecerá a medida da área de ABC, que se feito com as medidas sugeridas deve ser igual a 14. Por fim, os alunos poderão utilizar a ferramenta "Mover" no ponto A para transladar toda a construção, no ponto B para girar a construção, ou o mais interessante, no ponto C sobre a reta paralela para deformar o triângulo e verão que isso não altera a medida da área de ABC. Pode ser proveitoso também que os alunos façam um triângulo à parte dessa construção apenas criando três pontos, unindo-os com a ferramenta "Polígono" e com a ferramenta "Área" medir a sua área e por fim, mover algum dos pontos com a ferramenta "Mover" e verificar que uma translação mais geral de um ponto de um triângulo não mantem a área dele constante.

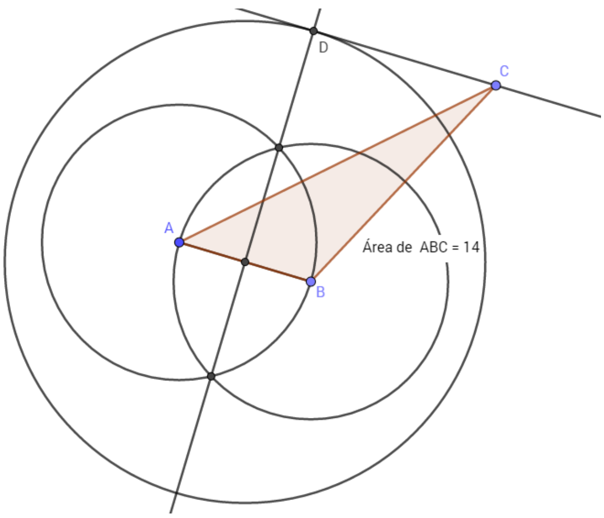
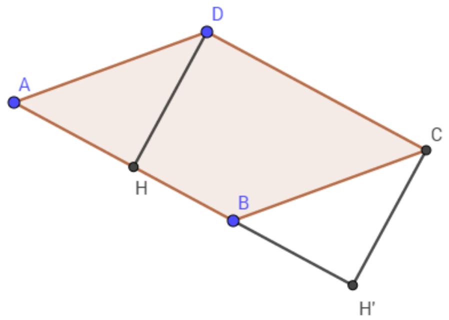


Figura 1 – Construção do triângulo com área predefinida.

Descrição de situação 2:

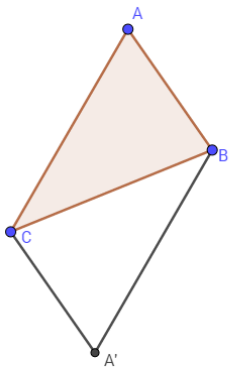
Objetivos: Demonstrar formalmente a fórmula que calcula a área de um triângulo com base na que calcula área de paralelogramo.

Metodologia: Terminada a construção feita no GeoGebra, os alunos deverão ter acesso a uma sala de aula com recurso a lousa e giz, para que o professor possa fazer a demonstração formal da fórmula da área de um triângulo. A demonstração deve ser feita com base nos conhecimentos dos alunos de área de retângulo, passando por área de paralelogramo e enfim chegando em área de triângulo.



Desenvolvimento: Inicialmente, o professor deverá relembrar os alunos que a área de um retângulo qualquer pode ser obtida pelo produto entre a medida do comprimento pela medida da altura, por definição. Depois, o professor deverá construir na lousa uma figura de um paralelogramo ABCD, colocar a projeção de D no segmento AB e chamar esse ponto de H e ligar D a H, como na figura ao lado. Depois, deverá prolongar o segmento AB e colocar a projeção de C na reta

Figura 2–Paralelogramo ABCD e retângulo HH'CD.



suporte de AB e chamar esse ponto de H'. Depois, deverá argumentar que a área do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo HH'CD, se valendo do fato que os triângulos ADH e BCH' são congruentes (pode se usar o caso LAL).

Dessa forma, o professor deverá concluir com os alunos que a área de um paralelogramo qualquer é dada pelo produto entre a medida de um dos seus lados pela respectiva altura, e enfatizar a diferença existente entre o cálculo da área de um retângulo e o cálculo da área de um paralelogramo, porque o primeiro pode ser feito partindo das medidas dos lados, mas o segundo não, já que geralmente a altura não coincide com o lado.

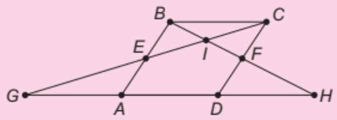
Finalmente, o professor deverá construir um triângulo ABC e depois, colocar um ponto A' de modo que se forme um paralelogramo ABA'C, como na figura ao lado.

Figura3–Triângulo ABC paralelogramo ABA'C.

Daí o professor deverá argumentar que os triângulos ABC e A'BC são congruentes (pode se usar o caso ALA), e então, afirmar que a área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo, ou seja, a área do triângulo é a metade da área do paralelogramo. Como a área do paralelogramo é dada pelo produto entre a medida de um lado pela respectiva altura, como o paralelogramo e o triângulo compartilham o lado AB e como a altura relativa ao lado AB para o para paralelogramo é a mesma para o triângulo, então a área do triângulo é dada exatamente pela metade do produto entre a medida de AB e a altura relativa a esse lado. O professor deverá mostrar também que essa escolha de lado é arbitrária, argumentando que a metade do produto entre o lado AC pela sua altura relativa também resultaria na área de ABC, da mesma forma que se fosse escolhido um ponto B' (ou C') ao invés de A' para formar o paralelogramo ABCB' (ou AC'BC) também se teria que a área de ABC é dada pela metade do produto entre a medida do lado AB e a sua respectiva altura.

Formas previstas de avaliação: O professor deverá avaliar os conhecimentos adquiridos nessa aula por meio da proposta de três questões matemáticas retiradas de provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas que estão a seguir:

17. Na figura abaixo, *ABCD* é um paralelogramo. O ponto *E* é ponto médio de *AB*, e *F* é ponto médio de *CD*. Qual é a razão entre a área do triângulo *GIH* e a área do paralelogramo *ABCD*?



A) 9/8
B) 5/4
C) 4/3
D) 3/2
E) 2

Figura 2 - Questão 17 OBMEP 2018 Nível 2 [1].

7. A figura abaixo é formada por dois quadrados de lado 6 cm e dois triângulos. Se *M* é o ponto médio de *AB*, qual é a área total da figura?

A) 90 cm^2
B) 96 cm^2
C) 100 cm^2
D) 108 cm^2
E) 120 cm^2

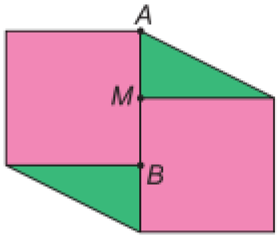


Figura 3 - Questão 7 OBMEP 2015 Nível 2 [2].

12. No paralelogramo *ABCD* da figura, os pontos *M* e *N* são pontos dos lados *BC* e *CD*, respectivamente. As áreas *a*, *b*, *c* e *d* são conhecidas. Qual é o valor da área *x*?

A) $c+d-a$
B) $a+c+d-b$
C) $a+c+d-2b$
D) $a+d-b$
E) $a+c-d$

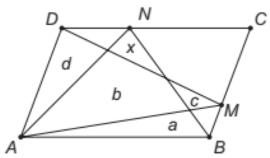


Figura 4 - Questão 12 OBMEP 2019 Nível 2 [3].

Referências

[1] Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/125nUD1ceE0YaKxWjh_en6cEfnAkZOVGI/view> Acesso em: 23 de junho de 2020

[2] Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/181xHhJ5nw-p35cDYXpP_j2rhIfIX0StI/view> Acesso em: 23 de junho de 2020

[3] Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1gMatT7QvIqwaY9BbISJRvKqzshS0zU9V/view> Acesso em: 23 de junho de 2020

O lucro do ponto de vista da porcentagem
Autores: Ana Suelen Fernandes Gomes
Ano Escolar: 9º. Ano do Ensino Fundamental
Ementa: Razão, Proporção, Porcentagens, Relações de Lucro e Custo, Média Aritmética Simples, Operações com números decimais.
Objetivos: Instigar o aluno a analisar as relações de lucro sobre produtos do cotidiano; calcular o lucro sobre um produto final composto de diferentes matérias-primas base e calcular porcentagens; compreender e escrever corretamente um número na forma de porcentagem.
Recursos Empregados: Lápis, papel, calculadora, folhetos de mercado ou prints de ofertas online, recurso didático previamente disponibilizado. Os materiais têm por objetivo facilitar nos cálculos, preencher folhas de resposta e facilitar a discussão entre os grupos.
Atividades: **1. Introdução:**

As relações comerciais são parte fundamental da estrutura econômica e social em que vivemos. Segundo a BNCC, o ensino de matemática no Ensino Fundamental deve fazer o aluno ser capaz de:

> “Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes” (Brasil, 2017, p.267)

Tendo isso em vista, este plano de aula foi produzido para criar uma discussão acerca das relações entre o preço de custo, o lucro e o preço final de produtos na região de São Paulo. Segundo o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2011 as refeições consumidas fora de casa correspondiam a quase 8,6% dos gastos mensais das famílias brasileiras. Dessa forma, pretende-se avaliar o custo do café com leite – mais conhecido como pingado – na Região Metropolitana de São Paulo.

Busca-se, por meio desse plano de aula, criar uma investigação sobre os preços de uma região desse produto. Analisar quais são os possíveis fatores que afetam o preço de custo e como isso influencia o preço de venda do produto. Vale ressaltar que esse modelo de plano de aula pode ser facilmente adaptado tendo em vista as diferenças culturais de cada região aplicada.

Esta é uma atividade para ser desenvolvida em 2 aulas de 50 minutos.

2. Atividades desenvolvidas:

Para o desenvolvimento desta atividade, vamos separá-la em quatro momentos que contam com objetivos singulares e que se complementam para o objetivo final: estudo pré aula, atividades guiadas, discussão coletiva, questionário pessoal.

a) Estudo pré-aula:

Objetivos: indicar para o estudante a pesquisa a ser trabalhada bem como a aproximação sobre o conteúdo a ser trabalhado.

Sugestão de leitura: https://www1.folha.uol.com.br/mercado/2018/05/preco-medio-do-cafezinho-em-sao-paulo-e-de-r-305-aponta-pesquisa.shtml

Os estudantes devem, individualmente, fazer um levantamento em padarias ou restaurantes sobre o preço do café com leite no estabelecimento e então buscar o preço do litro de leite e do kg de café em mercados locais. A entrega dessas informações deve ser feita em folhas de papel e dependendo da disponibilidade dos alunos, pode ser entregue em documento online.

b) Atividades guiadas:

Objetivos: analisar as informações trazidas pelos estudantes, calcular porcentagens de lucro sobre o produto inicial, discutir em duplas as conclusões possíveis.

Os estudantes devem ser separados em duplas para resolver o seguinte questionário:

(1) Preencha a seguinte tabela, de acordo com os preços obtidos pela pesquisa individual:

	Litro de Leite	kg do café	Xícara de pingado
Estudante 1			
Estudante 2			
Média			

(2) Tendo em vista, as informações anteriores, vamos simular qual é o custo de uma xícara de café feita em casa. Sabendo que uma xícara tem 240 ml e que são usadas 1 colher de café (5 g), calcule o preço da xícara de pingado feita em casa.

(3) Suponha que o custo de produção do pingado em uma padaria seja igual ao que foi calculado anteriormente. Calcule qual é a porcentagem de lucro obtida pelo comerciante na xícara de pingado.

(4) Em alguns bairros nobres de São Paulo, como Itaim Bibi e Perdizes, o preço do pingado é, em média, de R$ 9,50. Tendo isso em vista, qual é o lucro obtido por estabelecimentos que aderem a esse preço?

(5) O preço da xícara de pingado tem variado muito durante os anos. Quais são as possíveis causas dessa variação?

(6) O preço de custo obtido nesse questionário é condizente com a realidade? Por quê?

(7) Se usarmos os preços obtidos individualmente nas pesquisas, o resultado será muito diferente? Por quê?

Esse questionário deverá ser entregue ao professor no final da aula.

c) Discussão coletiva:

Objetivos: Discutir sobre as questões coletivamente a fim de construir um conhecimento sobre a matemática financeira no dia a dia.

Nesta parte da atividade, os estudantes coletivamente devem expor e discutir os resultados das questões (3) a (7) a fim de procurar: semelhanças e diferenças entre os resultados, se os cálculos estão de acordo e condizentes com o grupo, agregar novas informações compartilhadas pelo grupo.

d) Questionário pessoal:

Objetivos: expor, individualmente, num questionário as mudanças que perceberam sobre seu conhecimento antes e depois das atividades.

(1) Você acha que o preço do pingado nas diferentes regiões da cidade é dado por quais fatores?

(2) Quais medidas podem ser tomadas para diminuir o preço do pingado pelo comerciante?

(3) Quais medidas você pode tomar para diminuir o gasto com o consumo de pingado no dia a dia?

Esse questionário poderá ser feito em casa e ser entregue em sala de aula.

3. Conclusões

Ao final dessa aula, os estudantes poderão responder às seguintes questões:

(1) O que é o lucro sobre o preço de um produto?

(2) Quais são os custos de um comerciante sobre a venda de um produto?

(3) Por que a localização de um comércio altera o preço de venda de um produto?

(4) Como calcular porcentagens de custo e de lucro de produtos?

(5) Como a porcentagem auxilia na visualização da proporção?

(8) Qual escolha é mais saudável financeiramente de acordo com as minhas condições?

(9) Como fatores ambientais, climáticos, políticos e sociais podem influenciar no preço de produtos que chegam para o consumidor?

Além disso, esse plano de aula visa que os alunos criem uma visão crítica e analítica sobre a compra de produtos, sendo capazes de analisar a influência de diferentes fatores, como custo de matéria prima, de manutenção de quadro de funcionários e da influência da região estudada em termos de valor do aluguel e capacidade aquisitiva dos frequentadores sobre o preço final de um produto. Essa visão pode trazer uma maior conscientização sobre os gastos pessoais de cada aluno e pode ser aplicada em diversas situações, sendo assim, um mecanismo de controle da saúde financeira de uma pessoa.

Formas previstas de avaliação:

Podemos separar a avaliação em:

- 15% - Entrega da pesquisa do estudo pré-aula;
- 30% - Entrega do questionário do estudo em sala de aula;
- 30% - Participação na discussão coletiva;
- 25% - Entrega do questionário pessoal.

Referências:

Internet:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 25 maio 2020.

AMORIM, Daniela. Brasileiro aumenta despesa com alimentação fora de casa. **O Estado de São Paulo.** 04 de outubro de 2019. Economia & Negócios <https://economia.estadao.com.br/noticias/geral,brasileiro-aumenta-gasto-com-alimentacao-fora-de-casa,70003036906> Acesso em 25 de maio de 2020.

Livro:

BÄCHTOLD, Ciro. **Contabilidade Básica.** Curitiba, Instituto Federal Paraná, 2011. Disponível em <http://redeetec.mec.gov.br/images/stories/pdf/proeja/contabil_basica.pdf>. Acesso em 25 de maio de 2020.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria José. **Praticando Matemática – 9º ano.** São Paulo, Editora Brasil, 2015. (Coleção praticando matemática, v. 9)

Funções: Uma Abordagem Intuitiva

Clayton Bomfim Biscalchini

Ano Escolar: 9º. Ano do Ensino Fundamental

Ementa: noção intuitiva de função; representação no plano cartesiano de funções inteiras e reais; descrição de funções polinomiais do primeiro grau através de uma lei de formação.

Objetivos: examinar situações do dia a dia que descrevem funções do primeiro grau; identificar relações lineares entre grandezas discretas e contínuas; esboçar representações gráficas de tais relações e descrevê-las através de leis de formação.

Recursos Empregados: lousa, folha sulfite, régua, garrafa pet, mangueira/torneira.

Atividades:

1. Introdução

A matemática percorreu um longo caminho desde que Leibniz (1646-1716) propôs pela primeira vez o termo "função" para descrever as relações matemáticas que representavam as curvas que fascinavam os matemáticos de seu tempo. Apesar de surgir no contexto do cálculo diferencial e integral, um conteúdo hoje considerado de nível superior, a aplicabilidade de funções abrange conteúdos dos mais simples aos mais complexos, dos mais aplicáveis no dia a dia aos mais abstratos. Dessa forma, é necessário que exista uma base bem-fundada do estudo de funções desde o ensino fundamental, de forma que o estudo mais complexo de suas propriedades nos anos escolares seguintes não seja prejudicado.

Matematicamente, dados dois conjuntos A e B (não-vazios), uma função de A em B é um subconjunto f do produto cartesiano entre A e B onde, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Os conjuntos A e B são nomeados como domínio e contradomínio de f, respectivamente. Toda função do tipo $f: A \rightarrow B$, onde $f \subseteq \mathbb{R}^2$, pode ser representada graficamente no sistema de coordenadas cartesiano.

Além da definição formal apresentada, uma função pode ser descrita de maneira intuitiva como uma relação de dependência entre duas grandezas, onde cada valor da primeira corresponde a um valor único da segunda, e essa correspondência é determinada através de uma lei matemática, chamada de lei de formação. Esses valores podem ser representados como pontos no plano cartesiano, gerando uma representação gráfica da função.

Este plano de aula detalha uma proposta de atividade que busca apresentar o conceito de função através da segunda abordagem apresentada (a intuitiva) ao aluno do 9º ano através de exemplos simples do primeiro grau (funções do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, onde seu gráfico forma uma reta), formalizando tais conceitos ao fim da aula.

2. Atividades desenvolvidas

A atividade proposta é separada em três momentos, detalhados abaixo: i) abordagem inicial da noção intuitiva de função; ii) retomar as relações descobertas e propor desafios; iii) formalizar os conceitos apresentados.

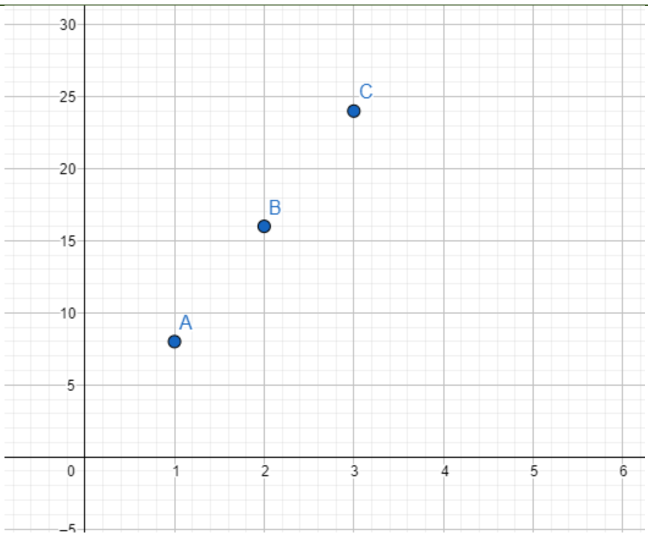
i) Este primeiro momento consiste em apresentarmos a noção intuitiva de funções, propondo situações simples que descrevam relações lineares entre grandezas e utilizando uma representação de tabelas. O professor também pode separar a turma em dois grupos: um será responsável por desenvolver as representações em tabela e no plano cartesiano do exemplo 1, e o outro grupo fará o mesmo para o exemplo 2.

Exemplo 1: “Sabendo que uma caixa de lápis de cor possui 8 lápis, quantos lápis terão em duas caixas? E três caixas? E quatro?” Através desse questionamento, é possível construir uma pequena tabela que represente a relação, sendo montada passo a passo com os alunos:

Caixas	**Lápis**
1	8
2	16
3	24
...	...
...	56
...	...
15	...
...	...

Não é necessário que todos os pontos apresentados sejam devidamente calculados, mas é preciso reforçar a ideia de que é possível continuar adquirindo mais caixas, de maneira infinita, gerando cada vez mais duplas de valores.

Através da tabela, propor uma representação alternativa (neste momento, é recomendado que os alunos estejam familiarizados com a representação de pontos no plano cartesiano): associaremos cada par de caixas e quantidade de lápis a um par ordenado e representaremos cada ponto no plano cartesiano. Os alunos podem utilizar folhas sulfite e régua para traçarem o plano sozinhos ou a atividade pode ser feita no quadro em conjunto.

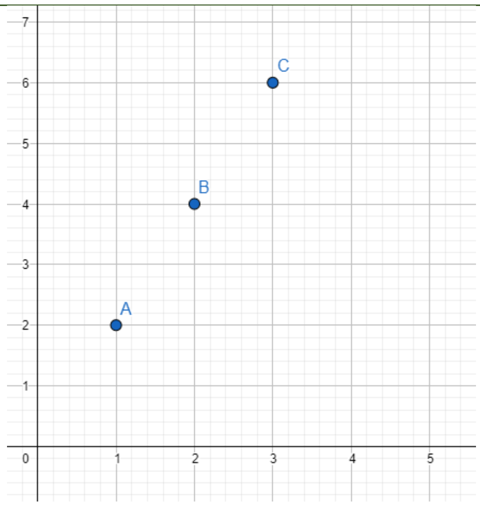


Exemplo 2: “Se a cada segundo uma garrafa é preenchida com 2ml de água, quantos ml de água terá a garrafa após 2 segundos? E após 3 segundos? E após 4?” Exatamente como exemplo anterior, uma tabela que representa a relação entre a passagem do tempo e a quantidade de água na garrafa deve ser feita, além de uma representação gráficas destes pontos.

Obs. O exemplo 1 trata-se de quantidades discretas (um, dois lápis) e no gráfico não podemos unir os pontos – observe que não dizemos um lápis e meio; e no exemplo 2 temos quantidades contínuas (água – líquido), e nesse caso podemos ter 1,5 ml de água, e no gráfico podemos unir esses pontos.

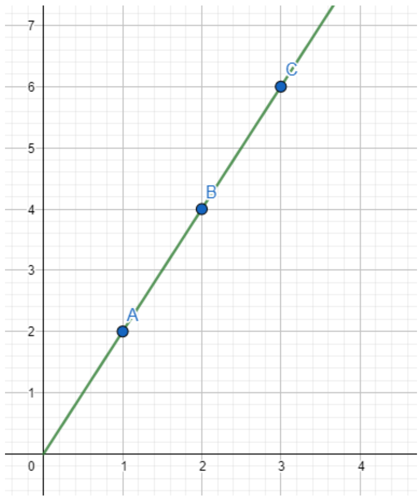
Tempo passado (s)	Quantidade de água (ml)
1	2
2	4
3	6
...	...

O mesmo é válido para a representação gráfica (podendo unir os pontos):



Desta vez, entretanto, é necessário provocar os alunos: dentre os materiais necessários estão uma mangueira e uma garrafa pet. De maneira que toda a turma possa observar, o professor deve preencher a garrafa de água, levantando o questionamento: “em algum momento a garrafa parou de ser preenchida?”, isto é, a cada segundo é depositado 2ml, em frações de segundos, a garrafa continua sendo preenchida com frações de 2ml.

A partir disso, quantos ml de água terá a garrafa após meio segundo? E após 1 segundo e meio? Esses questionamentos devem instigar os alunos a perceberem uma diferença primordial entre os dois exemplos: enquanto o exemplo 1 lida com quantidades inteiras e **discretas**, o exemplo 2 lida com quantidades reais e **contínuas**. A partir da ideia da continuidade do preenchimento da garrafa, podemos ligar os pontos colocados no plano cartesiano por uma reta:



É preciso reforçar que no primeiro exemplo, os pontos não podem ser conectados por uma reta: não é possível comprar “meia caixa”, ou que uma caixa contenha frações de lápis. Para o professor, isso significa que os valores intermediários não pertencem ao domínio da função. Mesmo que os alunos não precisem compreender o indumentário matemático por trás da diferença, a mesma deve ser esclarecida pela própria situação proposta: a função, quando representa uma situação, deve descrevê-la apropriadamente.

ii) Ao fim do primeiro momento, a última atividade feita pelos alunos antes de traçar a reta é encontrar novos pontos da mesma. O segundo momento, por sua vez, é reservado para que essa ideia seja fixada: cabe ao professor sugerir desafios baseados nos exemplos apresentados.

- Quantos lápis teremos 10 caixas? E em 100? E em 2500 caixas?
- Quantos $m\ell$ de água existirão na garrafa após 10 segundos? E 100 segundos? E 2500 segundos? (Caso questionado pelos alunos, a capacidade da garrafa é irrelevante)

Os pontos calculados devem ser colocados na tabela. A partir disso, questionar os alunos em qual foi o método utilizado para encontrar os valores pedidos. Neste momento, apresentamos o conceito de **lei de formação**, propondo uma generalização do método utilizado pelos alunos (multiplicar a quantidade de caixas por 8 e multiplicar a quantidade de segundos por 2), isto é, expressões em que dado um elemento do domínio, seu resultado será sua imagem correspondente:

$$L = 2C$$
$$A = 2T$$

Onde L representa a quantidade de lápis, C a quantidade de caixas, A a quantidade de água em $m\ell$ e T o tempo passado.

iii) No último momento da atividade, devemos formalizar os conceitos apresentados, listando-os e conectando-os com as atividades feitas pelos alunos:

- Uma função é uma relação entre duas grandezas: lápis e caixas, água na garrafa e tempo passado;
- Podemos representar uma função através de uma tabela de valores, assim como pontos no plano cartesiano.
- Funções possuem uma lei de formação, isto é, uma expressão que conecta as duas grandezas: dada a quantidade de caixas, basta multiplicarmos por 8 que teremos a quantidade total de lápis.

3. Conclusões

Através dessa atividade, o aluno desenvolverá noções básicas de funções polinomiais do primeiro grau, representando-as como tabelas e no plano cartesiano e conseguindo interpretar e reconhecer suas leis de formação.

A partir disso, é possível apresentar conceitos mais complexos, como funções polinomiais do tipo $f(x) = ax + b$ onde $b \neq 0$, identificação de uma lei de formação dado um gráfico, além de funções constantes. Outra atividade possível é a comparação do crescimento entre os exemplos apresentados: ambas as funções são crescentes, mas uma possui um crescimento mais acentuado, perceptível graficamente.

Outro conceito importante é sobre as quantidades contínuas e discretas, cujos gráficos são representados de formas diferentes.

Formas previstas de avaliação: participação das atividades, além dos gráficos e tabelas produzidos.

Referências bibliográficas:

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 30 mai. 2020.

PONTE, J. P. **The History of the Concept of Function and Some Educational Implications**. The Mathematics Educator, v. 3, n. 2, 1992. Disponível em < http://math.coe.uga.edu/TME/Issues/v03n2/Ponte.pdf>. Acesso em: 26 mai. 2020.

CAPUTI, A.; MIRANDA, D. **Bases Matemáticas**. Santo André: Universidade Federal do ABC, 2007.

DANTE, L.R. **Tudo é Matemática 9º Ano**. São Paulo: Editora Ática, 2009.

Verificando o teorema de Pitágoras com software GeoGebra

Diogo Alves Martins

Ano Escolar: 9º Ano do Ensino Fundamental

Ementa:

Teorema de Pitágoras; Relação existentes no triângulo retângulo; Padrões numéricos e geométricos; Resolução de problemas; Relações métricas no triângulo retângulo.

Objetivos:

- Relacionar as áreas dos quadrados construídos a partir dos lados de um triângulo retângulo e assim construir formalmente o conceito do Teorema de Pitágoras;
- Compreender a relação entre hipotenusa e catetos abordada no Teorema de Pitágoras;
- Identificar e resolver situações que envolvam a utilização do Teorema de Pitágoras;
- Identificar e interpretar a aplicação do Teorema de Pitágoras em situações-problema do seu cotidiano.

Recursos Empregados:

Computador e Software Geogebra[1].

(Existe uma nova linha no ensino de geometria vem recebendo o nome de Geometria Dinâmica. Trata-se da utilização de softwares de construções geométricas que permitem a transformação de figuras mantendo certo número de suas propriedades. Os materiais têm por objetivo mostrar, na prática, a comprovação e aplicação do Teorema Pitágoras.)

Atividades:

1. Introdução

Pitágoras foi um matemático e filósofo grego que viveu por volta de 572 a.C. Nascido na ilha de Samos, ele viajou por muitos lugares, como Pérsia e Egito, e de acordo com alguns relatos é possível que tenha sido discípulo de Tales de Mileto. Em Crotona, onde atualmente é a Itália, ele fundou a Escola Pitagórica, que consistia em um centro de estudos de Matemática, Ciências Naturais, Filosofia, entre outros.

O nome de Pitágoras é dado a um teorema por ter sido o primeiro a demonstrá-lo, apesar de os babilônios e os egípcios já o utilizarem em construções e em medições de terras. O teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. Na geometria euclidiana, o teorema afirma que:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

[1] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA. O GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo.

Por definição, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto, e os catetos são os dois lados que o formam. O enunciado anterior relaciona comprimentos, mas o teorema também pode ser enunciado como uma relação entre áreas:

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos.

Para ambos os enunciados, pode-se equacionar

$$c^2 = b^2 + a^2$$

onde c representa o comprimento da hipotenusa, e a e b representam os comprimentos dos outros dois lados.

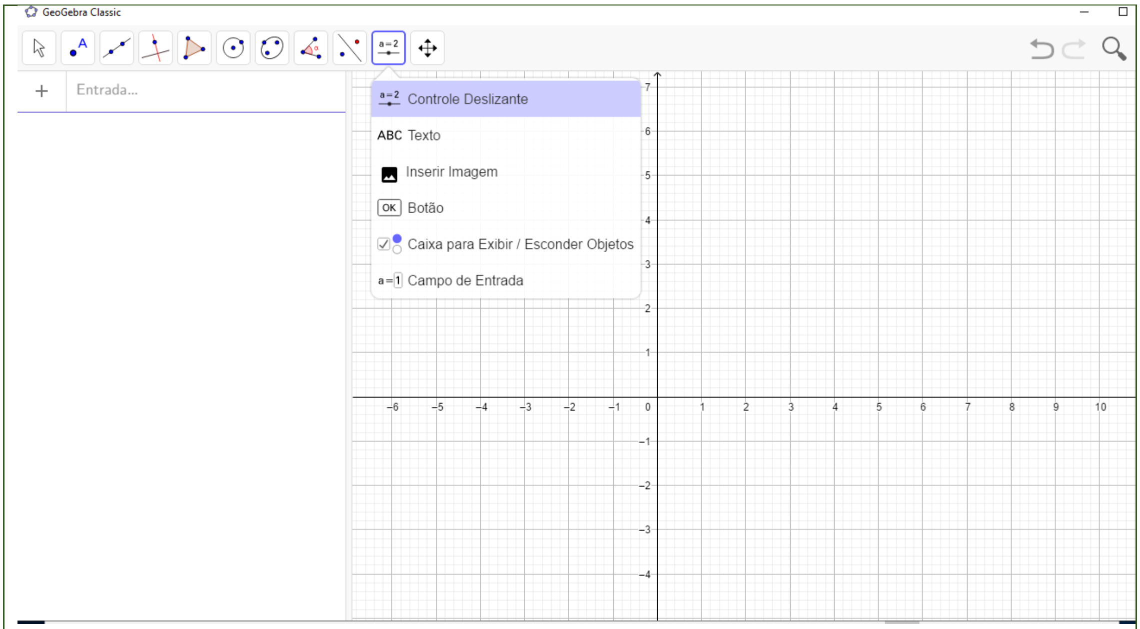
2. Atividades desenvolvidas

A atividade proposta é separada em dois momentos, detalhados abaixo: i) Apresentação do Geogebra e construção das figuras geométricas utilizando o Geogebra; ii) Verificação do Teorema de Pitágoras.

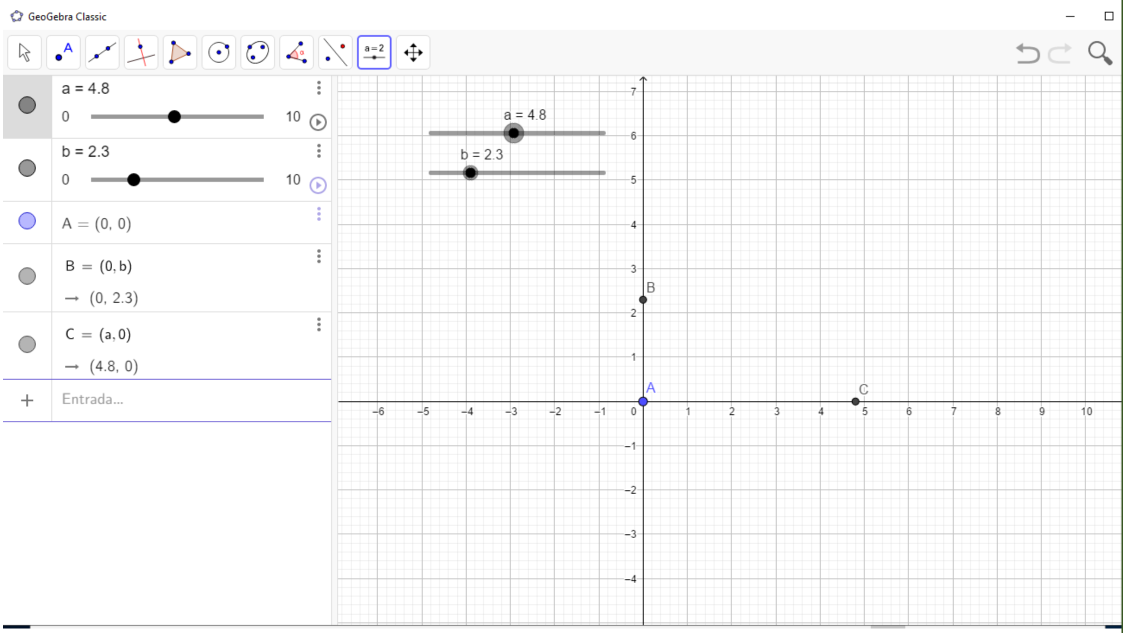
i)

<u>Passo 1:</u> (Construir um triângulo retângulo no GeoGebra.)

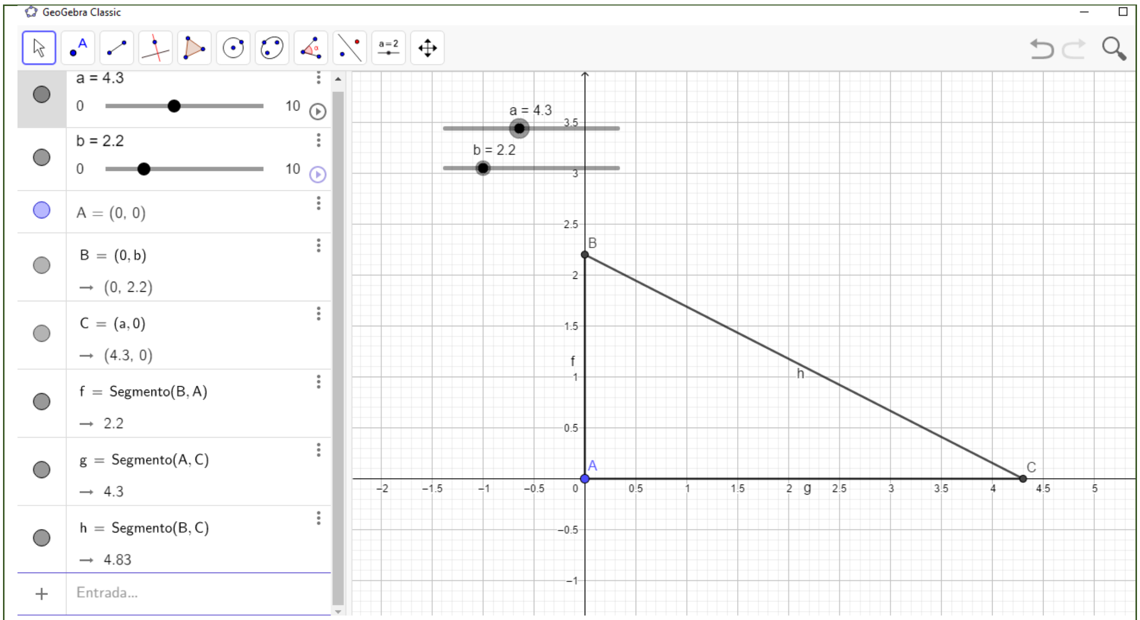
Inicialmente, solicite aos alunos que insiram dois controles deslizantes (variáveis a e b variando de 0-10).



Através desse controle poderemos variar os catetos. A seguir, utilizando a barra de comando inserir 3 pontos distintos (vértices do triângulo). Na barra de comando digitamos os comandos A=(0,0) B=(0,b) C=(a,0):

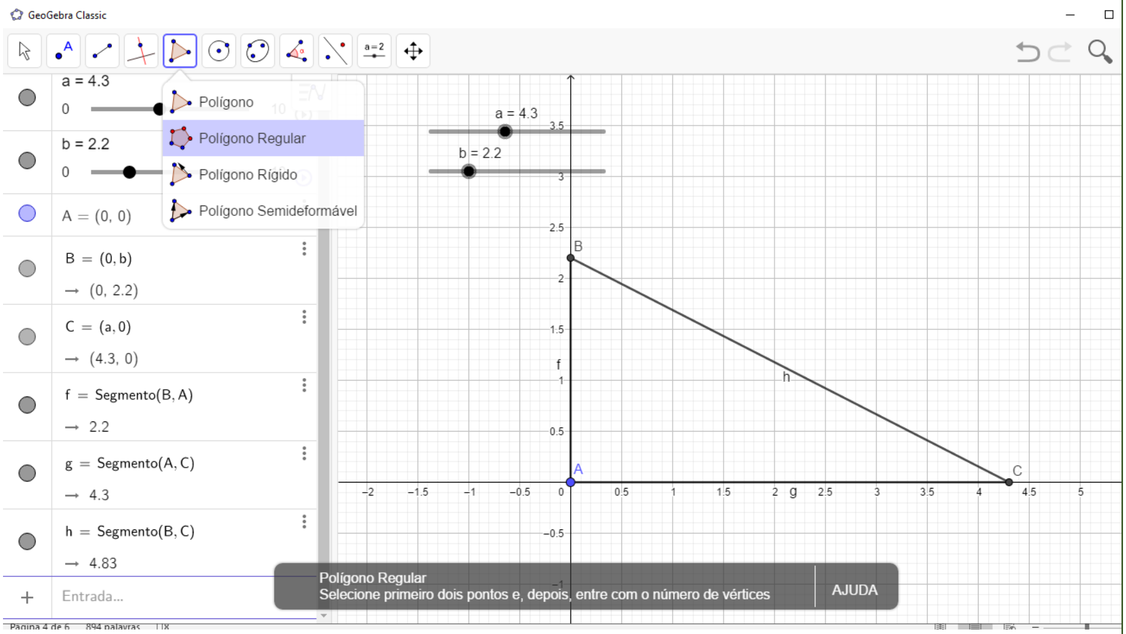


Utilizando o comando segmento criamos as arestas do triângulo ABC, com reto em A. (Verificar se o controle deslizante modifica as arestas do triângulo)

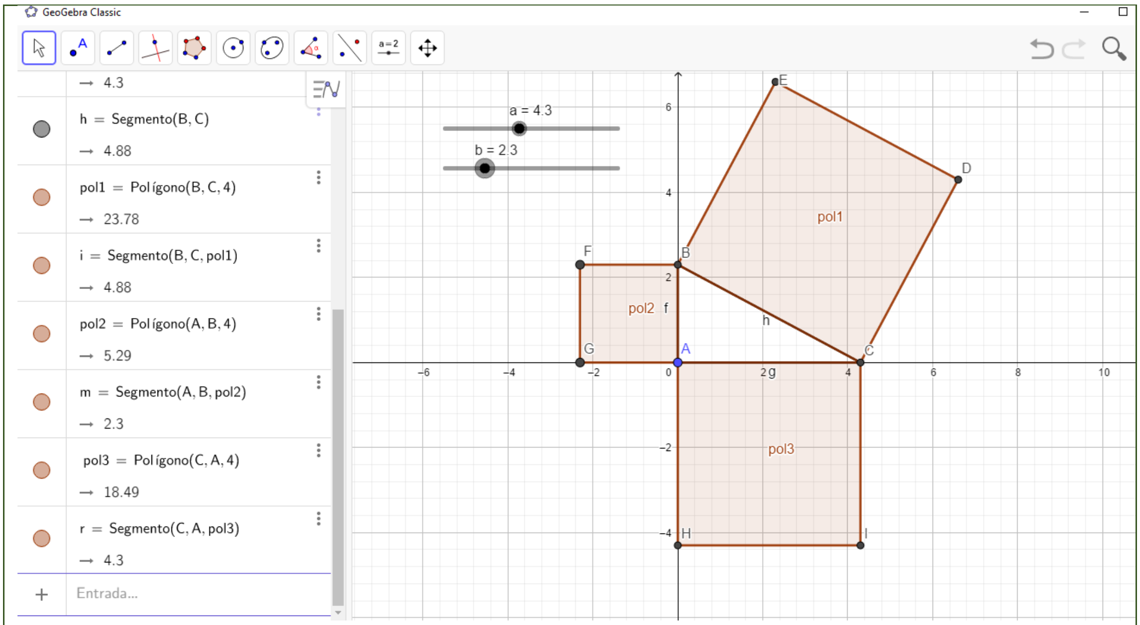


<u>Passo 2:</u> (Construir quadrados nas arestas do triângulo retângulo)

Na barra de ferramentas, utilizando o comando polígono regular, basta clicar nos pontos C e A, digitar 4 quando o número de lados for solicitado.



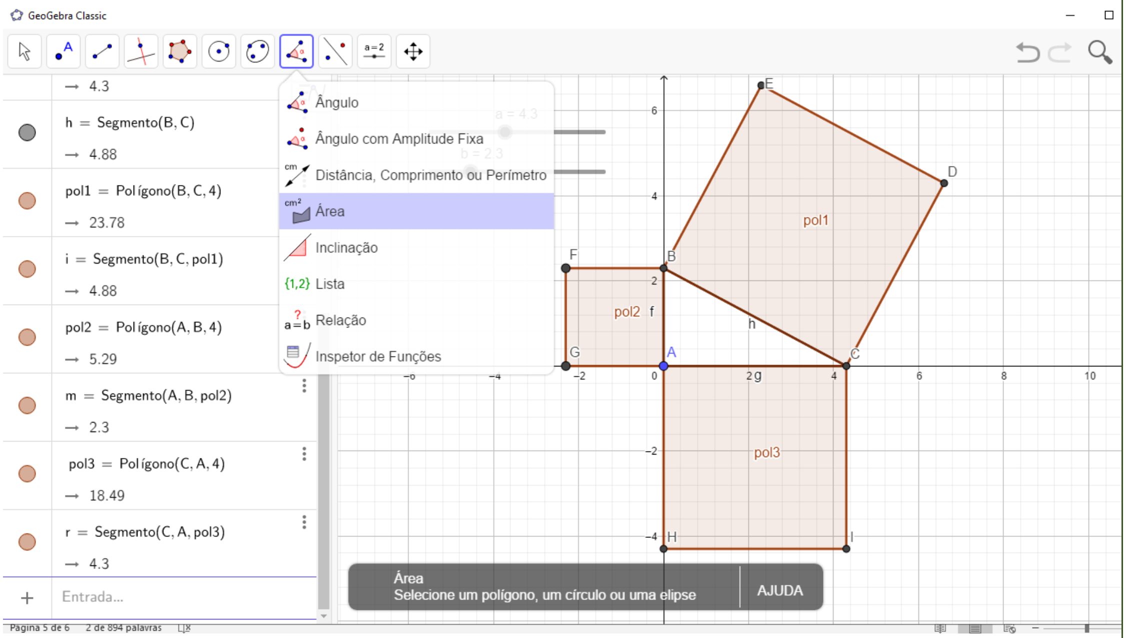
Assim construiremos um quadrado com a hipotenusa do triângulo retângulo. Para construir os demais quadrados nos dois vértices restantes (catetos), basta repetir a mesma sequência.



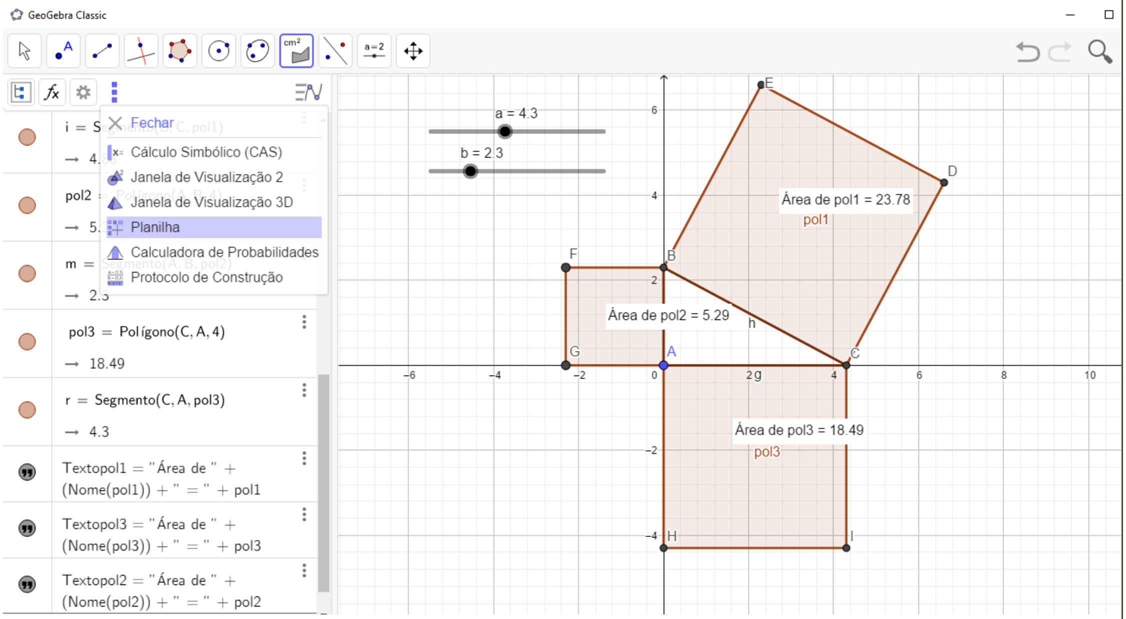
ii)

<u>Passo 1:</u> (Calcular área dos quadrados criados a partir das arestas do triângulo)

Na barra de ferramentas, utilizando o comando área, basta clicar nos quadrados que pretendemos calcular a área.

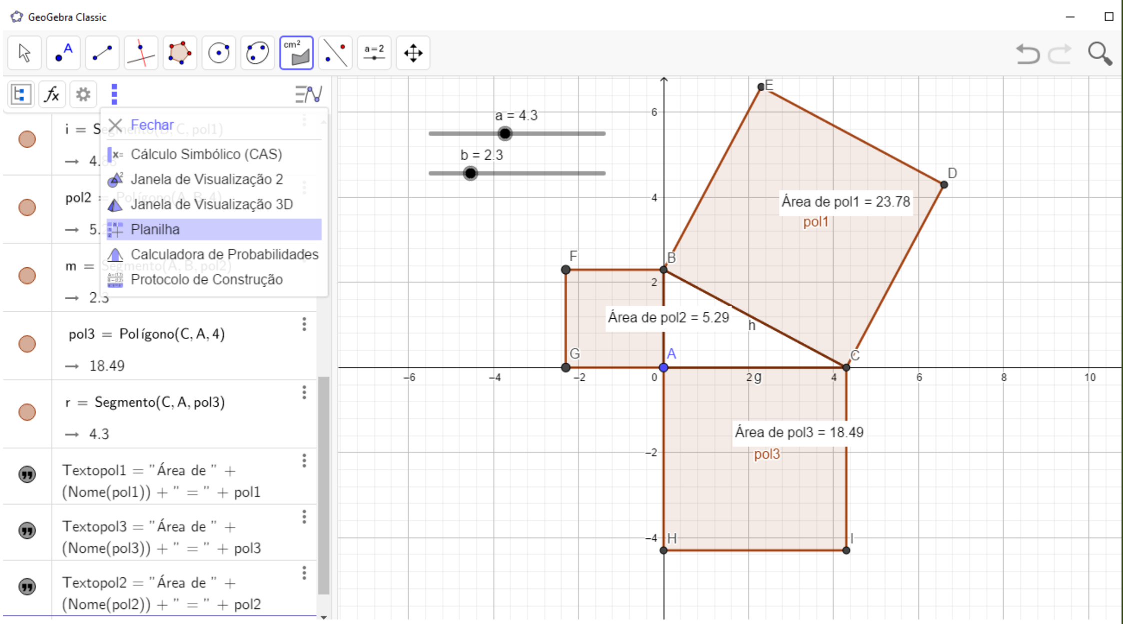


Assim poderemos comparar as áreas calculadas.

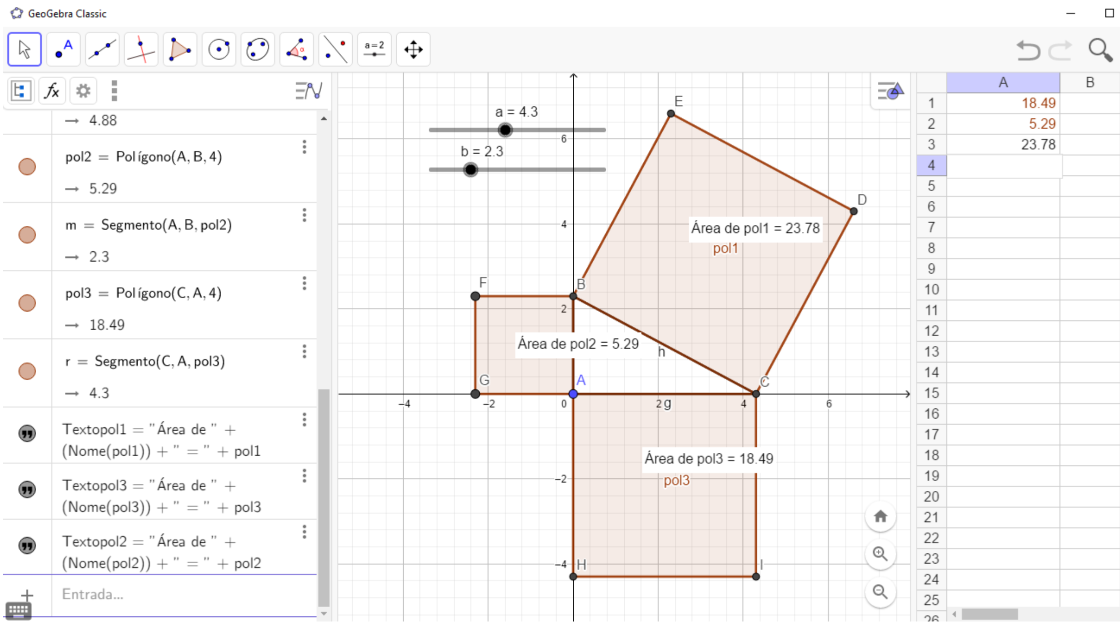


Passo 2: (Comparar resultado encontrados)

Na barra de ferramentas, utilizando o comando planilha, podemos somar o valor das áreas dos catetos calculadas anteriormente:



Basta na célula A1 digitar pol2 e na célula A2 digitar pol3. Por fim, na célula A3 digite = A1+A2. Com estes comandos podemos comparar o valor da soma das áreas do pol2 e pol3 com valor da área do quadrado formado no vértice hipotenusa, assim verificar a validade do teorema de Pitágoras.



Podemos agora variar com os controles deslizantes, variando assim os catetos, e as áreas, e verificar que o teorema é válido para diferentes triângulos retângulos.

3. Conclusões

Devido à dificuldade que muitos alunos encontram na identificação e compreensão do Teorema de Pitágoras, bem como em sua aplicação na resolução de situações-problema, acreditamos ser importante a aplicação deste plano de aula. Como resultado, o aluno poderá construir e compreender de forma consistente o conceito deste teorema, relacionando-o com as mais diversas situações de seu cotidiano. É na disciplina de Matemática do Ensino Fundamental que o aluno irá construir os conceitos básicos, e posteriormente poderá abstrair conceitos novos em outros níveis de ensino, como na sequência o próprio Ensino Médio.

As tecnologias não substituem o professor que é o ator principal no processo de aprendizagem, não podemos descartar esses instrumentos, mas nos apropriar dos mesmos para impulsionar efeitos positivos no contexto escolar. O uso de tecnologia não possui apenas o papel de facilitador do processo de aprendizagem, mas seu objetivo maior está em ajudar a desenvolver habilidades e construir processos de conceituação para que o indivíduo possa participar da sociedade do conhecimento.

Formas previstas de avaliação:

Os alunos serão avaliados de acordo com a participação na atividade de construção dos entes geométricos e cálculos efetuados no Geogebra.

Referências:

Dias, M. S. S. Resolução de problemas geométricos no GeoGebra. In: I Conferência Latino Americana de GeoGebra, São Paulo, 2012.

Petla, R. J. Geogebra – possibilidades para o ensino de matemática. União da Vitória: PDE/SEED, 2008.

Manual Geogebra Manul: (site).

Disponível em: https://wiki.geogebra.org/pt/Manual. Acesso em: 31, mai/2020.

Teorema de Pitágoras

Guilherme Monteiro Schmillevitch

Ano escolar: 9º. Ano do Ensino Fundamental

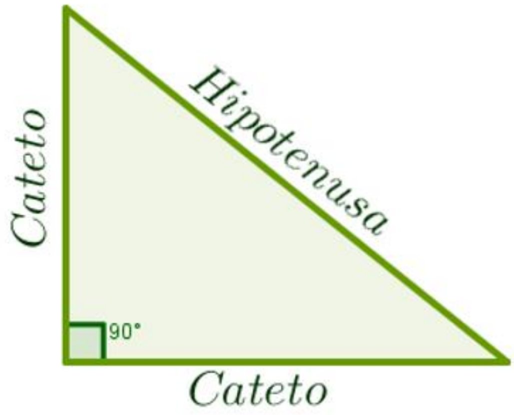
Ementa: Triângulo retângulo, noções de ângulos, triângulos retângulos, ângulos complementares e suplementares, congruência de triângulos, área de quadrado e triângulo.

Objetivos
Introduzir o Teorema de Pitágoras através de recortes e atividades práticas e construir e remanejar figuras geométricas para visualização.

Recursos Empregados
Uma folha de papel cartão ou EVA; Régua; Lápis comum; Lápis de cor; Tesoura; Atividades impressas.

1. Introdução

O teorema de Pitágoras é uma expressão matemática que relaciona os lados de um triângulo retângulo, conhecidos como hipotenusa e catetos. Esse teorema não é válido para triângulos acutângulos ou obtusângulos, apenas para os retângulos. Para que um triângulo seja considerado retângulo, basta que um de seus ângulos tenha medida igual a 90°, ou seja, que o triângulo tenha um ângulo reto. O lado oposto a esse ângulo é o maior lado do triângulo retângulo e é chamado de hipotenusa. Os outros dois lados menores são chamados de catetos, como mostra a figura a seguir:



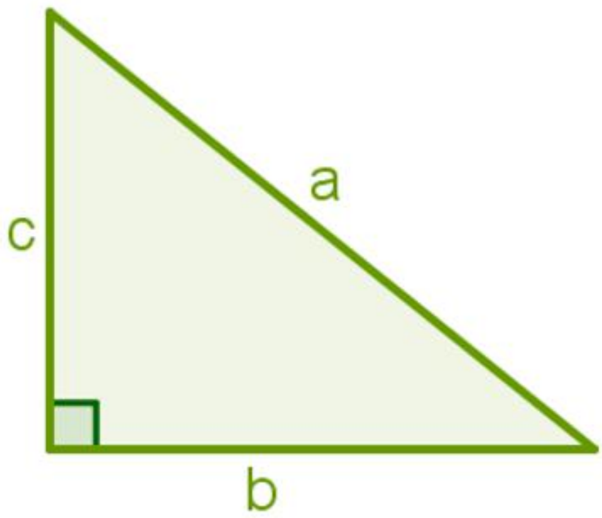
Expressão matemática: Teorema de Pitágoras

O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Essa **expressão** também pode ser representada na forma de equação. Para isso, faça **hipotenusa** = a, cateto 1 = b e **cateto** 2 = c. Nessas condições, teremos:

a2 = b2 + c2

Essa é uma fórmula válida para o seguinte **triângulo**:



Atividade principal:

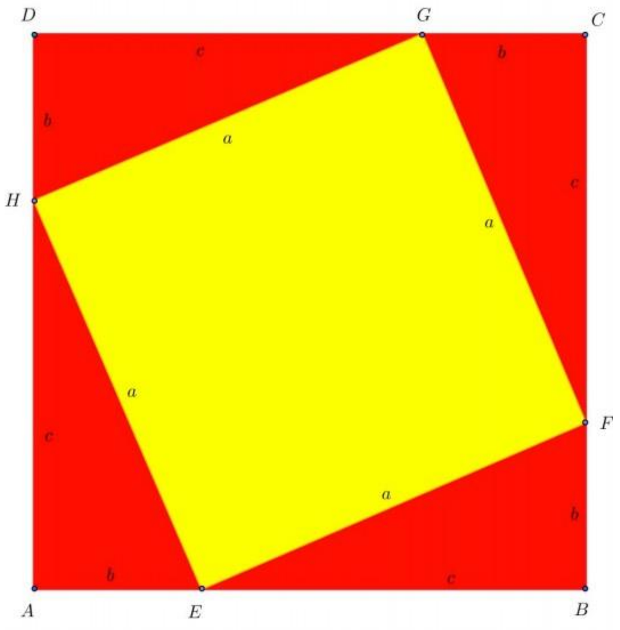
Se presencial:

Siga as etapas seguintes:

- Construa e recorte dois quadrados congruentes, ABCD e MNOP, com lado de medida qualquer.
- No quadrado ABCD, a partir do vértice A, marque quatro pontos, E, F, G e H a uma distância b de cada vértice, no sentido anti-horário. Chame de c a outra medida que compõe o lado do quadrado, de modo que AB= b+c.
- Com régua e lápis, una os pontos E, F, G e H, nessa ordem, obtendo assim quatro triângulos retângulos, pinte-os todos de uma mesma cor (Na figura

seguinte usamos vermelho). Esses triângulos são congruentes?

- Chame de a a medida da hipotenusa dos triângulos retângulos formados sobre os vértices do quadrado. Veja figura abaixo:



- Recorte os quatro triângulos retângulos formados nos vértices do quadrado maior.
- Pinte o quadrilátero EFGH de uma cor diferente daquela usada para os triângulos. *Esse quadrilátero é um quadrado? O que garante isso?*
- Sobre o quadrado MNOP, remonte a figura como inicialmente.
- Retire a peça quadrada do centro. Qual a área desta peça?
- Manipulando os 4 triângulos retângulos anteriores, monte sobre o quadrado MNOP dois retângulos, de modo que tenham em comum um único vértice.

Se ensino à distância[2]:

Refazer a atividade acima utilizando alguma plataforma de simples manipulação de objetos (exemplo power point, onde é possível manipular objetos de forma simples.), realizando a atividade junto com os alunos.

[2] No momento em que o autor estava elaborando este plano, o País passava por um momento de pandemia.

EQUAÇÕES DO 2º GRAU: UMA ABORDAGEM DIFERENTE

Amanda Gonçalves Palma

Jeferson Vinícius Moreira

Ano escolar: 9º Ano do Ensino Fundamental

Ementa

Equações do 2º grau; cálculo de raízes de equações do 2º grau; resolução de situações-problema envolvendo equações do 2º grau; potenciação;

Objetivos

- Reconhecer uma equação quadrática;
- Diferenciar equações completas e incompletas;
- Apresentar conceitos matemáticos algébricos que permitam aos alunos interpretar, ilustrar, solucionar e elaborar situações-problema envolvendo equações quadráticas.
- Explorar a participação e interação dos alunos em discussões acerca do conteúdo apresentado pelo professor.
- Elogiar a postura cooperativa dos alunos durante as discussões e apontar tópicos relevantes no estudo de equações quadráticas.

Recursos Empregados

- Lousa e giz: formalização do conteúdo teórico e desenvolvimento de cálculos.
- Computador e projetor: exibição de imagens através de uma apresentação de slides e vídeo explicativo

Atividades:

1. Introdução

É evidente que o tema “equações do segundo grau” é muito relevante no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Embora essa importância seja consenso entre os especialistas, os alunos carecem de maiores justificativas acerca da aplicabilidade dessas equações e das estratégias e métodos empregados para resolvê-las. É por isso que cabe ao professor de matemática trabalhar a fim de adotar abordagens esclarecedoras e que, ao mesmo tempo, suscitem dúvidas e fomentem o pensamento independente dos seus alunos.

Inicialmente, sugere-se a apresentação de um vídeo que retrata o contexto histórico de desenvolvimento do pensamento matemático com enfoque na contribuição de Bháskara para o método mundialmente conhecido de resolução de equações quadráticas. Neste momento, o professor deve atuar como um mediador, interrompendo a exibição do vídeo para tecer comentários construtivos a respeito da importante contribuição das antigas civilizações para a matemática que conhecemos hoje.

No segundo momento, reconhecendo a realidade acadêmica dos alunos do 9º do ensino fundamental, a proposta é que o professor apresente, de maneira usual, os conceitos algébricos que possibilitem aos alunos reconhecer equações do segundo grau e classificá-las como completas ou incompletas. Nesse aspecto, trabalhamos o formalismo matemático, em muitos casos dispensável na educação básica, mas que deve auxiliar os alunos na compreensão desse tema. É importante e necessário que o professor tenha muito cuidado ao explorar a formalidade através dos símbolos e sinais, pois o objetivo é fomentar o interesse do aluno e não o afastar pelo rigor excessivo e desnecessário.

No terceiro momento, o professor deve apresentar os métodos de resolução das equações do segundo grau completas (método de Bháskara e soma e produto) e incompletas, valorizando o envolvimento dos alunos que é feito através da exposição de dúvidas ou qualquer outra manifestação de interesse pelo tema apresentado.

Na quarta e última etapa, o objetivo é potencializar o conhecimento dos alunos, estabelecendo conexão entre teoria e prática, suscitando o pensamento criativo e compreendendo as relações entre teoria, procedimento e aplicação. Para que essas competências sejam trabalhadas, sugerem-se algumas atividades lúdicas que possibilitam a reafirmação do conhecimento dos alunos e permitem ao professor identificar possíveis carências na compreensão do tema pelos alunos

Dessa forma, empenhados em nosso objetivo de oferecer uma aula esclarecedora e com o intuito de fomentar o pensamento independente e criativo dos alunos e com base nas propostas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)., ressaltamos a importância do reconhecimento da matemática como uma ciência, permitindo o desenvolvimento do espírito de investigação, valorizando a capacidade de produzir argumentos e compreender a relação entre conceitos e procedimentos e, frequentemente, utilizar ferramentas matemáticas para enfrentar e resolver problemas do cotidiano.

2. Atividades desenvolvidas

a) Abordagem histórica

Sugerimos que inicialmente, o docente apresente o vídeo, cujo link apresentamos a seguir: "Esse tal de Bháskara", disponível no https://www.youtube.com/watch?v=dw6wD5bP5vw, fazendo algumas pausas para que questões importantes sejam discutidas com os alunos.

Em seguida, a turma será dividida em grupos de 5 pessoas e cada grupo sorteará uma das civilizações antigas (entre os egípcios, babilônicos, gregos, hindus e europeus), e cada grupo irá realizar uma pesquisa na internet (direcionadas por questões apresentadas pelo professor) sobre seus feitos com a equação do 2º grau.

Após a pesquisa, os alunos deverão apresentar as informações encontradas aos demais colegas de classe em forma de seminário, além de anotarem em uma folha de papel, questões relacionadas com sua pesquisa, juntamente com suas respectivas respostas. Essas questões serão colocadas em uma caixa para serem sorteadas.

A atividade será trabalhada em forma de competição e cada acerto valerá um ponto. O professor sorteará as perguntas e os grupos terão que respondê-las em uma folha de papel, o grupo que obtiver maior pontuação ganha um prêmio (a critério do professor).

Esta atividade será avaliada pela pesquisa efetuada, pela apresentação feita, pelas questões elaboradas e pela participação nas perguntas e respostas.

b) Apresentação do conteúdo

O próximo passo será apresentar aos alunos, na lousa, as definições de equações do 2º grau, como reconhecê-las, o que são equações completas e incompletas e, também o Método de Bháskara.

Como instrumento de auxílio na explicação o professor utilizará o GeoGebra[3] (acesse a homepage: https://www.geogebra.org/) para apresentar aos alunos as formas gráficas destas equações.

---

[3] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e **multiplataforma** para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA. O GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente,

Neste momento, é importante que o professor direcione a aula a conceitualização matemática, aproprie-se de simbologia e formalismo matemáticos, apresentando aos alunos conceitos essenciais de maneira coerente e completa, agregando informações além do exposto nesta etapa, pois nesse texto apresentamos apenas algumas sugestões de conteúdo com o objetivo de auxiliar e direcionar o professor, por isso classificamos os seguintes itens como **conteúdos norteadores.**

Dessa forma, propomos a seguinte sequência de apresentação do conteúdo:

Definição de equação do segundo grau

Chama-se equação do segundo grau ou equação quadrática toda equação do tipo:

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0, onde\ x\ é\ a\ variável\ e\ a, b\ e\ c\ \epsilon\ R, com\ a\ \neq 0}$$

Os **coeficientes** de uma equação do segundo grau são representados pelos números reais **a**, **b** e **c**. Podemos dizer, de forma geral, que **a** sempre será o coeficiente de x^2 , **b** sempre será o coeficiente de x e **c,** um valor constante, é o chamado termo independente.

A equação do segundo grau é dita completa quando todos os coeficientes são diferentes de zero. Se não atender a essa especificação, a equação do segundo grau é dita incompleta.

Equação completa: $ax^2+bx+c=0,\ com\ a, b\ e\ c\ não-nulos$

Nesse momento o professor pode apresentar exemplos de equações completas e incompletas de modo que os alunos sejam capazes de reconhecê-las naturalmente em outras situações.

o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de **300000** downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo.

Método da soma e produto

Soma e produto é uma técnica utilizada para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau sem utilizar a fórmula de Bháskara e é utilizada quando a equação possui raízes reais, para isso:

- Soma das raízes: ($\square 1 + \square 2$)
- Produto das raízes: ($\square 1 * \square 2$)

Agora usamos o método acima para chegar a uma fórmula em que possamos encontrar as raízes da equação:

$$\square 1 = \frac{-\square + \sqrt{\square^2 - 4\square\square}}{2\square}$$

$$\square 2 = \frac{-\square - \sqrt{\square^2 - 4\square\square}}{2\square}$$

A partir dos dados acima, temos as seguintes equações, e que chegaremos nas raízes da equação utilizando soma e produto:

- Soma

$$\square 1 + \square 2 = \frac{-\square + \sqrt{\Delta}}{2\square} + \frac{-\square - \sqrt{\Delta}}{2\square}$$

$$\square 1 + \square 2 = \frac{-\square + \sqrt{\Delta} - \square - \sqrt{\Delta}}{2\square}$$

$$\square 1 + \square 2 = \frac{-2\square}{2\square}$$

$$\square 1 + \square 2 = \frac{-\square}{\square}$$

- Produto

$$\square 1 * \square 2 = \left(\frac{-\square + \sqrt{\square^2 - 4\square\square}}{2\square}\right) * \left(\frac{-\square - \sqrt{\square^2 - 4\square\square}}{2\square}\right)$$

$$x_1 * x_2 = \left(\frac{\left(-b^2\right) - b\sqrt{\Delta} + b\sqrt{\Delta} - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2a)^2}\right)$$

$$x_1 * x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$x_1 * x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 * x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x_1 * x_2 = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$$

Com as fórmulas acima, podemos encontrar as raízes da equação do segundo grau.

Após essa explicação, o professor pode passar alguns exemplos para os alunos.

Método de Bháskara

Um dos métodos empregados para a resolução de equações completas e incompletas do segundo grau é o conhecido método de Bháskara. O método consiste na utilização de uma fórmula resolutiva e de um discriminante representado pela letra grega delta (Δ).

Nesse caso, não trataremos de deduções das fórmulas, pois não é o objetivo deste trabalho. Caso julgue necessário, sugerimos ao professor que desenvolva esses procedimentos nesta etapa.

É importante ressaltar que a existência ou não das raízes de uma equação do segundo grau no conjunto dos números $\mathbb{R}$ está condicionada à delta (por isso é chamado de discriminante).

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Após apresentação desses conceitos, é interessante que o professor enfatize quais são conclusões prévias podemos ter em relação às raízes da equação do segundo grau a partir do valor do discriminante.

Por fim, sugere-se que o professor discuta com os alunos o que seria, de fato, “encontrar as raízes de uma equação do segundo grau” e qual seria a “importância da utilização da fórmula abaixo para esse processo.

$$\boldsymbol{x = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Essa discussão será importante para a última etapa de apresentação de gráficos e, certamente, auxiliará no esclarecimento dos questionamentos levantados pelos alunos de maneira prática e possivelmente intuitiva.

Gráficos de uma equação quadrática: apresentação

A proposta para este momento é que o professor apresente imagens de diferentes equações do segundo grau para os seus alunos utilizando, para isso, o software Geogebra citado anteriormente.

É interessante que o professor faça observações a respeito da relação entre coeficiente **a** e o comportamento da parábola.

Modelo ilustrativo: gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 1$

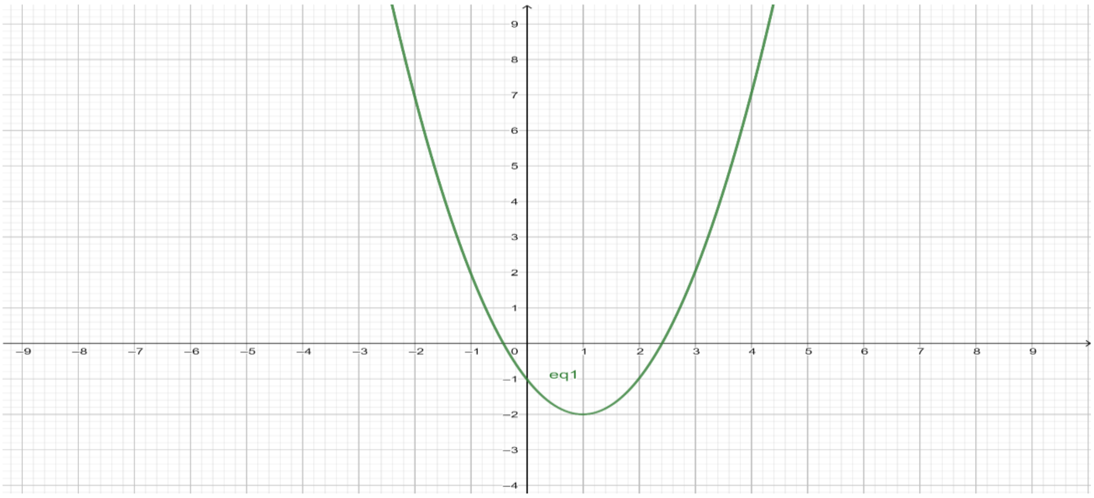


Figura 1: Gráfico plotado no software Geogebra

O estudo dos gráficos e relações entre coeficientes e raízes de uma equação do segundo grau não é o objetivo deste trabalho, pois seria tema para uma nova proposta de plano de aula. De qualquer forma, salientamos que é fundamental que os alunos se familiarizem com essa abordagem.

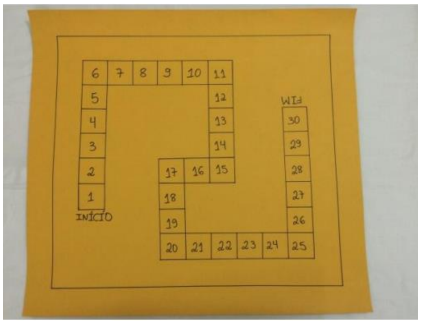
c) Atividade com o jogo Perfil da Equação

Os objetivos dessa atividade são: reconhecer uma equação do 2º grau, identificar seus coeficientes e classificar a equação em completa e incompleta.

Será aplicado o jogo "Perfil da Equação", link: http://pt.slideshare.net/FAMSilva/perfil-das-equaes-do-2-grau, no qual são dadas dicas sobre a equação e o jogador deve escrever a equação correspondente.

Para essa atividade será utilizado um tabuleiro com início e fim específicos, por onde as peças de cada jogador passarão.

Figura 2: Tabuleiro



(fonte: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pde busca/producoes_pde/2014/2014_uem_mat_pdp_eliana_cristina_peres.pdf. Acesso em: 26 maio 2020)

Será utilizado, também, várias cartas contendo dicas. Cada carta fornecerá 12 dicas sobre as equações que os jogadores formarão.

Figura 3: Carta de dicas

$-x^2-7x-8=0$
1- Perca a vez.
2- Sou uma equação completa do tipo $ax^2+bx+c=0$.
3- O coeficiente do meu 2º termo é -7.
4- Avance dois espaços.
5- Perca a vez.
6- Meu terceiro termo é -8.
7- A parte literal do meu 2º termo é x.
8- O coeficiente do meu 1º termo é -1.
9- Meu 2º termo é -7x.
10- Fique em jogar duas rodadas.
11- Meu 1º termo é x^2.
12- Avance um espaço.

O professor dividirá a turma em grupos de cinco alunos, onde um dos integrantes irá ler as dicas e os outros jogarão.

Todos os jogadores deverão ter papel e lápis. O primeiro jogador escolherá um número de 1 a 12 e o aluno que estiver com as cartas de dicas lerá a que corresponde ao número escolhido. Conforme forem jogando os alunos devem ir anotando as dicas para montar a equação final.

Este procedimento se repetirá com a escolha de números diferentes, até que alguém acerte a equação.

O jogador que acertar a equação de 2º grau na rodada, anda cinco casas no tabuleiro. Vence o jogo quem chegar no final primeiro.

A avaliação desta atividade será feita pela participação dos alunos e suas anotações durante o jogo.

Por fim, o professor fará uma discussão com os alunos sobre as definições de equação do 2º grau, seus coeficientes e a classificação em completa e incompleta.

3. Conclusões

Avaliamos que as tarefas que envolvem jogos nas aulas de Matemática constituem uma das situações didáticas que contribuem para a criação de contextos significativos de aprendizagem para os alunos. Resolver problemas com jogos nos parece ser uma opção de ensino que possibilita a construção dos conceitos. Percebemos que quando os alunos constroem seus conhecimentos em um processo ativo, o processo de estabelecimento de relações e atribuição de significados ficam mais presentes e o conceito matemático é interiorizado.

Formas previstas de avaliação:

Os alunos serão avaliados individualmente com base nas competências e habilidades apresentadas durante a resolução dos exercícios propostos e por meio de participação e envolvimento nas atividades lúdicas propostas.

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (**BNCC**). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 26 maio 2020.

ERES, Eliana Cristina. **OS DESAFIOSDA ESCOLAPÚBLICAPARANAENSE NAPERSPECTIVA DO PROFESSOR PDE**: jogos matemáticos e equação do segundo grau. 2. ed. Paraná: Programa de Desenvolvimento Educacional, 2014. 2 v. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pde busca/producoes_pde/2014/2014_uem_mat_pdp_eliana_cristina_peres.pdf. Acesso em: 26 maio 2020.

KOSCIANSKI, A.; SOARES, M. **Qualidade de software**: aprenda as metodologias e técnicas mais modernas para o desenvolvimento de software. São Paulo: Novatec Editora, 2007.

OLIVEIRA, D. A. **Das políticas de governo à política de Estado: reflexões sobre a atual agenda educacional brasileira**. Educação & Sociedade, Campinas, SP, v.

32, n. 115, p. 323-337, abr.-jun. 2011. Disponível em<http://www.scielo.br/pdf/es/v32n115/v32n115a05.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2016.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. A conquista da matemática. São Paulo: FTD, 1985.

CÁLCULO DE PROBABILIDADE CONDICIONAL

Autores: Matheus Goes Marti Nakajima

Ano Escolar: 9º. Ano do Ensino Fundamental

Ementa:

Espaço amostral; eventos aleatórios; cálculo de probabilidade; dependência de eventos; eventos equiprováveis; números racionais; frequências relativas; conjuntos; diagrama de *Venn*; lógica.

Objetivos:

Fixação dos conceitos de espaço amostral e eventos aleatórios através do uso de objetos cotidianos aos alunos, ensinar cálculo de probabilidade condicional para eventos dependentes e independentes utilizando da participação dos alunos, tendo como metodologia a indução. Portanto, partimos do particular, que é suficientemente representado por representações visuais de objetos cotidianos, no nível de aprofundamento requerido pela BNCC para este ano, e seguimos para a generalização teórica do cálculo de probabilidade condicional.

Recursos Empregados:

Lousa, caneta esferográfica ou giz de cera, dados de 6 lados e moedas.

Atividades:

1. Introdução

Estatística é uma área da Matemática dotada de múltiplas aplicações e interdisciplinaridade tanto com outras ciências exatas quanto humanas. O ensino de Estatística é importante por si só, porém ele é também extremamente atual, um adequado embasamento estatístico permite a prática daqueles que o possuem, de uma análise crítica referente à informação que consomem. Conforme a BNCC:

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e estatística. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações- -problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos. (Brasil, 2018, p. 276)

O cálculo da probabilidade condicional cumpre um importante papel no 9º Ano ao inserir mais teoria e generalização no aprendizado do aluno, que de acordo com a BNCC, antes do 9º Ano, deve ter um caráter mais empírico e particular.

2. Atividades desenvolvidas

a. Espaço amostral e eventos

Antes de trabalhar o cálculo de probabilidade e o conceito de dependência, é necessário assegurar o domínio dos alunos sobre os conceitos de espaço amostral e eventos aleatórios, portanto a aula deve iniciar discorrendo sobre as definições destes:

- Espaço amostral: o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento, usualmente denotado pela letra S;
- Evento: qualquer subconjunto do espaço amostral S, usualmente denotado pela letra E.

b. Determinação de espaços amostrais

Para que os alunos tenham um entendimento mais táctil sobre espaços amostrais, o professor utilizará de objetos cotidianos para a determinação de espaços amostrais de eventos aleatórios discretos, no caso, moedas e dados de seis lados. Deve-se começar por experimentos de um lançamento e progredir para dois lançamentos. Antes de iniciar o experimento, o professor deve questionar aos alunos sobre quais eles pensam ser os eventos possíveis e qual o espaço amostral, para instigar sua participação no experimento. Os espaços amostrais devem ser escritos na lousa para a visualização da representação deles.

- Moeda, um lançamento:

Utilizando de uma moeda, um lançamento é realizado, cujo resultado pode ser cara ou coroa, não há necessidade de realizar mais lançamentos, como os alunos podem deduzir S facilmente. Feito isso, S é definido como:

$$S = \{CARA, COROA\}$$

- Dado, um lançamento:

Utilizando de um dado, um lançamento é realizado, cujo resultado pode ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Não é necessário mais de um lançamento para que os alunos entendam o conceito. S é definido como:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

A ideia de instigar os alunos a definirem eles mesmos o S é dar confiança a eles, mostrando como a intuição deles se converte no resultado correto neste caso. Partindo daí, o professor realiza o experimento de dois lançamentos.

- Moeda, dois lançamentos:

Antes de iniciar, o professor deve questionar os alunos quanto a qual seria o S no experimento de lançar duas moedas. É importante que antes que comecem a responder, ele deixe evidente que o evento em questão é o resultado de ambas as moedas, ou seja, uma combinação do resultado de ambas. Utilizando de duas moedas, os lançamentos são realizados. S é definido por:

$$S = \{(CARA, CARA), (COROA, COROA), (CARA, COROA), (COROA, CARA)\}$$

- Dado, dois lançamentos:

Utilizando de dois dados, o lançamento de ambos é realizado, neste ponto é recomendável fazer em torno de três lançamentos e deixar que os alunos completem S com as combinações restantes.

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

c. Cálculo de probabilidade para eventos independentes

Com os espaços amostrais definidos, o professor deve questionar a classe quanto a qual a probabilidade do acontecimento de um evento qualquer em cada um dos S. Os alunos devem responder por exemplo, qual a probabilidade de sair CARA no lançamento de uma moeda, qual a probabilidade de sair 2 no lançamento de 1 dado, qual a probabilidade de sair CARA e CARA, no lançamento de duas moedas e qual a probabilidade de sair 2 e 2 no lançamento de dois dados.

- Probabilidade de sair CARA na moeda: $P = \frac{1}{2}$
- Probabilidade de sair 2 no dado: $P = \frac{1}{6}$
- Probabilidade de sair CARA e CARA nas moedas: $P = \frac{1}{4}$
- Probabilidade de sair 2 e 2 nos dados: $P = \frac{1}{36}$

O professor deve explicar que estes quatro casos se tratam de eventos equiprováveis, ou seja, todos os eventos possuem a mesma probabilidade de ocorrerem, dentro dos n possíveis resultados. Esse é o momento para fazer a distinção entre moedas e dados honestos e não honestos, onde honesto significa equiprovável e sua probabilidade pode ser generalizada por:

$$P = \frac{1}{n}$$

d. Cálculo de probabilidade para eventos dependentes

A partir daí deve-se questionar os alunos quanto a se no caso do lançamento de duas moedas, saber o resultado da primeira, pode afetar a probabilidade sobre os eventos da segunda e se a resposta for sim, qual a probabilidade resultante. A pergunta não é trivial, e após algumas respostas da classe, o professor deve seguir uma linha de raciocínio que auxilie os alunos a utilizarem S para responder a pergunta.

1) Mostrar-lhes novamente o S:

$$S = \{(CARA, CARA), (COROA, COROA), (CARA, COROA), (COROA, CARA)\}$$

2) Utilizar como exemplo o resultado da 1ª moeda sendo CARA, e mostrar como fica S dada esta informação:

$$S = \{(CARA, CARA), (\cancel{COROA, COROA}), (CARA, COROA), (\cancel{COROA, CARA)}\}$$

Ou seja, se é sabido que a 1ª moeda saiu CARA, os únicos dois eventos possíveis são:

$$S = \{(CARA, CARA), (CARA, COROA)\}$$

3) Calcular probabilidade de cada evento:

$$P = \frac{1}{2}$$

Isso deve mostrar aos alunos que caso tenha-se informação sobre o resultado de uma das moedas, a probabilidade dos eventos de S muda, é importante distinguir aqui que isto nada tem a ver com o lançamento ser simultâneo ou não, afinal pode-se realizar um lançamento simultâneo e esconder-se o resultado de uma das moedas, gerando o mesmo cenário em que se joga uma de cada vez. A questão é possuir ou não informação sobre algum resultado.

Utilizando os dois dados, é o momento de fazer perguntas mais complexas. Uma pergunta a se fazer é a seguinte: qual a probabilidade de se tirar uma soma nos dados menor ou igual a 5 (evento E), sendo que os dados têm soma par (evento F). A linha de raciocínio a se seguir é a seguinte:

1) S do evento **E** e probabilidade de cada evento:

$$S_E = \{(1{,}1), (1{,}2), (1{,}3), (1{,}4), (2{,}1), (2{,}2), (2{,}3), (3{,}1), (3{,}2), (4{,}1)\}$$

Ou seja, um S de 10 eventos, dentre 36 possibilidades com $P(E) = \frac{10}{36}$

2) S do evento F

$$S_F = \left\{ \begin{matrix} (1{,}1), (1{,}3), (1{,}5), (2{,}2), (2{,}4), (2{,}6), (3{,}1), (3{,}3), (3{,}5), \\ (4{,}2), (4{,}4), (4{,}6), (5{,}1), (5{,}3), (5{,}5), (6{,}2), (6{,}4), (6{,}6) \end{matrix} \right\}$$

Ou seja, um S com 18 eventos, dentre 36 possibilidades com $P(F) = \frac{18}{36}$

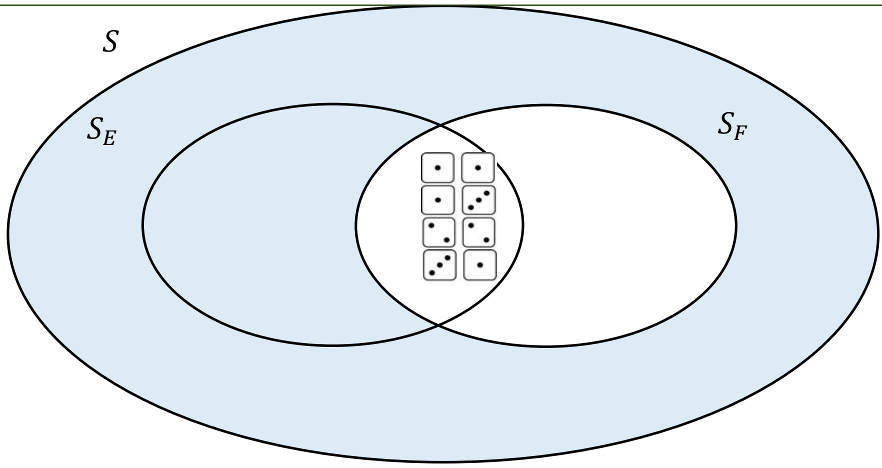
3) S de E, dado F:

A pergunta a ser feita é: quais os eventos possíveis de **E**, dado **F**? Tendo ambos os S representados visualmente na lousa, os alunos podem verificar que a resposta corresponde aos eventos de S_E que estão contidos em S_F, portanto, a resposta é a intersecção dos dois S, representada como $S_E \cap S_F$. Os eventos dessa intersecção sendo:

$$S_E \cap S_F = \{(1{,}1), (1{,}3), (2{,}2), (3{,}1)\}$$

Feito isso utiliza-se da representação visual por diagrama de Venn:

Figura 1: Representação por diagrama de Venn



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa representação, S representa o espaço amostral do lançamento de dois dados, que corresponde a todos os eventos, a área em branco, que também é S_F, representa os eventos possíveis, dado que ocorre F e a área em azul representa todos os eventos que se tornam impossíveis dado F.

4) Probabilidade de E, dado F:

A partir daí, é possível deduzir a fórmula da probabilidade condicional com a colaboração dos alunos. Portanto volta-se à pergunta inicial: qual a probabilidade de ocorrer E, dado F? O ideal é primeiramente partir da intuição dos alunos e deixar que eles isolem o objeto da análise deles não a S, mas a S_F, afinal, F é dado como fato, portanto, a atenção dos alunos deve se voltar para: dado que F é fato, qual a probabilidade de ocorrer E? A visualização do $S_E \cap S_F$ como um subconjunto contido em S_F lhes permitirá chegar a conclusão de que:

$$P(E|F) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Porém é necessária uma explicação mais teórica para fornecer o embasamento necessário para a generalização da fórmula de probabilidade condicional, conforme a seguinte: se um evento F ocorre, então, para que E ocorra, é necessária que a ocorrência seja um ponto tanto em E quanto em F, ou seja, ela deve ser E ∩ F. Agora, porque sabemos que F ocorreu, F se torna o novo espaço amostral e portanto, a probabilidade de que E ∩ F ocorra é igual à probabilidade de E ∩ F relativa à probabilidade de F. A fórmula da probabilidade de um evento E, dado um evento F, é portanto:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

3. Conclusões

O cálculo de probabilidade condicional é central para que os alunos do 9º. Ano do Ensino Fundamental se desenvolvam mais na área de Estatística na sua formação acadêmica pelos anos seguintes, um bom entendimento dos conceitos de dependência, cálculo de probabilidade, espaço amostral e eventos aleatórios, cria uma base sólida para que temas como Teorema de Bayes e funções de distribuição de probabilidade, particularmente as discretas, sejam aprendidos. A ideia deste plano de aula é aproximar os alunos deste tema, enquanto ele ainda é facilmente representado por espaços amostrais e diagramas de Venn, usando a intuição e participação deles. Conforme eles avançarem na Estatística, os conceitos ficarão cada vez mais abstratos e difíceis de visualizar por representações tradicionais como estas, porém a memória de representações adequadas funcionará como um guia conforme seus desafios se tornam mais sofisticados.

Formas previstas de avaliação:

Garantir a participação dos alunos no método indutivo é o mais importante e o professor deve incentivá-los a contribuir com a aula através de seus comentários, reagindo positivamente quando se esforçarem e criando um ambiente em que se sintam a vontade para verbalizar suas teorias. Visando a fixação, o professor pode passar mais exercícios para a turma, questionando-a sobre eventos diferentes daqueles passados na aula, dentro do tópico de eventos aleatórios discretos.

Referências:

Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio. Brasília: ME, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 30/05/2020.

ROSS, S. *Introduction to Probability Models*. 11ª edição. *University of Southern California Los Angeles, California: Elsevier Inc*, 2014.

Santos, L.; Lima, C. Ensinando Estatística: Experimentos em Sala de Aula. 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste. 1ª edição: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_Ensinando-Estatistica.pdf>. Acesso em 30/05/2020.

PROBABILIDADE E RPG	
Autor: Henrique Ricci Martins	**Turma:** Diurno **Data: 25/05/20**
Tema tratado: Probabilidade – Eventos Dependentes e Independentes	
Ano escolar: 9º ano	
Ementa: Análise e cálculo de probabilidades aleatórias, ou seja, tanto em eventos dependentes e independentes	
Objetivos: Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.	
Recursos empregados: Conjunto de dados de RPG (pode ser substituído por um projetor e um computador com acesso à internet – no caso, seria utilizado o próprio Google, que possui uma página de rolar dados), a tarefa e o diagrama impressos (ou projetados).	

Atividades:

1. Introdução:

A proposta desse plano de aula busca familiarizar e aproximar os estudantes na unidade temática de Probabilidade, em específico o conteúdo de probabilidades aleatórias, abordando Eventos Dependentes e Independentes, previstos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o 9º ano do Ensino Fundamental. A habilidade que o educando deve possuir após o conteúdo é listada na BNCC como:

- **(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos. (BRASIL, 2017, p. 317)

Ainda assim, esse conteúdo necessita da competência de interpretar textual e numericamente determinados enunciados para resolução de atividades acadêmicas e da vida. Para isso, é proposto nesse plano de aula uma tarefa que relaciona as probabilidades com jogos, no caso os RPGs (*Role Playing Games*, ou Jogos de

Interpretação de Papéis), de modo a aproximar o conteúdo da realidade dos estudantes e familiarizá-los com a ocorrência casual do mesmo.

2. Metodologia

Para o desenvolvimento dessa atividade, seria necessária uma breve apresentação (5-10 minutos) do que é um RPG, como ele funciona e onde se encontram as probabilidades nele. Basicamente seria explorada a ideia de que em um RPG, para executar determinadas ações os jogadores devem rolar dados específicos dentre 7 existentes, diferenciados pelo número de lados: 4, 6, 8, 10, 12 e 20, além de um último de dezenas (não será abordado na aula).

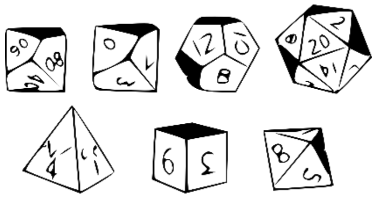


Figura 1 – Dados de RPG;
Fonte: Domínio Público

Para cada ação a ser executada no jogo, existe um tipo de dado que o jogador deverá rolar para executá-la e o número tirado determinará não só o sucesso da ação como a sua qualidade. Por exemplo, considere a ação "alimentar seu cachorro", e que para fazê-la você deve rolar um D10 (nomenclatura para dado de 10 lados). Para cada número tirado, existirá um resultado diferente. Tirar entre 5 e 6 resultaria em algo neutro como: O cachorro come a comida. Tirar 1 significaria que o cachorro te morderia ao entregar a comida. Então ficaria como pergunta aos estudantes: "Como seria caso fosse rolado um 10?". As respostas esperadas seriam que após comer, o cachorro demonstrasse algum afeto ao dono, como um abraço ou uma lambida na cara.

Feita a apresentação, os educandos seriam separados em pequenos grupos e seria entregue uma tarefa contendo um contexto seguido de questões explorativas e investigativas acerca do conteúdo, apresentadas abaixo:

"Você e seus amigos estão em uma sessão de RPG cujo tema é Harry Potter. Vocês são bruxos de Hogwarts ainda em fase de aprendizagem de como utilizar seus feitiços. Em determinada aula, vocês são instruídos a utilizarem o feitiço *Wingardium Leviosa*, capaz de fazer objetos voarem ou levitarem. O objeto da aula será uma pena, e vocês

Figura 2: Hermione de Harry Potter executando o feitiço Wingardium Leviosa (Fonte: https://harrypotter.fandom.com/pt-br/wiki/Feitico de Levitacão)

rolarão um D10 para executarem uma tentativa de levitar a pena, na qual um resultado 7 ou maior já representa um sucesso, ou seja, vocês fizeram a pena levitar sem dificuldades no tempo esperado (um 10, seria como ser aprovado instantaneamente após realizar o feitiço)."

Para serem aprovados instantaneamente nessa atividade, respondam os itens abaixo:

A) Quantas possibilidades de resultado existem?

B) Quantas possibilidades de sucesso existem? E de fracasso?

C) Qual é a probabilidade de um aluno ser aprovado nesse teste? Mostre o resultado obtido nas formas de porcentagem, fração e decimal.

D) Repita os itens A, B e C caso utilizássemos um D12 e o sucesso a partir do resultado 8.

Ainda assim, você e seus amigos querem estar juntos no próximo ano, e para isso, devem todos ser aprovados. Sabendo disso, responda:

E) Qual é a probabilidade de, após um amigo obter sucesso, você também? (Para esse caso, continue utilizando o D10). Mostre o resultado obtido nas formas de porcentagem, fração e decimal.

F) Os resultados encontrados nos itens C e E foram diferentes? Explique.

Após a resolução das questões da tarefa, o professor iniciaria uma discussão acerca dos resultados obtidos da classe inteira, dando destaque para a questão F, na qual é esperado que os alunos conseguissem perceber que no item C, o fato de um aluno ser aprovado independe de outro, a menos que seja estabelecida uma relação de dependência, como foi feito no item E. Ainda assim, se espera que muitas dúvidas surjam, principalmente devido a essa diferença, pois não é tão sútil de se evidenciar, então o professor explicaria a situação através de um diagrama de árvore:

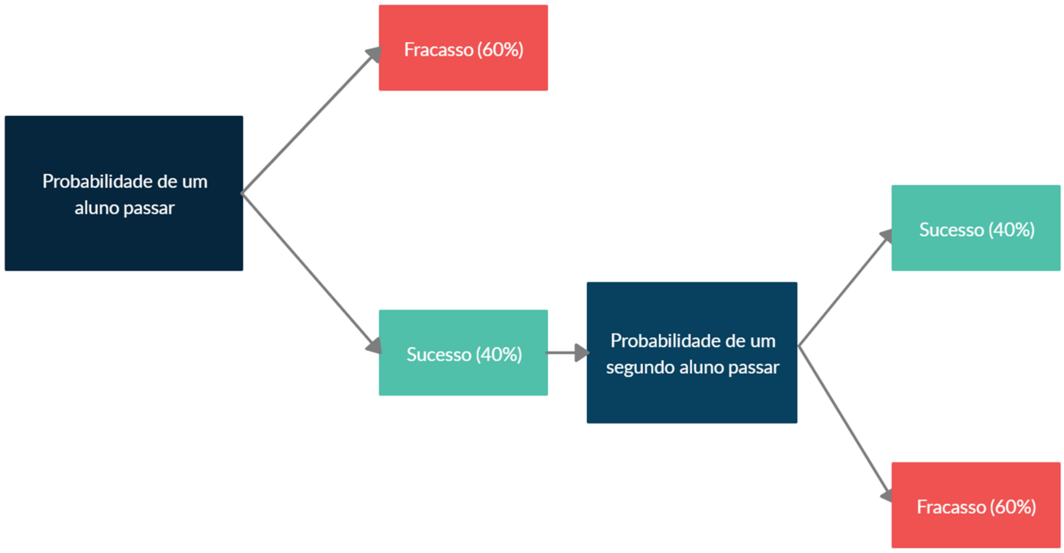


Figura 3: Diagrama de Árvore referente ao item E

Com isso, os alunos conseguiriam perceber que a probabilidade de um aluno passar ainda é de 40%, porém se estivermos falando de um segundo aluno passar **após** outro, estamos falando de uma probabilidade que já está dentro de 40%, ou seja, depende de outra, resultando em 40% <u>de</u> 40%, ou 16%.

3. Conclusão

A atividade se familiariza com os estudantes em dois pontos: o primeiro ao abordar um jogo, no intuito de diverti-los e fugir de uma aula expositiva, e o segundo ao contextualizá-los com filmes como Harry Potter, aproximando o conteúdo da realidade deles. A partir disso e dos exercícios, os alunos seriam capazes reconhecer, analisar e calcular probabilidades aleatórias, sejam elas dependentes ou independentes, além de se familiarizarem também com o diagrama de árvore, muito utilizado para a resolução de tais probabilidades.

Formas previstas de avaliação:

A participação dos estudantes e a entrega dos exercícios, em especial os itens E e F, os quais contêm o conteúdo de probabilidades dependentes previsto para a aula, enquanto os itens de A a D seriam uma revisão de conhecimentos prévios.

Referências

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

Cadernos de práticas de ensino de matemática da UFABC [recurso eletrônico] - vol. 1: planos de aulas para o ensino médio / Organizado por Virgínia Cardia Cardoso, Vinícius Pazuch — Santo André, SP: Universidade Federal do ABC, 2019.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autor: Jonatan Lucas Linhares Rodrigues</td><td>Turma: Diurno</td></tr>
<tr><td>Data: 25/05</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema tratado: Introdução a probabilidade com ênfase em experimentos aleatórios</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ano escolar: 8º ano</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ementa: Resolução de situações problemas que incluam noções de espaço amostral e de probabilidade de um evento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo geral: Compreender que alguns acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória, identificar possíveis resultados ou estimar o grau de possibilidades deles.

Objetivo específico: Calcular a probabilidade de ocorrência de alguns eventos por meio da razão:

$$\frac{\text{Números de possibilidades favoráveis}}{\text{Número total de possibilidades}}$$

Os objetivos foram baseados de acordo com as habilidades da BNCC referentes ao 8º ano:

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos empregados:</td></tr>
</table>

- Livro didático

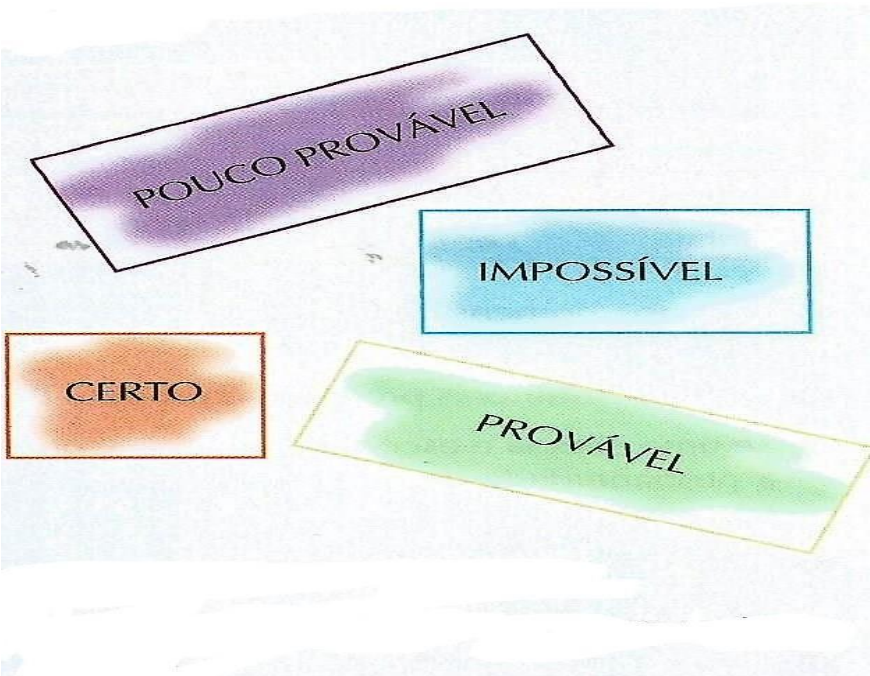
- Fichas confeccionadas em cartolina (opcional)

- Lousa

Descrição de todas as atividades a serem apresentadas:

Descrição de situação 1:

Classifique os acontecimentos utilizando as palavras:



a) Lançar uma moeda e sair cara.
b) Sair uma bola azul de um saco de bolas brancas.
c) Lançar um dado e sair um número natural de 1 a 6.
d) Sair 10 vezes coroa em 10 lançamentos de uma moeda.

Objetivos: No exercício anterior, o principal objetivo é construir um conceito de probabilidade, mesmo que de forma intuitiva, para o professor começar a introduzir o assunto. Além disso, é esperado que os estudantes compreendam que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses e até estimar o grau de possibilidade acerca do resultado de um deles.

Metodologia: Os alunos poderão trabalhar em grupos para discutir como classificariam cada uma das letras e teriam que chegar em um acordo no final da atividade, pois irão compartilhar suas respostas com o resto da sala. Após isso, o docente começará a tirar as dúvidas de todos os grupos, explicando o exercício com os devidos conceitos da matéria, definindo experimentos aleatórios, espaço amostral, eventos equiprováveis, entre outros. Por final, o professor irá entrar com a parte de cálculo, mostrando como é calculado a probabilidade de cada um dos eventos da atividade dada.

Desenvolvimento:

Parte 1) Discussão entre os alunos e resolução da atividade, com a interferência mínima do professor, para que ele consiga visualizar o conhecimento dos estudantes adquirido nos anos anteriores referente ao tema central da aula.

Resolução da atividade:

a) Lançar uma moeda e sair cara = Provável

b) Sair uma bola azul de um saco de bolas brancas = Improvável

c) Lançar um dado e sair um número natural de 1 a 6 = Certo

d) Sair 10 vezes coroa em 10 lançamentos de uma moeda = Pouco provável

Parte 2) Após o professor mostrar as respostas corretas e sanar as dúvidas que ali surgirem, ele irá introduzir a parte mais teórica, porém com uma participação ativa de toda a turma, sempre utilizando os exemplos dado no exercício. O docente começará com a pergunta:

Vocês analisaram vários experimentos aleatórios, mas qual o significado dele?

Após os alunos responderem, eles teriam que chegar na conclusão de que é um experimento que trabalha com um resultado incerto. A partir daí, aproveitaria o momento para definir espaço amostral:

“Conjunto de todos os possíveis resultados em um experimento aleatório.”

(Ω) símbolo de espaço amostral

Para verificar o entendimento do aluno, perguntaria para a classe os espaços amostrais nos quatro itens da atividade proposta.

a) Lançamento de uma moeda: Ω = Cara e Coroa.

b) Sair uma bola azul de um saco de bolas brancas: **Ω = Bolas brancas**

c) Lançar um dado e sair um número natural de 1 a 6: **Ω = 1,2,3,4,5,6**

d) Sair 10 vezes coroa em 10 lançamentos de uma moeda: **Ω = Cara e Coroa.**

Parte 3) Depois de mostrar a definição de espaço amostral com seus devidos exemplos, o professor irá iniciar a parte de cálculo de probabilidades usando os itens da atividade principal.

a) Dado o lançamento de uma moeda, qual seria a probabilidade de sair cara ou coroa?

P(Coroa)= $\dfrac{n(Cor)}{n(\Omega)}$ **n(Cor)= Número de casos favoráveis para esse evento**

n(Ω)= Espaço amostral

P(Coroa)= $\dfrac{1}{2}$ **= 0,5 que seria o mesmo que 50%**

P(Cara)= $\dfrac{1}{2}$ **= 0,5 que seria o mesmo que 50%**

Ω = Cara e Coroa.

Nesse mesmo experimento, o professor pode mencionar o que seriam espaços amostrais equiprováveis e se este seria um exemplo, dessa forma, ele explicaria que são experimentos que possuem eventos com probabilidades iguais de ocorrência e que nesse caso, se esta moeda não for viciada, esse é um evento equiprovável.

b) Qual a probabilidade de sair uma bola azul de um saco de bolas brancas?

P(Azul)= $\dfrac{n(azul)}{n(\Omega)} = \dfrac{0}{n(\Omega)} = 0\%$

O professor terá que fazer essa observação:

Obs: não importa o número de bolas brancas neste caso, pois a probabilidade será igual a zero de qualquer forma.

Ω = número de bolas brancas.

c) Qual a probabilidade de lançar um dado e sair um número natural de 1 a 6?

P(n)= $\dfrac{n(nat)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{6} =$ **1 equivalente a 100%**

Ω =1,2,3,4,5,6

Lembrando que os números naturais são os números inteiros positivos.

d) Qual a probabilidade de sair 10 vezes coroa em 10 lançamentos de uma moeda?

P(Coroa)= $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **= 0,5 (Como já calculado anteriormente)**

Porém nesse caso, teremos uma sequência de probabilidades, pois serão feitos 10 lançamentos, ou seja, teremos que multiplicar essa probabilidade 10 vezes por ela mesma, ou elevarmos a décima, que seria fazer o mesmo:

$\frac{(1)^{10}}{(2)^{10}} = \frac{1}{1024} = 0{,}0976\%$ **Realmente pouco provável**

Ω =Cara e Coroa.

Descrição de situação 2:

Durante a pandemia do Covid-19, uma escola de 1000 alunos apresentou o seguinte quadro de contaminação:

Casos	**Número de alunos**
Assintomáticos-Leves/Moderados	425
Graves	50
Gravíssimos	25
Não contaminados	500

a) Calcule a probabilidades de pessoas que tiveram casos assintomáticos ou leve/moderados.
b) Calcule a probabilidade de pessoas que tiveram casos com sintomas graves.
c) Calcule a probabilidade de pessoas que tiveram casos gravíssimos.

Objetivos: O foco principal dessa atividade é avaliar o conhecimento consolidado de cada estudante, visto que já terminaram e entenderam a atividade anterior.

Metodologia: O professor passará está atividade avaliativa da mesma forma que passaria qualquer outra prova, onde os estudantes irão fazer individualmente e sem direito a consulta. **Desenvolvimento:** Essa avaliação será aplicada na metade da segunda aula, após a aplicação da atividade 1 e o tempo total desse plano de aula teria a duração de duas aulas de 50 minutos.
Referências: ANDRINI, A; VASCONCELLOS, M.J. Praticando matemática – Nono ano. Editora Brasil, São Paulo,2015. 4ª edição. __________ Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Ensino médio. Documento homologado pela Portaria n° 1570, pub. no D.O.U. 21 dez. 2017. Brasília – DF.

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Thiago Andreieve

Ano Escolar

8º Ano do Ensino Fundamental

Ementa

Ponto, segmento, plano, ângulo (e suas classificações: agudo, reto e obtuso), adjacência, triângulo (e suas classificações quanto aos ângulos: acutângulo, retângulo e obtusângulo), vértice, lado, congruência, casos de congruência de triângulos (LAL, ALA, LLL, LAAo).

Objetivos

Recordar brevemente conceitos sobre triângulos e definir congruência. Trabalhar congruência de triângulos pela investigação através de materiais manipulativos e propostas de relacioná-los.

Recursos Empregados

Cartolinas com 4 triângulos em cada (cartolina, régua, caneta, transferidor ou compasso); 8 triângulos recortados (tesoura) em cartolina para cada cartolina anteriormente citada, sendo 4 congruentes aos desta; lousa e giz.

Atividades:

1. **Introdução**

O seguinte plano de aula propõe a orientação de uma aula para o 8º ano do Ensino Fundamental, com o tema “Congruência de Triângulos”, considerado pela BNCC para o desenvolvimento da habilidade “Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos”, utilizando atividade investigativa com material manipulativo. Conforme Dante (2005, p.60) “Devemos criar oportunidades para as crianças usarem materiais manipulativos (...), A abstração de ideias tem sua origem na manipulação e atividades mentais a ela associadas”.

É importante que se tenha guia para efetivar-se a obtenção de conhecimento a partir da relação com o material manipulativo. Assim, a atividade proposta conduz o ou a estudante a uma coordenação de ações com o material, a partir do desafio de encontrar figuras congruentes de triângulos. Para Piaget (2007) as operações lógico-matemáticas derivam das próprias ações, pois são o produto de uma abstração procedente da coordenação das ações, (é preciso ter capacidade de registrar esta ordem por meio de ações) e não (somente) dos objetos.

Também se propõe a essa discussão a exposição de conceitos como ferramenta de investigação, e depois como síntese e consolidação das descobertas. Utiliza-se como referências as definições dadas por Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo em "Geometria Plana" da coleção Fundamentos de Matemática Elementar.

Enquanto necessária a condução da investigação, a proposta do presente plano traz um processo desafiador e de aprendizagem para o ou a docente, que constrói a mesma para que os e as estudantes façam descobertas as mais próximas possíveis das propriedades posteriormente apresentadas, mantendo independência e participação ativa deles e delas na ação.

2. **Atividades desenvolvidas**

Preparo (anterior a aula):

Em cada cartolina devem ser representados 4 triângulos,

a. Isósceles, com o valor de lados e ângulos;
b. Obtusângulo, com o valor de lados e ângulos;
c. Equilátero, com o valor de lados e ângulos;
d. Escaleno acutângulo, com o valor de lados e ângulos;

Para cada cartolina, devem ser cortados de uma outra os seguintes triângulos:

e. Congruente ao "a" com valores dados de algum trio Lado-Ângulo-Lado;
f. Congruente ao "b" com valores dados de algum trio Ângulo-Lado-Ângulo;
g. Congruente ao "c" com valores dados de "Lado-Lado-Lado";
h. Congruente ao "d" com valores dados de algum trio "Lado-Ângulo-Lado oposto;
i. Não-congruente a nenhum, porém com valor de um trio Lado-Lado-Ângulo dado e equivalente a um de "a";
j. Não-congruente a nenhum, porém com valor de trio Ângulo-Ângulo-Ângulo dado e equivalente ao de "b";
k. Não-congruente a nenhum, porém com valor de trio Ângulo-Ângulo-Ângulo dado e equivalente ao de "c";
l. Não-congruente a nenhum, porém com valor de um trio Lado-Ângulo-Lado dado e equivalente a um de "d".

Deve-se iniciar a aula com a exposição dos conceitos, aqui tirados da obra já citada "Geometria Plana". Defina-se triângulo: dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se triângulo ABC. Em seguida, os pontos A, B e C são os vértices do triângulo ABC; os segmentos AB, AC e BC são os lados do triângulo; os ângulos formados nos vértices A, B e C são ditos internos do triângulo ABC e respectivamente opostos aos lados BC, AC e AB. Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que: seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e, seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

2.1 Atividade em grupo

Proponha a formação de grupos com 4 estudantes. Para cada grupo será entregue uma cartolina com os triângulos definidos acima como “a”, “b”, “c” e “d”, bem como os triângulos recortados de “e” a “l”. Enuncia-se “descubram os triângulos que são congruentes aos da cartolina, depois discutam sobre quais valores precisam ser congruentes para que os triângulos também sejam!”.

Note que, em um primeiro momento a investigação é dada pela comparação entre as figuras, por sobreposição. À descoberta das equivalentes, associam-se as informações presentes nos triângulos congruentes. No material tem-se os 4 casos de congruência para ser associados, além disso, os 4 triângulos não congruentes a nenhum outro possuem valores equivalentes aos de cada triângulo da cartolina, sendo 2 por Lado-Lado-Ângulo, e 2 por Ângulo-Ângulo-Ângulo. A importância destes está na exposição do contraexemplo destes casos, afinal a congruência não se dá na verificação por sobreposição. Proponha então que escrevam sobre quais as informações que foram descobertas para confirmar se dois triângulos são congruentes.

Para que os e as estudantes comparem e consolidem as descobertas, apresente agora em lousa os casos de congruência, sendo o primeiro (LAL), “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes”; o segundo (ALA), “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes”; o terceiro (LLL), “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes”; o quarto (LAAo), “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes”. Para cada caso deve-se ilustrar uma exemplificação, reforçando-o geometricamente.

Fomenta-se discussão acerca das informações necessárias para garantir congruência, conduzindo a reflexão à percepção de que são necessárias, no mínimo, 3 informações, não sendo quaisquer 3 suficientes. Cita-se o caso LLA e AAA em que não foi encontrada congruência. Provoca-se a investigação do caso LLA, expondo suas insuficiência através da construção de triângulo ABC, sendo BC o menor lado, e raio de uma circunferência. AC será secante, cortando essa circunferência em C e D. BD é raio, logo, tem a mesma medida de BC. Portanto, tem-se um caso LLA, mas os triângulos ABC e ABD não são congruentes, sendo o primeiro acutângulo e o segundo obtusângulo.

3. Conclusões

Efetiva-se a aprendizagem a partir da investigação advinda da provocação que se utiliza da comparação tátil e visual entre figuras manipuláveis. São importantes a organização e a consolidação do conhecimento com a reflexão junto do professor ou da professora ao fim da investigação. Nesse sentido, vale trazer exemplos, especialmente de casos em que não se garante a congruência, antecipando possível relação de estudante de quaisquer 3 informações com a mesma. Podem ser resolvidos problemas em conjunto ao fim da atividade, expondo processo de resolução acerca do assunto discutido, e solicitando outras, colocando novamente o ou a estudante em um papel ativo e investigativo no processo de aprendizagem.

Formas previstas de avaliação

Diálogo com professor ou professora durante a investigação e na reflexão ao fim, após exposição formal dos casos de congruência.

Apesar de trazer uma estrutura de aula e avaliação, a abordagem pode variar muito de acordo com o contexto na qual for aplicada, e a individualidade da figura docente. Assim, cita-se D'Ambrósio (2010, p.50) “Cada indivíduo tem a sua prática. Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou.

Referências

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular - **BNCC**. Brasília. Disponível em: <basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática, da teoria à prática**. 8ª ed. Campinas, SP: Editora Papirus, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12ª ed. São Paulo, 2005.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Geometria Plana.** Coleção: Fundamentos de Matemática Elementar - vol.9. 19ª ed. São Paulo, SP: Atual Editora, 2011.

FREITAS, L.S.; OLIVEIRA, J.S.; LEME, H.A.S.; ALVES, A.A.; **Uma experiência com congruência de triângulos no PIBID/Matemática em 8° anos do Ensino Fundamental**. São Paulo, SP: Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2016. Disponível em: <sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5757_3729_ID.pdf>

PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia**. 24ª ed. Rio de Janeiro, RJ: Editora Forense Universitária, 2007.

SCOLARO, M.A. **O uso de materiais didáticos manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de matemática.** (PDE - PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL) - SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO, SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO; Orientador: Antonio Amilcar Levandoski. 2008. Disponível em: <diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf>

Números Inteiros
Vinicius Henrique Rodrigues Gomes
Ano Escolar: 9º. Ano do Ensino Fundamental
Ementa: Conjunto dos Números Inteiros Relativos; Representação geométrica e comparação dos números inteiros relativos; Opostos ou simétricos; Adição de Números Inteiros; Subtração de Números Inteiros; Multiplicação e Divisão de Números Inteiros; Potenciação e Radiciação de Números Inteiros; Expressões Numéricas
Objetivos gerais: Representar e interpretar o conjunto dos números inteiros; **Objetivos específicos**: Reconhecer os números negativos; Identificar o módulo ou valor absoluto de um número inteiro; Compreender o conceito de números opostos ou simétricos; Associar os números inteiros em situações cotidianas; Resolver as operações com números negativos e compará-las com as operações já conhecidas no conjunto dos Naturais; Solucionar problemas envolvendo o conjunto dos números Inteiros; Ordenar e comparar os números inteiros na reta numérica;
Recursos Empregados: Lousa, canetão, lápis, papel, régua, canetinhas e caneta esferográfica

Atividades:

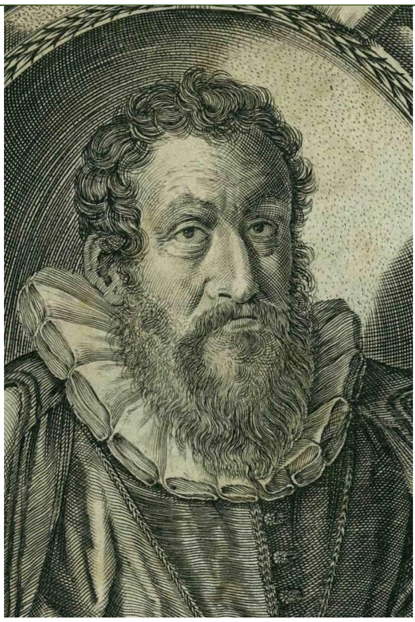
1. **Introdução**

Segundo Roque e Carvalho (2012), com o advento da álgebra, o problema dos números negativos se expressou ainda mais. Os antigos sistemas de numeração já admitiam a existência de operações de subtração e multiplicação, que envolvessem a subtração de um número maior de um número menor, mas esses números ainda não eram devidamente definidos, o que só foi acontecer no renascimento com o desenvolvimento da álgebra.

O sistema de numeração egípcio. Disponível em: http://mj-matemagia.blogspot.com/2013/12/numerais-egipcios.html

Antes disso matemáticos como Nicolas Chuquet que representava um numeral negativo (-a) como 0-a no século XV, ou Girolamo Cardano, um dos responsáveis pelo desenvolvimento da álgebra no século XVI, que admitia os negativos como números fictícios, já trabalhavam com as operações com esses números (ROQUE; CARVALHO, 2012)

Ainda segundo Roque e Carvalho (2012) o italiano Rafael Bombelli, tentou dar significado aos números negativos trabalhando a ideia de dívida em moedas, que até hoje servem de exemplo para o ensino do conjunto dos números inteiros.



O matemático italiano Girolamo Cardano nasceu a 24 de setembro de 1501. Disponível em https://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/1636088172312935-girolamo-cardano

Nos dias atuais não é mais possível reconhecer o aprendizado através exclusivamente da transferência de informações. O aluno precisa estar participando de forma ativa para a construção do conhecimento.

Este plano de aula foi elaborado para contribuir para a aprendizagem significativa[4] do aluno através da participação e discussão dos assuntos abordados em um período previsto de 3 semanas sendo divididas da seguinte maneira:

-Semana 1:

Apresentação do conjunto dos números inteiros

Representação Geométrica e comparação dos números inteiros

Modulo e valor absoluto

Opostos ou simétricos

-Semana 2:

Adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros

-Semana 3:

Potenciação e radiciação com inteiros

Expressões numéricas

Revisão dos conteúdos

As atividades seguirão 4 etapas a serem percorridas pelo aluno:

[4] Termo descrito por Ausebel. De acordo com MOREIRA (2011) "a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não-literal e não-arbitrária"

I. **Experiências prévias do aluno.**
Nessa etapa, será feita uma conversa prévia com os alunos, ou uma atividade inicial que irá permitir a eles, organizar seus conhecimentos prévios sobre o tema. Esta parte também é importante para sanar dúvidas ou corrigir incertezas conceituais sobre conteúdos prévios ao tema.

II. **Exploração do conteúdo**
Nessa etapa, é apresentado aos alunos os novos conceitos, e ferramentas a serem trabalhadas durante as aulas. Nesta parte do aprendizado o aluno deve responder a questões mais objetivas e fazer atividades para testar o novo conhecimento

III. **Aprofundamento do conteúdo**
Aqui, o aluno deverá ser capaz de interpretar problemas mais elaborados, dando significado ao conteúdo aprendido

IV. **Criação própria**
Na etapa final o aluno deverá ser capaz não só de observar, aplicar e interpretar os conteúdos vistos, mas ser capaz de elaborar uma resposta que seja completamente nova e original.

2. Atividades desenvolvidas

- Semana 1: Em um primeiro momento, inicia-se uma discussão e questionamento com os alunos a respeito dos números negativos, apresentando situações cotidianas. Exemplos são os números de um elevador ou a temperatura de um freezer. Em seguida o professor deverá solicitar aos alunos outros exemplos que eles observam no dia a dia. Elencar os exemplos e debater para que juntos cheguem a outras aplicações cotidianas dos números negativos, validando ou não aquelas que os alunos apresentaram. Com isso espera-se que os alunos cheguem a respostas como, profundidade, dívidas, temperatura, etc.;

Após o debate inicial, recomenda-se ao professor, dar uma contextualização histórica aos alunos, explicando por exemplo, a necessidade de se definir esse conjunto no Renascimento devido ao grande aumento das transações de cunho econômico nesse período, retomando assim a ideia de número negativo como uma dívida, após isso é introduzido aos alunos os números inteiros como o conjunto que abrange os números negativos, e com isso abre-se outro questionamento a respeito dos números naturais:

a) Todo número inteiro é um número natural?
b) Todo número natural é inteiro?

Espera-se que os alunos observem que o conjunto dos números inteiros contém os números naturais, estabelecendo assim uma relação entre o conhecimento prévio e o novo; é então apresentado formalmente a eles o conjunto dos números inteiros (Z);

Neste momento alguns alunos podem questionar a letra Z como representação dos números inteiros. O professor pode explicar que vem da palavra alemã Zahl, que significa número.

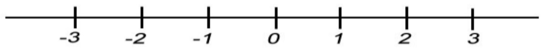
Símbolo do conjunto dos inteiros. Disponível em https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-conjunto-dos-numeros-inteiros.htm

Após a formalização dos conjuntos, na próxima aula, será feita uma atividade com os alunos:

Atividade 1: Reta numérica

Materiais: Papel, lápis, borracha e régua
Método: O professor irá pedir para que os alunos se organizem em trios e separem uma folha de caderno para o grupo;
O professor, então, deverá orientar os alunos a desenharem uma reta na folha com uma marcação a cada 1cm, com a régua;
O professor então pede que os alunos localizem o 0 aproximadamente no meio da reta;
Após isso, o professor escreve números aleatórios na lousa compreendidos entre -15 e 15, e pede para que os alunos localizem os números na reta que eles desenharam;
Após isso o professor deverá fazer sua própria reta na lousa para que os alunos comparem.

Um exemplo de reta numérica



Discussão com os alunos: Após a realização da atividade é hora de discutir com os alunos, o professor pode abrir questionamentos, como por exemplo:

a) O zero é positivo ou negativo?
b) O que os números à esquerda do zero têm em comum? E os números à direita do zero?
c) Qual número é maior? -5 ou -4?

A partir da discussão, esperasse que os alunos concluam que o zero é um elemento neutro e que à sua esquerda encontram os números negativos e à sua direita os números positivos, além disso esperasse que eles possam comparar os números inteiros através da reta numérica, com os números mais à direita sendo maiores que os números mais à esquerda.

Após a realização da atividade o professor deve aplicar exercícios de fixação para os alunos.

Na próxima aula, outra atividade será aplicada:

Atividade 2: Opostos e simétricos

Materiais: Canetinha colorida, lápis, papel, régua e borracha.

Método: Individualmente dessa vez, outra reta numérica será criada com os alunos, porém o professor deve propositalmente escrever apenas números opostos, como por exemplo: -3 e +3, -5 e +5, etc.

Após a criação e correção da reta na lousa o professor deve circular com canetas da mesma cor os opostos na sua própria reta e instruir os alunos a fazerem o mesmo em suas retas, por exemplo: circular de verde o -3 e o +3, de azul o -5 e o +5, e assim por diante;

Após isso o professor deve instruir para que os alunos dobrem a folha no ponto 0 de forma que os números assinalados com a mesma cor se sobreponham um ao outro;

Após isso será feita outra discussão com os alunos com os seguintes tópico:

a) O que aconteceu com os números da mesma cor?

Com a discussão esperasse que os alunos percebam que o zero é o ponto de simetria entre os números negativos e positivos, e que existe uma relação entre os números com sinais diferentes, porém com mesmo módulo.

Após a realização da atividade anterior será apresentado aos alunos o conceito de módulo ou valor absoluto e o conceito de números opostos ou simétricos, e para fixação do conteúdo serão feitos exercícios.

-Semana 2: Agora o professor irá introduzir as operações com os números inteiros. Em um primeiro momento o professor deve retomar as operações já conhecidas com os alunos e estabelecer uma relação com a subtração dos naturais e os inteiros, apresentando a subtração como uma soma com números negativos ou a soma do número oposto;

Após a introdução da soma, o professor deve trabalhar a subtração, através de problemas que envolvam soma e subtração para que os alunos possam identificar essas duas operações;

Após o conceito de soma e subtração estarem definidos, é hora de apresentar a multiplicação e a divisão propondo a seguinte leitura:

Um matemático do final do século XVI escreveu a seguinte

história: “Eu tinha 3 dívidas, todas de 4 moedas de ouro.

Mas as pessoas para quem eu devia morreram. Perdi 3

vezes a dívida de 4 moedas. Fiquei 12 moedas mais rico”.

Com essa história, o matemático quis explicar que

$(-3) . (-4) = +12$

Após a leitura do texto o professor pode introduzir aos alunos à regra dos sinais, em que a multiplicação e divisão de números com os mesmos sinais, resulta num número positivo, e quando possuem sinais opostos, o resultado é um número negativo.

Após isso o professor deve trabalhar mais problemas, envolvendo as 4 operações, para que os alunos possam diferenciar as 4.

-Semana 3: Nesta semana serão retomados os conceitos potenciação e radiciação, sendo a potenciação definida como uma multiplicação de inteiros e, portanto, a regra de sinais pode ser aplicada. Neste momento o professor pode perguntar aos alunos o que acontece quando um inteiro negativo tem expoente par, e o que acontece quando tem expoente ímpar. Esperasse que os alunos concluam que números com expoente par são sempre positivos.

A radiciação de números negativos não será definida e para isso pode-se questionar os alunos através de exemplos de o porquê não podemos definir a raiz de um número negativo no conjunto dos números inteiros.

E então finalmente serão trabalhadas expressões numéricas envolvendo todas as operações vistas até então com números inteiros.

3. **Conclusões:** A aprendizagem se dá pela participação e significação dos alunos aos conceitos apresentados.
   É importante a utilização de exemplos do dia a dia dos alunos para que estes relacionem os conceitos apresentados ao cotidiano, além disso, a realização de discussões estimula os alunos a questionarem e discutirem os assuntos abordados, tornando a aula mais dinâmica.
   Essa aula se mostra eficiente na aprendizagem dos alunos, pois além de utilizar exemplos cotidianos que tornam a matemática menos abstrata, também apresenta uma contextualização histórica pouco presente na maioria dos materiais acadêmicos, que não só podem criar uma interdisciplinaridade na matemática, como atrair o interesse de alunos que geralmente não o teriam.

Formas previstas de avaliação: Participação dos alunos, atividades diárias para fixação, tarefas para treinar os conteúdos vistos em sala e uma prova para verificação do aprendizado.

Referências:

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular - **BNCC**. Brasília. Disponível em: <basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>

BRANCALHÃO, A; LOPES, L; BERTOLINI, M; GEROTE, M; SANTOS, R; BOVINO, S; ANTONAGI, T. **Matemática 7º ano – material do professor**. Apostila de matemática. 2020. Colégio objetivo

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem.** 2. Ed. São Paulo: EPU, 2011.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática, rio de Janeiro – RJ, ed. 1, 2012

OS PITAGÓRICOS, NÚMEROS FIGURADOS E SEQUÊNCIAS	
Autor: Augusto Mendes Duarte	**Turma:** Noturno **Data: 5/09/2020**
Tema tratado: Introdução às sequências numéricas através de investigação e contextualização histórica com os Pitagóricos	
Ano escolar: 1ºano do Ensino Médio	
Ementa: Noção intuitiva sobre sequências; Números Figurados; Teorema de Pitágoras; Trincas Pitagóricas; Progressão Aritmética.	
Objetivos: Revisar intuitivamente o conceito de sequência e introduzir progressões aritméticas	
Recursos empregados: *Slides* para projeção, lousa, giz, fichas, papel e lápis	

Descrição de todas as atividades a serem apresentadas:

Segundo a Base Nacional Comum Curricular, as habilidades que compreendem identificação de regularidade de uma sequência numérica se encontram entre as competências do 8ºano do Ensino Fundamental. No Ensino médio, é esperado que os alunos sejam capazes de identificar progressões aritméticas, entrem em contato com algumas de suas fórmulas e suas aplicações em resolução de problemas.

> (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
>
> (BRASIL,2017, p.533)

Utilizando-se de contextualização histórica com os pitagóricos, as atividades contidas neste plano de aula visam revisar com alunos de ensino médio os conceitos de sequências estudados no 8ºano, assim como introduzir intuitivamente ideias sobre progressão aritmética. Utilizando História e números figurados como recurso didático, esta aula faz parte do itinerário de aulas para o 6ºano sobre divisibilidade e do 7ºano sobre MDC. Ao resgatar mais uma vez a contribuição dos Pitagóricos para a

Matemática antiga, este roteiro tem como objetivo secundário oferecer aos alunos um tácito alicerce sobre História da Matemática Antiga.

Diferentemente dos anteriores, este plano de aula descreve atividades de duração superior a uma aula, que podem ser divididas em até três aulas para abranger completamente o conteúdo.

Descrição de situação 1:

Como introdução histórica, esta seção almeja recuperar qualquer lembrança sobre os pitagóricos que os alunos possuam, assim como introduzir esta escola aos alunos que não a conhecem. Tratando-se de Ensino Médio, é possível que alguns alunos concebam o nome Pitágoras como sinônimo do famoso teorema. Logo, a situação seguinte também servirá para desmistificar a crença de que o teorema foi "inventado" por Pitágoras.

Objetivos: Relembrar o estudado sobre os pitagóricos e números figurados. Esta etapa expositiva é programada para tomar parte da primeira aula.

Metodologia: Trata-se de uma sequência expositiva com ocasionais perguntas aos alunos para incentivar a interação. Para não tornar a apresentação entediante, é recomendável que os *slides* contenham diversas imagens e animações. Aproveitando a situação interdisciplinar, é possível ir além na contextualização com a disciplina de História, uma vez que alunos do Ensino Médio têm mais contato com História Geral do que os do Fundamental.

Desenvolvimento: De acordo com Roque (2012), a Matemática grega antiga possuiu diferentes fases. Quando nos referimos à Matemática atual, ela é comumente vista como um corpo de conhecimentos abstratos permeados principalmente por equações e representações simbólicas, o que muitas vezes leva às pessoas uma sensação de distanciamento.

Entretanto, tendo em conta o que atualmente é aceito, supõe-se que procedimentos como a contagem ou cálculos aritméticos surgiram de forma bastante concreta, e o raciocínio prático teve seu destaque na História da Matemática por um longo período.

Conforme Roque (2012), a hipótese atual argumenta que a escrita teria se originado de uma forma de contagem. Onde hoje fica o Iraque, na região da Baixa Mesopotâmica, foi ocupado na antiguidade por povos como os Sumérios ou Babilônicos. Os Sumérios, em especial, são responsáveis pelo tipo mais antigo de escrita conhecida, que data do quarto milênio antes da Era Comum.

Os registros ancestrais destas civilizações constituem-se principalmente de tabletes de argila. Além disso, as escavações traziam à tona *tokens* de diversas formas – objetos que eram utilizados como fichas para representar algum outro objeto, como uma ovelha ou um jarro de óleo. Este tipo de contagem era naturalmente relacionado com administração de bens de consumo, algo necessário às cidades-Estado. Curiosamente, a escrita parece ter surgido após a consolidação das cidades-Estado, que até então funcionavam sem muitas necessidades administrativas.

Fonte: Marie-Lan Nguyen; Licenciado sob a *Creative Commons Attribuition 2.5 Generic* *https://creativecommons.org/licenses/by/2.5/deed.en.*

Figura 1 – *Tokens* mesopotâmicos em exposição no Museu do Louvre, França.

Com o tempo, ter-se-ia notado que os objetos podem ser substituídos por marcas em argila para facilitar o registro. Assim, a escrita nasceu a partir de marcas feitas para contabilização.

Fonte: Marie-Lan Nguyen; Pixabay License - https://pixabay.com/photos/ancient-sumerian-assyrian-1827228/

Figura 2 – Tablete administrativo sumério em exposição no Iraque.

O caminhar histórico mostra como a matemática, precedendo a escrita no ocidente, se ocupava primordialmente com funções seculares. Do ponto de vista de outra civilização da mesma época, os egípcios, afazeres administrativos também eram o foco. O famoso papiro de Rhind, de cerca de 1650 a.E.C., é um exemplo de um documento cuja função provavelmente era pedagógica, instruindo profissionais que utilizariam cálculos em suas profissões.

Fonte: Dom´nio Público; https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg

Figura 3 – Papiro de Rhind exibindo formas geométricas que acompanham os cálculos.

Exemplos de ensinamentos deste papiro incluem formas de calcular áreas a volumes, fazer grandes multiplicações, divisões e resoluções de problemas em que falta uma quantidade. Um exemplo seria o Problema 25:

> Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual a quantidade?
>
> (ROQUE, 2012, p.80)

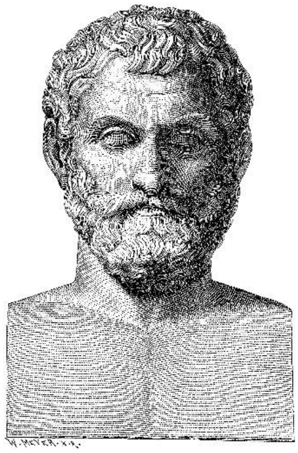
Se os alunos tentassem resolver este problema pelos métodos atuais, chegariam provavelmente à equação $x + \frac{x}{2} = 16$. Os egípcios, contudo, não utilizavam equações, que é uma forma de resolução de problemas inventada apenas 2000 anos depois pelos árabes. No entanto, eram capazes de resolver problemas complexos utilizando seus métodos próprios.

Cálculos com quantidades, divisões, multiplicações e volumes estão todos intimamente relacionados com tarefas administrativas. A elite egípcia cobrava taxas pelo uso de terras dos súditos, e também contava o que era produzido, o que poderia ter implicações sobre os impostos cobrados. Produtos medidos em caixas ou jarros, como grãos, óleo ou água, demandavam a capacidade de medir volumes. Este tipo de prática sempre foi historicamente comum. Na verdade, perdura até a atualidade com os impostos sobre terrenos e produtos que são pagos às autoridades. Para todos estes processos são necessários cálculos precisos para que haja o mínimo de perda possível.

Indo mais adiante no tempo, adentramos na península do Peloponeso a idade da Grécia Antiga. Iniciada por volta de 1100 a.E.C., marcou o início da estruturação daquilo que posteriormente foi denominado pólis, a cidade-Estado grega. Até o período helenístico e o Império Romano, além das diversas revoluções políticas, foram muitas as mudanças no pensamento vigente. Acompanhando estas alterações está a Matemática, que se insere na sociedade humana como uma das diversas áreas de estudo de grande interesse público.

Segundo Heath (1912) em seu livro *A History of Greek Mathemathics*, Tales de Mileto (626 a.E.C.) é geralmente considerado o mais antigo matemático grego. O famoso historiador Heródoto (484 a.E.C.) menciona a geometria praticada pelos egípcios, mas apenas muitos anos depois, autores como Proclus (412 E.C.) atribuem a Tales um papel essencial em relação a ela. Este homem teria trazido do Egito a

Matemática e a introduzido na Grécia, onde teria ensinado a população. Com uma história envolta em lendas, dizem que teria, por exemplo, medido a altura de uma das pirâmides através de sua sombra; que podia dizer a distância que navios estavam da costa utilizando seu conhecimento sobre triângulos e que teria previsto diversos eclipses. Várias descobertas atribuídas a ele hoje são consideradas como sendo, na verdade, posteriores.[iv]



Fonte: Domínio Público; https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Illustrerad_Verldshistoria_band_I_Ill_107.jpg

Figura 4 – Suposta fisionomia de Tales de Mileto.

Heath (1921) relata que Proclus atribui a transformação da Matemática em educação liberal à seita dos Pitagóricos. Este nome caracterizava uma comunidade supostamente fundada por um homem chamado Pitágoras.

Conforme análises históricas recentes, não se pode confirmar nem sequer que Pitágoras tenha existido. No entanto, parece ser fato que existiram os “Pitagóricos”, mencionados diversas vezes sem associação direta com o homem Pitágoras.

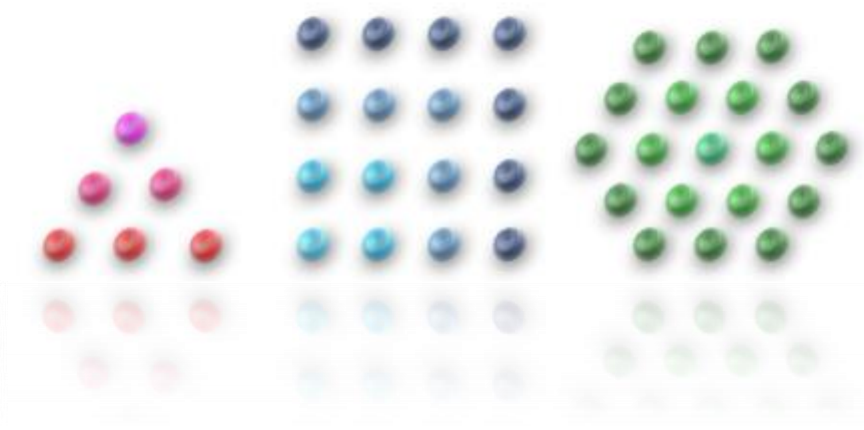
Segundo o relato tradicional, teria nascido por volta de 570 a.E.C. na ilha de Samos próxima à Turquia. Assim como Tales, teria viajado e acumulado conhecimento sobre disciplinas diversas, como Matemática e Magia. Fundou em Crotona, na Itália, a escola que leva seu nome.

Conforme Heath (1921), diversos autores narram a história de suas viagens e conquistas, mas poucos se aprofundam em seus estudos. Os poucos que o fazem discorrem sobre como Pitágoras teria transformado a Aritmética em uma filosofia, centrando-a em um papel de destaque em seus ensinamentos. A Geometria, a Astronomia e a Música também eram objetos de estudo, muito embora a Aritmética seja aparentemente o alicerce fundamental.

Uma citação do pitagórico Filolau diz: "tudo o que se pode conhecer tem número; tal que não é possível que sem números qualquer coisa possa ser concebida ou conhecida". Isto resume de maneira característica o que Aristóteles descreveu como a crença Pitagórica de que "tudo é número".

Os Pitagóricos notaram que tudo que existe pode ser contado – sejam pessoas, estrelas, gotas d'água ou razões musicais. A partir daí, parecia natural assumir que os números são tudo o que existe. Se tudo pode ser contado e a disposição numérica é a única característica comum a todas as coisas diferentes do Universo, tudo o que conhecemos deve ser feito de números. Esta teria sido a sequência do pensamento dos Pitagóricos, segundo Aristóteles.

A forma dos números, consoante com a doutrina, era dada pela disposição organizada de pedrinhas. Eram os chamados números figurados.



Fonte: autor.

Figura 5 – Exemplos de números figurados – bolinhas dispostas em determinados formatos.

Estas formas eram criadas tanto com intuito de compreender propriedades numéricas quanto de evidenciar a característica matemática do Universo, corroborando sua doutrina filosófica.

Descrição de situação 2:

Objetivos: Revisar brevemente com os aos alunos conceitos relacionados com números figurados, avançando para os diversos tipos de sequências e progressões.

Metodologia: Os alunos são divididos em grupos e se sentam preferencialmente no chão, para terem à sua disposição espaço para trabalhar com os números figurados. Fichas são distribuídas aos grupos. A aula continua expositiva e contextualizada com a matemática grega e os números figurados, e conforme explicações sobre os conceitos são oferecidas, é pedido que os alunos os explorem com as fichas.

Desenvolvimento: Entre todas as figuras que os Pitagóricos construíam com objetos, a mais predominante era o triângulo.

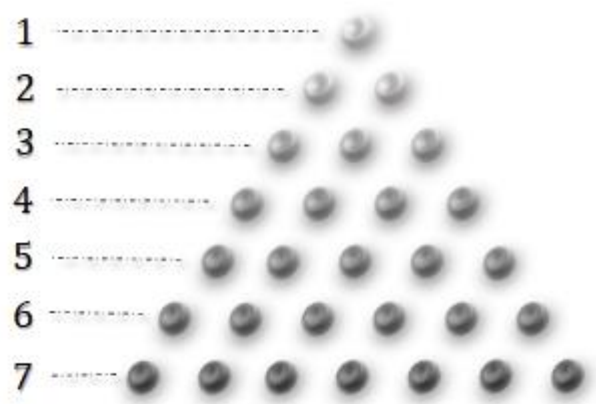
Fonte: autor.

Figura 6 – Números triangulares, destacando o *tetraktis*.

O triângulo de lado quatro, em especial, era conhecido como *tetraktis*, ou "o princípio do bem-estar". Este era o símbolo dos pitagóricos, enquanto a estrela de cinco pontas (o pentagrama – a junção das diagonais do pentágono regular) era seu símbolo geométrico. A alcunha de "número perfeito" era dada ao número 10, a soma de todos os pontos que formam o *tetraktis*.

Esta figura introduzirá aos alunos o conceito de sequência. Pergunta-se aos alunos se eles têm alguma ideia de como são formados os números triangulares. Caso ninguém acerte a resposta facilmente, pode ser dado um tempo para que os alunos tentem descobri-la com as fichas ou com a imagem.

O professor explica que estas formas triangulares são formadas acumulando a sequência dos números naturais: começando com uma ficha, a segunda figura é formada adicionando duas, a terceira três, a quarta quatro e assim por diante.



Fonte: autor.

Figura 6 – Formação do triângulo de lado 7.

Mas os números triangulares não são os únicos que eram estudados.

Fonte: autor.

Figura 7 – Sequência dos números quadrados.

Pede-se aos alunos que façam com as fichas os números quadrados até o de lado cinco e tentem descobrir como são formados. Após receber resoluções dos alunos, o professor explicará a resposta.

Fonte: autor.

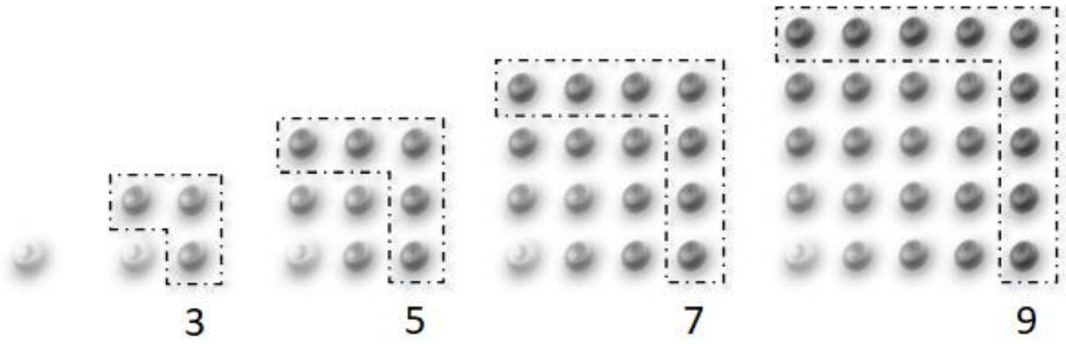


Figura 8 – Adiciona-se 3, 5, 7 e 9 fichas para formar os cinco primeiros números quadrados.

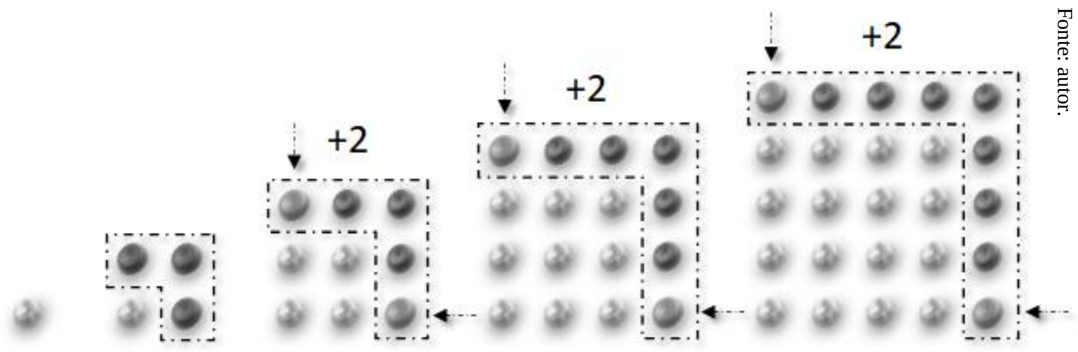
Acrescenta-se em L a sequência dos números ímpares para formar números quadrados. Na antiguidade, existia um instrumento astronômico utilizado por todo o mundo chamado de gnômon. Trata-se de um bastão, ou mais comumente uma forma triangular, utilizada para projetar uma sombra sobre um plano e fazer medidas. Um exemplo é o gnômon de relógios de Sol.

Fonte: Foto por Alexandre Mirgorodski. Disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sundial_Taganrog.jpg

Figura 9 – Gnômon em um relógio de Sol em Taganrog, Rússia.

Muito antes de haverem relógios, instrumentos como este eram utilizados para medir tempo ou posição dos astros. Um dos mais antigos existentes é de 2000 a.E.C., encontrado nas ruínas de um dos observatórios astronômicos mais antigos do mundo, o da civilização neolítica de Taosi, na China. Neste caso, inclusive, este tipo de estudo e instrumentação precediam a própria escrita, já que na China esta apareceu somente em 1600 a.E.C., durante a Dinastia Shang.

Posteriormente, o nome gnômon – que significa "aquele que sabe, por sua capacidade de indicar uma informação certa – passou a designar também objetos em forma de esquadro. O formato em L deste instrumento fez com que os pitagóricos chamassem as partes em L adicionadas a números quadrados de gnômons.

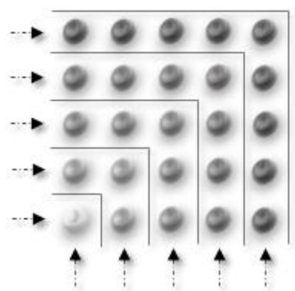


Fonte: autor.

Figura 10 – Após a formação do primeiro quadrado, cada gnômon é maior que o anterior por duas fichas.

Portanto, o processo formativo também pode ser descrito em termo dos gnômons. Uma questão interessante a se trazer aos alunos é: se eu tenho um número quadrado de lado 9, quantas fichas ele tem? Caso nenhum aluno acerte a resposta, pode-se deixar que pensem por alguns minutos, analisando as construções que fizeram. A intenção é fazê-los compreender que se pode contar quantas fichas tem em um número quadrado simplesmente multiplicando um lado pelo outro. Ou seja, o número de fichas do quadrado de lado 9 é $9^2 = 81$.

Podemos perguntar em seguida: quantos gnômons tem um quadrado de lado cinco?



Fonte: autor.

Figura 10 – Gnômons em um quadrado de lado 5.

Os alunos deverão notar que todo número quadrado é formado por uma sucessão de gnômons. Notamos ainda que todo gnômon é um número ímpar.

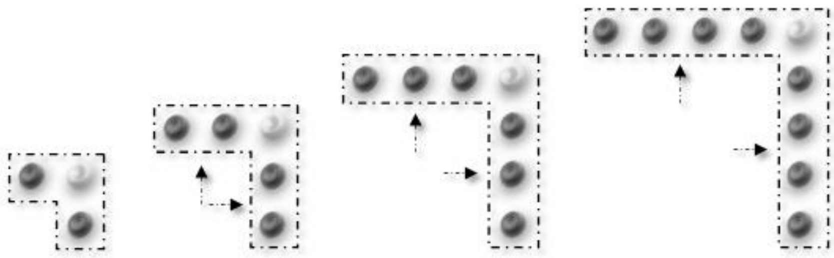


Figura 11 – Todo gnômon é formado por dois braços iguais e uma ficha no meio. Portanto, todo gnômon é ímpar.

Concluímos, por fim, que todo número quadrado é a soma de números ímpares consecutivos, conforme retrata a figura 8. Observando a figura 10, nota-se que:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$5^2 = 25$$

$$\therefore$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

Ou seja, a soma dos cinco primeiros números ímpares é igual a 5 ao quadrado. Similarmente, a soma dos seis primeiros números ímpares resulta 6 ao quadrado, e assim por diante. Pedimos aos alunos neste momento que tentem encontrar de cabeça a soma dos 8 primeiros números ímpares. E a dos 10 primeiros? E dos 13?

Com este exercício os discentes tiveram um primeiro contato com a soma de números de uma sequência, relacionando visualmente propriedades que se traduzem em linguagem algébrica.

Agora, oferece-se um problema maior para que tentem resolver por conta própria através dos meios que julgarem mais convenientes. Como encontrar a soma dos primeiros n números pares? Sugere-se aos estudantes que utilizem um raciocínio

Fonte

pictórico similar ao desenvolvido para encontrar a soma dos ímpares. Após um tempo de 10 ou 15 minutos, o professor pede que os grupos apresentem suas respostas.

Uma possível solução é:

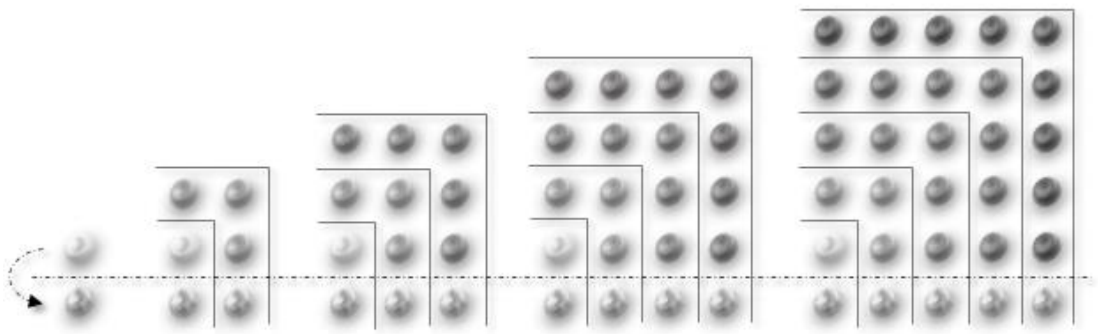


Figura 12 – Sequência dos primeiros números oblongos.

Os gnômons são números ímpares. Portanto, se adicionarmos uma ficha extra a um dos braços do gnômon, obteremos números pares. Basta agora somar estes "gnômons pares", e obteremos a soma dos primeiros n números pares. Observando as construções notamos que formam retângulos em que um lado é maior do que o outro por uma unidade.

Assim, a soma dos dois primeiros números pares é dada por $2 \times 3 = 6$, dos três primeiros, $3 \times 4 = 12$ e assim por diante. A soma dos cinco primeiros números pares será, então:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5 \times 6 = 30$$

De forma geral, concluímos que a soma dos n primeiros números pares é:

$$n \times (n + 1)$$

Pois tal operação é feita multiplicando o lado do número quadrado por um lado com uma ficha a mais.

Segundo Heath (1921), este tipo de número era chamado de "número oblongo". Como estudado nas aulas anteriores, números retangulares quaisquer formados a partir da divisão em partes iguais de pedrinhas em forma de linha são chamados de “alongados”. No entanto, quando são formados por uma sequência de números pares, ficando com um lado uma unidade maior que o outro, são chamados simplesmente de “oblongos”.

Roque (2012) descreve uma tabela de opostos construída pelos pitagóricos. Para a doutrina, a dualidade era um fator de suma importância, representada pelo contraste entre o par e o ímpar, presente na cosmogonia do Um. A tabela de opostos se dá como se segue:

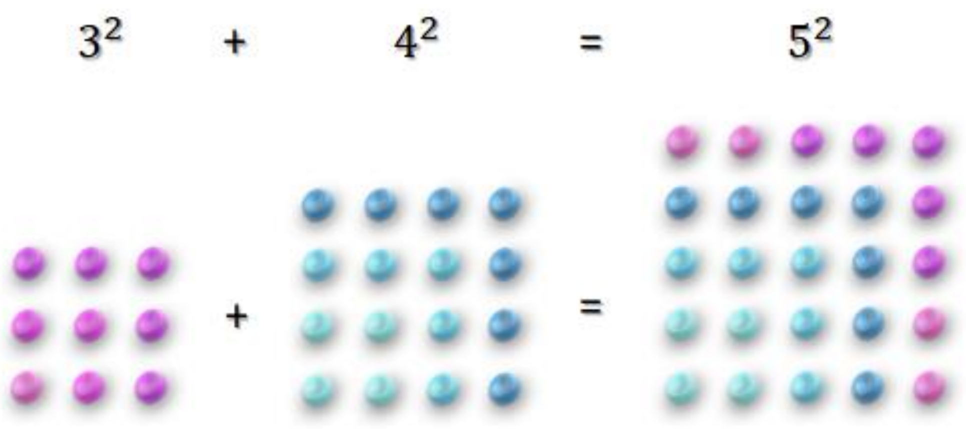
Um	Inúmeros
Ímpar	Par
Quadrado	Oblongo
Limitado	Ilimitado
Reto	Curvo
Luz	Escuridão
Macho	Fêmea
Bom	Mau

Em concordância com o detalhado nas aulas anteriores, o Um seria a origem de todo o Universo, um ser bissexuado na partir do qual se originou todo o Universo. O Um não é um número, pois a palavra “número” implica pluraridade. Portanto, o Um é definido como oposto do plural. O ímpar e o par tratam de outro aspecto desta dicotomia, sendo o primeiro prontamente relacionado à unidade e o par à abundância. Conforme estudamos, números quadrados são formados por uma sequência de ímpares, e os oblongos por uma sequência de pares. Logo, “quadrado” fica do lado do “ímpar” e “oblongo” do lado do “par”. “Limitado”, “luz”, “reto” e “bom” se referem a coisas previsíveis pelo intelecto humano. Os números quadrados, por exemplo, possuem sempre a mesma forma. Enquanto isso, “ilimitado” parece condizer com a denominação de “oblongo”, que são formas cada qual com uma razão distinta entre os lados

($^1/_2$; $^2/_3$; $^3/_4$; $^4/_5$ ...). "Escuridão", "curvo" e "mau" se referem similarmente a conceitos indefinidos ou de difícil compreensão. A presença da mulher do lado "negativo" da tabela condiz com o papel da mulher na sociedade grega antiga, que era ínfimo e geralmente distante de produções intelectuais. Tudo aquilo que é ditado pela razão, conforme a seita pitagórica, seria superior ao indefinido ou relativo.

Os números figurados possuem, ainda, um papel importante no chamado "Teorema de Pitágoras". Conforme estudamos, a Aritmética era a disciplina principal da doutrina Pitagórica. Acredita-se, portanto, que o "teorema" tenha sido trabalhado primeiro aritmeticamente, e apenas posteriormente em sua forma geométrica.

Segundo a fórmula que conhecemos, $a^2 + b^2 = c^2$ descrevem os lados de um triângulo retângulo. Como podemos interpretá-la aritmeticamente? Levando em conta o que construímos até então, podemos ver esta relação como a soma de dois números quadrados originando um terceiro.



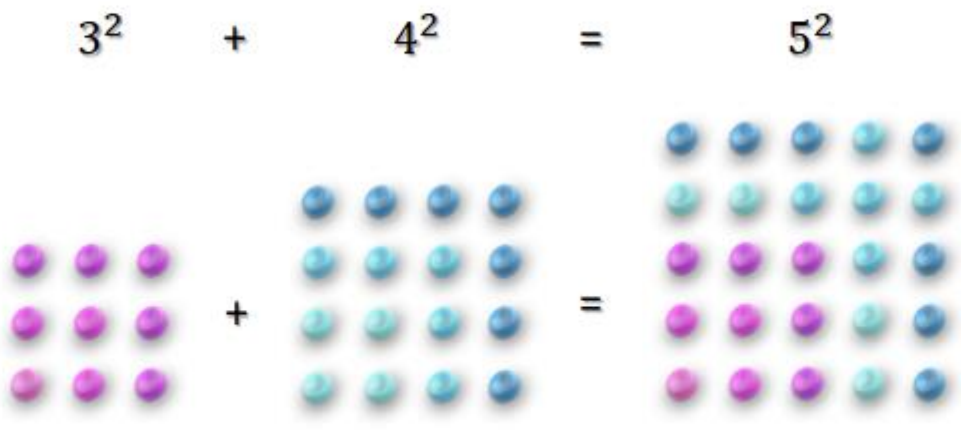
Fonte: autor.

Figura 13 – Soma dos quadrados de lado 3 e 4 resultando no de lado 5.

Utilizando o conhecido caso "3,4,5" podemos montar e visualizar fisicamente a soma de quadrados de lado três e quatro tornando-se um de lado 5. Números como estes são chamados de "trincas". Os pitagóricos, em vez de trabalhar com lados de triângulos, inicialmente teriam trabalhado com números figurados. Note como um quadrado, o de lado 3, torna-se um gnômon e completa um outro quadrado. Por isso dizemos que a soma de dois quadrados deve resultar em um terceiro.

O estudo destas trincas, todavia, não era uma peculiaridade dos gregos. Segundo Roque (2012), há hipóteses que apontam que os mesopotâmicos já as investigavam, assim como existem registros posteriores de trabalhos na China e na Índia. Apesar de tudo, eram poucas as trincas conhecidas e mencionadas na literatura. Uma pergunta interessante seria: como descobrir tais trincas?

A seguir, propõe-se aos alunos que tentem descobrir uma forma de encontra-las. Como dica, o professor pode revelar: “é necessário encontrar um quadrado que seja passível de se tornar um gnômon”. Além disso, podemos também pensar a “3,4,5” de outra maneira.



Fonte: autor.

Figura 14 – Versão alternativa.

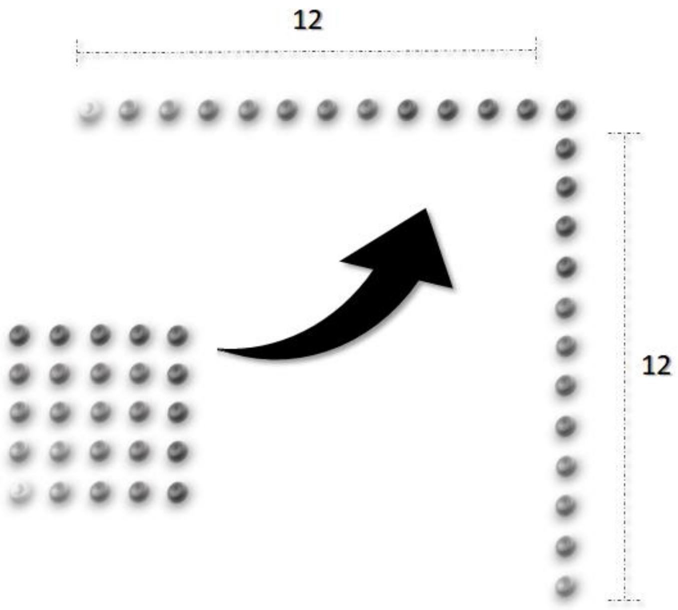
Neste caso, em vez de adicionar o quadrado de lado 3 como um gnômon, adicionamos o de lado 4 como um “gnômon duplo”. Ou seja, se pudermos encontrar um quadrado que possa se tornar um gnômon duplo, também já teremos resolvido o problema. Como encontrá-los?

Esta atividade é bem mais difícil. Portanto, depois de passados alguns minutos, o docente pode oferecer uma nova dica. “Qual uma das características principais de um gnômon? Então, o que um quadrado precisa ser para que ele possa ser um gnômon?”.

A resposta é "ser ímpar". Segundo Heath (1921), Pitágoras já sabia desta "fórmula". Se tomarmos um número quadrado que seja ímpar, ele imediatamente também é um gnômon. Portanto, ele encaixa em um outro quadrado para formar um quadrado maior.

Por exemplo, vamos tomar o quadrado 25, de lado 5 e transformá-lo em um gnômon. Quando fazemos este processo, sabemos de início quanto vai medir o braço do gnômon. Como o gnômon é um número ímpar com duas grandes partes iguais, os braços deverão medir $24 \div 2 = 12$. Assim, se torna simples o processo de transformação do quadrado.

Uma vez sabendo que o braço do gnômon mede 12, temos que o quadrado grande que ele vai completar irá medir 13, e que o quadrado menor no qual ele encaixa deve medir 12 de lado. Como conclusão, encontramos outra trinca: 5 (o quadrado menor), 12 (o quadrado em que ele encaixa) e 13 (o quadrado resultante).



Fonte: autor.

Figura 15 – O quadrado 25 como gnômon.

Na época, não haviam equações ou linguagem algébrica. Logo, as relações eram representadas somente na forma de receitas escritas. Diríamos então o seguinte: tomamos um quadrado ímpar. Tiramos 1 e tomamos-lhe a metade. Esta metade é um número da trinca, e ela acrescida de um é o número resultante da trinca. O primeiro número da trinca é o próprio quadrado pelo qual iniciamos.

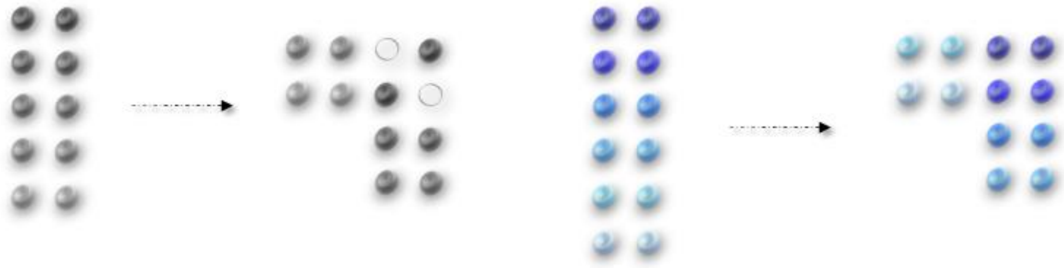
Em linguagem algébrica, teríamos a fórmula:

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$$

Se a desenvolvermos, obtemos que o quadrado (a^2) somado com o quadrado do tamanho do braço do gnômon é igual ao quadrado do tamanho do gnômon. De fato, os dois lados da igualdade são idênticos.

Como podemos perceber, esta fórmula nos oferece sempre trincas em que os dois maiores números são seguidos. Nem todas as trincas pitagóricas são dessa forma (por exemplo, “8,15,17” é outra trinca). Através de um raciocínio um pouco mais complexo, Platão desenvolveu uma receita para se encontrar trincas utilizando, em vez de um número ímpar, um número par. Como na figura 14, transforma-se um quadrado em um gnômon duplo para adicioná-lo a outro. Nesta nova investigação, a pergunta seria: quais as condições para que um quadrado possa se tornar um gnômon duplo? Esta questão é ainda mais complicada.

“Os gnômons duplos são formados por dois gnônons. Qual a característica de dois gnômons?”. É provável que os alunos confundam condição suficiente com necessária e cheguem à resposta de que “basta ser par”. De fato, todo gnômon duplo é par por ser a soma de dois ímpares – formam números alongados. Não obstante, nem todo número alongado (par) é capaz de formar um gnômon.



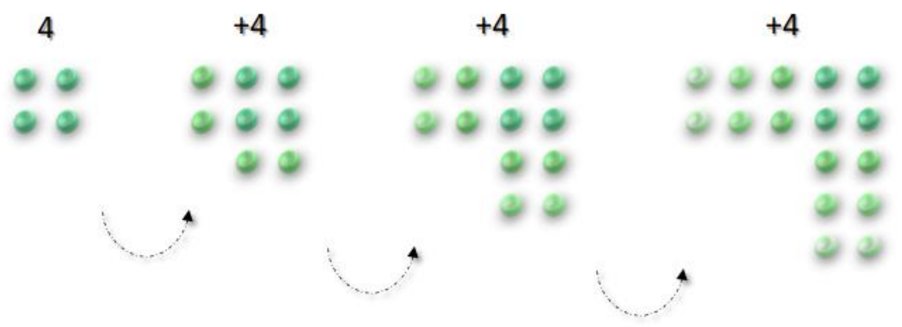
Fonte: autor.

Figura 16 – 10 e 12. Um é um gnômon e o outro não.

Na figura acima, 10 não é um gnômon duplo, apesar de ser par. No entanto, é possível construir um gnômon duplo com 12. Vemos que não basta ser par, mas se faz necessária também outra característica.

Observemos o formato do gnômon. O que o diferencia de um número alongado é a dobra. É necessário que tenha quatro fichas como “dobradiça”, e o restante tem que ser proporcional, ou seja, divisível em duas partes iguais. Por exemplo, 10 não possui quatro números no centro para formar a dobradiça, e sim apenas dois. Vemos que para haver a dobradiça no número alongado, é imprescindível que cada uma das hastes do número alongado seja par, para que haja um “parzinho” central. É o caso do 12, em que 6 é par. Como conclusão, além de ser par, a metade do número alongado também deve ser par. Um número que é divisível por dois duas vezes deve ser divisível por 4.

Uma outra forma de chegar a esta conclusão é analisando a sequência dos gnômons duplos.



Fonte: autor.

Figura 17 – A sequência dos gnômons duplos é formada adicionando-se +4 à “dobradiça” de base.

Nesta análise, os gnômons duplos são feitos de quatro unidades mais outras quatro fichas. Desta forma, fica visível que devem ser sempre múltiplos de quatro. O início da construção da trinca, assim, deve estar em um quadrado múltiplo de quatro, como 64, lado 8. Para achar o lado do gnômon, podemos pensar de acordo com as imagens que construímos: constrói-se a dobradiça com quatro fichas, e o restante é dividido por quatro. O lado do gnômon será o resultado da divisão por quatro mais dois.

Fonte: autor.

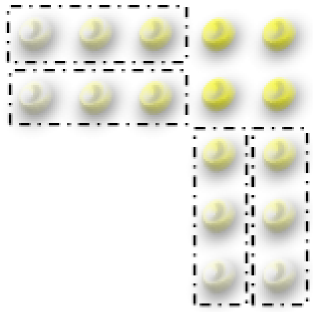


Figura 18 – A divisão de um gnômon duplo na "dobradiça" e em quatro outras partes. Quando se soma uma das partes com 2, encontra-se o lado do gnômon, que também será o lado do quadrado maior.

Como ele se torna um gnômon duplo, o quadrado em que ele encaixa tem lado duas unidades menor que seu lado. Para o 64, seu lado do gnômon será $\frac{64-4}{4} + 2 = 17$, que também é o lado do quadrado maior. Isto faz do lado do quadrado que encaixa 15. Como resultado, temos a trinca "8,15,17".

A tradução em linguagem algébrica atual seria:

$$a^2 + \left(\frac{a^2-4}{4}\right)^2 = \left(\frac{a^2-4}{4} + 2\right)$$

O que é equivalente a

$$a^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)$$

Esta última fórmula necessita um pouco mais de esforço para ser visualizada. É possível fazê-lo dividindo o gnômon duplo em quatro, o que nos faz lograr quatro barras faltando somente uma unidade para completar o lado do quadrado final. Retirando-se uma ficha destas barras, obtém-se o lado do quadrado menor.

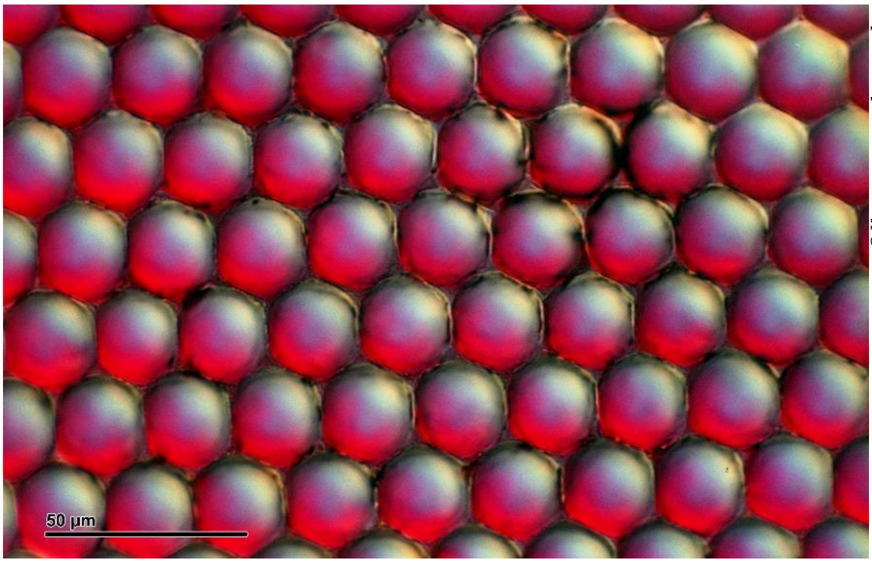
Poderíamos similarmente encontrar regras para se obter gnômons triplos, quádruplos e assim por diante. Todavia, isto transcende o escopo desta aula.

Um adendo importante à discussão seria perguntar aos alunos: qual a importância dos números figurados? Onde eles aparecem em nossa vida cotidiana? Estes números aparecem em muitas das organizações de objetos geometricamente. Por exemplo, quando em uma feira o mercador empilha laranjas em forma de pirâmide, está construindo um número figurado tridimensional – o número piramidal – que pode ser constituído de uma sequência de números triangulares, começando pelo maior na base e chegando até o um no topo.

Figura 19 – Pilha de laranjas.

Fonte: Aka Maraqu; Licença não-comercial. Acessível em https://jooinn.com/pile-of-oranges.html

Números figurados planos também são comuns. Hexágonos em uma colmeia de abelha se amontoam construindo um padrão, células em nosso corpo organizam-se em tecidos e até os átomos que constituem moléculas apresentam tais disposições.



Fonte: Josef Reischig; Arquivo sob a licença Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported - https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en; Acesso em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Insect_eye_(250_07)_Composite_eye_of_insects.jpg

Figura 20 – Padrão figurado de olho de inseto visto em microscópio.

Entre as funções simples na vida cotidiana, além da aplicação na organização de produtos em caixas ou recipientes, podemos ver números figurados alto-falantes embutidos, por exemplo.

Fonte: autor.

Figura 21 – Números figurados em um alto-falante embutido.

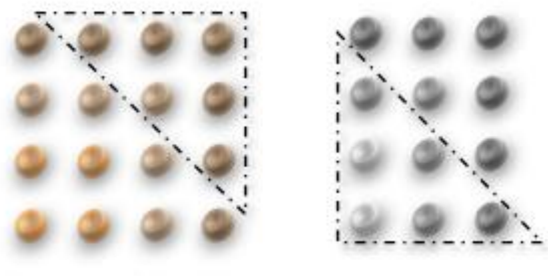
Vendo uma imagem como esta e tendo conhecimento sobre números figurados, uma pergunta espontânea seria: como contar de forma rápida e prática a quantidade de furos deste alto-falante? Esta é uma questão que pode ser resolvida utilizando como artifício a decomposição em números figurados menores.

Para isto, é necessário retornar aos números triangulares. Descobrimos que um número quadrado de lado três pode ser calculado rapidamente como 3^2. O quinto número oblongo pode ser calculado como 5×6. Como faríamos, então, para encontrar rapidamente o valor de um número triangular qualquer?

Pede-se aos alunos que tentem desenvolver um método, tendo em mente tudo o que estudamos até então, para encontrar rapidamente o valor de um número triangular qualquer. Dando-lhes um objetivo mais concreto, colocamos como finalidade o cálculo da quantidade de fichas de um triângulo de lado 107.

A primeira dica seria: “não sabemos de imediato como encontrar o número de fichas que compõe um triângulo. No entanto, sabemos como calcular o de um quadrado e de um número oblongo. Qual a relação entre números triangulares, quadrados e oblongos?”.

Caso os alunos após um tempo não descubram somente com esta dica, mostramos a seguinte relação:



Fonte: autor.

Figura 22 – Relação entre números triangulares, quadrados e oblongos.

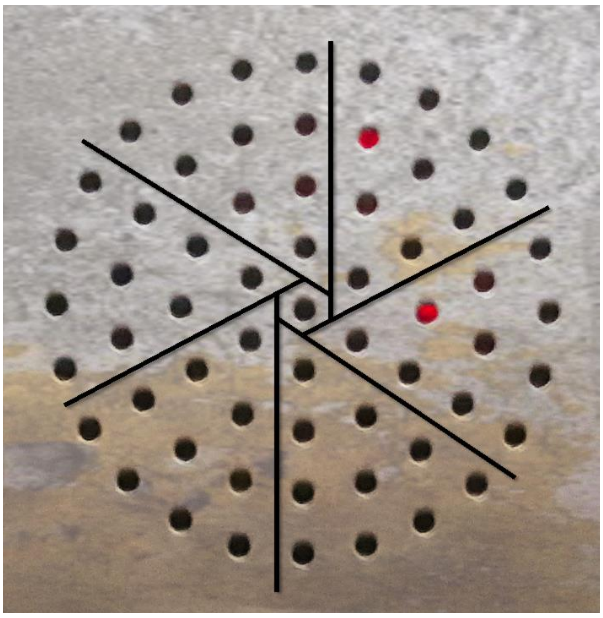
Todo número quadrado pode ser dividido em dois números triangulares consecutivos. Além disso, todo número oblongo consiste de dois números triangulares iguais. Esta informação guia o caminho para encontrar a soma das fichas que compõe um número triangular qualquer.

A conclusão que se deve chegar é que, para achar o número de objetos em um número triangular, basta encontrar a metade do número oblongo correspondente. Em vista disso, se queremos o número de objetos do oitavo número triangular, basta fazer 8×9, encontrando o número oblongo. Em seguida, divida-o por dois, obtendo 36. A resposta para o 107, deste modo, será $107 \times 108 \ \div 2 = 5\,778$.

É importante relacionarmos isto com a formação dos números triangulares. Se o número triangular de lado n é formado por $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$ e esta soma é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, temos imediatamente que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Já que é a partir desta ideia que desenvolveremos o conceito de progressão aritmética, será útil fixar este conhecimento com exercícios. Em um momento de aula mais tradicional, pede-se que os alunos calculem a soma dos k primeiros números quando k passa por diversos valores oferecidos pelo docente. Para complementar, podemos ainda retornar a problemas como o oferecido pela figura 21.



Fonte: autor.

Figura 23 – Contagem dos furos do alto-falante.

Para contar os furos do alto-falante basta nos aproveitarmos da proporcionalidade da figura para reduzi-la a formatos que saibamos calcular. A proporcionalidade hexagonal permite que essa seja dividida em seis triângulos de lado 4 mais um furo extra no centro. Cada triângulo possui dez furos, portanto no total temos $6 \times 10 + 1 = 61$ furos no alto-falante.

Quando julgar-se que os estudantes treinaram o suficiente, passamos ao tópico seguinte. Pergunta aos alunos: como faríamos para calcular a soma dos números $3 + 6 + 9 + 12 + 15$? Deixamos que pensem por algum tempo. A seguir, mostramos a resposta.

Fonte: autor.

Figura 24 – Multiplica-se o número triangular de lado 5 por três.

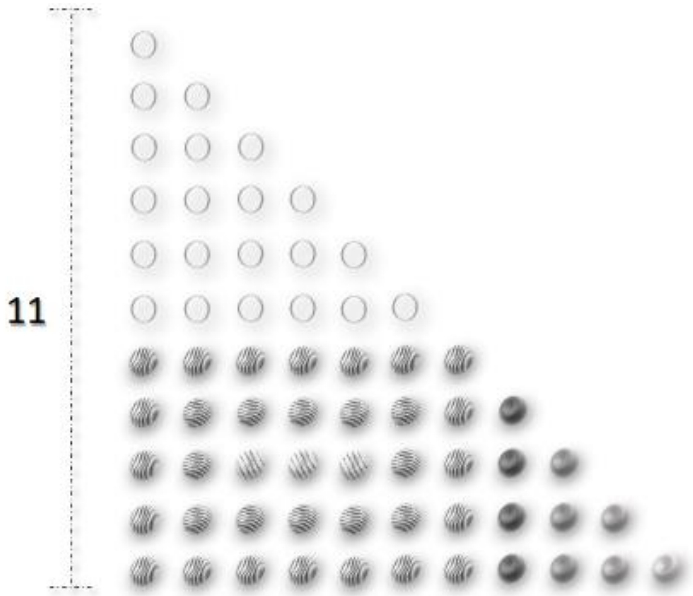
Queremos a soma de cinco números com diferença de três entre cada um deles. Esta diferença é chamada de “razão”, palavra de diversos significados, mas que em geral se refere a algo logicamente previsível (neste caso, expressa o quanto aumenta a cada passo na sucessão). Para encontrar a sequência pedida, basta multiplicarmos a sequência $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ por três. Como cada ficha se tornará três, a diferença do primeiro para o segundo será de três fichas, também do segundo para o terceiro e assim por diante. Caso quiséssemos encontrar a soma de $100 + 200 + 300$, seria suficiente notar que multiplicamos a sequência $1 + 2 + 3$ por cem.

A fórmula para o cálculo deste tipo de sequência será, isto posto, meio número oblongo multiplicado pela razão.

$$r + 2r + 3r + 4r + \cdots + nr = \frac{n(n+1)}{2}r$$

E se tivermos uma sequência como $7 + 8 + 9 + 10 + 11$?

O problema reside no início, que não é o número 1. O docente oferece mais um tempo para que os alunos investiguem a questão.

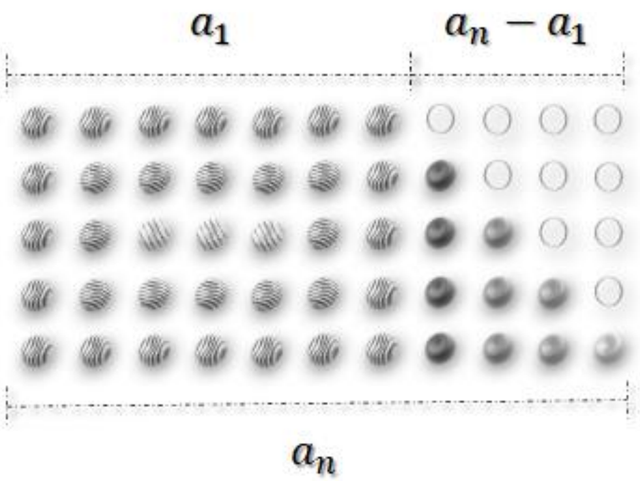


Fonte: autor.

Figura 25 – Cortamos o número triangular de lado 11 e mantemos somente do 7 ao 11.

Observando a figura que obtemos para o problema, fica simples calcular o resultado. Buscamos o valor do retângulo de lados 5 e 7 e juntamos tal quantidade com o número triangular que sobra à direita. Este possui lado 4, que é a diferença entre 11, o valor final da sequência, e 7, o valor inicial.

Pensando em termos mais gerais, consideremos o valor inicial como a_1 e o final como a_n. Observamos inicialmente que o retângulo possui valor $a_1 \cdot n$ (bolas listradas na figura abaixo), com n sendo o número de termos. Uma maneira mais fácil de calcularmos o triângulo é notando que ele é a metade do número oblongo que completaria um retângulo com todas as bolas. Ou seja, é a diferença entre a_n e a_1 vezes n dividido por 2.



Fonte: autor.

Figura 26 – A sequência figurada em termos do valor inicial e final.

Tal diferença pode ainda ser denotada como a base do número triangular, ou seja, $(n-1)$. A fórmula resultante para esta expressão seria

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 \cdot n + \frac{(n-1)n}{2}$$

Caso houvesse uma razão, teríamos de usar o artifício da multiplicação para tornar a fórmula ainda mais específica. Para tanto, multiplicaríamos o triângulo pela razão, o que a torna automaticamente a diferença entre cada termo da sequência. Como resultado, a base do triângulo deixará de ser $(n-1)$ e passará a ser $(n-1)r$.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 \cdot n + \frac{(n-1)r \cdot n}{2} \cdots ①$$

Esta fórmula se mostra bem figuradamente intuitiva, pois calculamos separadamente o retângulo à esquerda $(a_1 \cdot n)$ e em seguida o triângulo, cuja base é o número de razões acumuladas $(n-1)r$. Multiplicamos $(n-1)r$ por n para obter o número oblongo e em seguida o dividimos ao meio para que reste apenas o triângulo.

Podemos simplificar a expressão mais ainda considerando que o último termo de qualquer sequência é $a_n = a_1 + (n-1)r$. Daí

$$n \cdot a_1 + \frac{(n-1)r \cdot n}{2} = n\left(a_1 + \frac{(n-1)r}{2}\right) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)r)$$

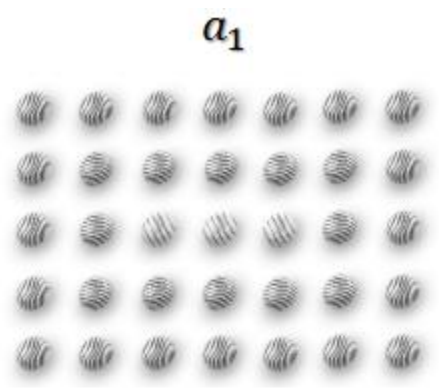
Substituindo a_n:

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)r) = n\frac{a_1 + a_n}{2} \cdots ②$$

Esta última é conhecida como a fórmula da soma dos n termos de uma progressão aritmética. É bom, conquanto, instruir os alunos a usar a fórmula que mais os apetecer. Tanto a expressão ① quanto a ② possuem o mesmo número de passos, já que para encontrar a_n precisamos resolver $(n-1)r$. Enquanto ① vem de um raciocínio intimamente ligado aos números figurados, é capaz de oferecer aos alunos um meio visual de aceder à fórmula. ②, por sua vez, se apresenta de uma maneira mais sucinta, fácil de ser diretamente memorizada. Quanto à questão da eficiência, caso o exercício ofereça a razão, será possível resolvê-lo mais rapidamente por ①. Se em vez disso apresentar o termo final da sequência, ② será mais célere.

Todas as sequências que estudamos até agora podem ser chamadas de progressões aritméticas (PA) – este nome contrasta com progressão geométrica (PG), outro tipo de sequência a ser estudada mais adiante. “Aritmético” se refere à simples razão numérica aditiva.

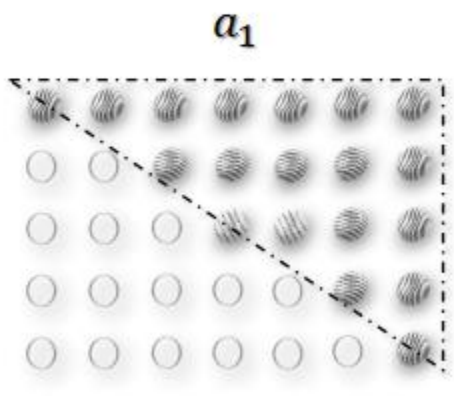
Em última análise, ② não é alheia à compreensão através do diagrama figurado. Tomemos partes da figura 26 como exemplo para sua explicação. Observe que a fórmula toma metade de a_1 vezes n somado com metade de a_n vezes n. Deste modo, a_1 multiplicado por n é entendido como o número linha a_1 repetido n vezes.



Fonte: autor.

Figura 27 – a_1 multiplicado por n.

Seguindo a fórmula, tomaremos metade de $a_1 \cdot n$, resultando no que está compreendido no interior do triângulo pontilhado a seguir.



Fonte: autor.

Figura 28 – Metade de $a_1 \cdot n$.

Em seu turno, $a_n \cdot n$ trás a seguinte constituição figurada:

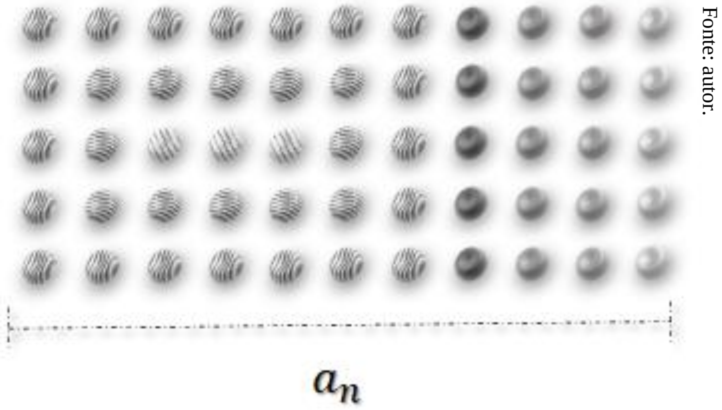


Figura 29 – a_n multiplicado por n.

O passo seguinte é tomar sua metade.

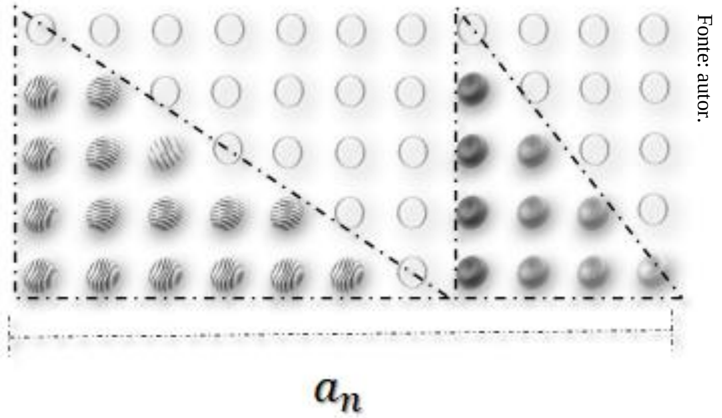
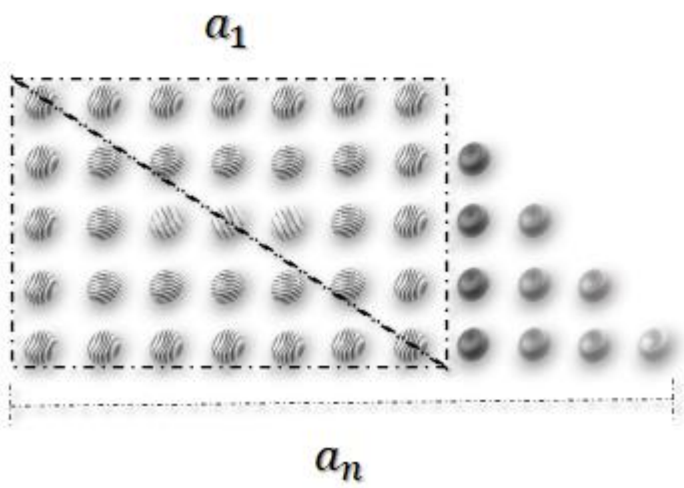


Figura 30 – Metade de $a_n \cdot n$.

Cortamos $a_n \cdot n$ convenientemente separando as bolinhas listradas das em degradê, pois as primeiras estão em mesmo número que as do a_1, e sua metade coincidirá com a de a_1 vezes n. Para concluir, somamos as duas metades, obtendo a figura a seguir.



Fonte: autor.

Figura 31 – Interpretação figurada da fórmula da progressão aritmética.

Ou seja, a metade do a_1 vezes n é a metade do retângulo, e a metade de a_n vezes n a metade do retângulo mais o triângulo (que é metade do número oblongo). Quando juntas, as metades do retângulo formam o retângulo de volta, e o triângulo as acompanha. O todo completa a soma dos termos de a_1 até a_n.

Conforme elucidado, não é necessário inserir a razão na fórmula pois ela vem implícita no termo a_n. Se a_n for muito grande devido a uma razão, ao tirarmos a metade de $a_n \cdot n$ o triângulo resultante será bem "esticado", o que expressa a existência da mesma. Já a metade do retângulo permanecerá igual. Em concordância com a fórmula, a razão é ditada somente pelo a_n.

Com este desenvolvimento em mãos, a investigação contextualizada chega ao fim. Restará aplicar exercícios em outras aulas para que os alunos fixem devidamente o conteúdo e as formas de resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas.

Formas previstas de avaliação: Tratando-se de aulas introdutórias, verifica-se a atenção dos alunos nas partes expositivas e a participação nos trabalhos em grupo.

Referências

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular** – matemática. Brasília, MEC, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 5 de setembro de 2020.

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular Etapa Ensino Médio** – matemática. Brasília, MEC, 2017. Disponível em http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio Acesso em 5 de setembro de 2020.

FENG, L. **Early China**, Cambridge, Cambridge University Press, 2013.

HEATH, T. **A History of Greek Mathemathics**, Oxford, Dover Publications, 1921.

ROQUE, T. **História da Matemática**, Rio de Janeiro, Editora Zahar, 2012.

* Após ser adaptado e aplicado parcialmente em quatro turmas de 9º Ano, este plano foi transformado em um artigo científico. O resultado pode ser visualizado no link da revista:

https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/issue/view/346

Encontra-se sob o nome “TRINCAS PITAGÓRICAS E NÚMEROS FIGURADOS: UM ENFOQUE HISTÓRICO PARA O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS”

[iv] No próprio livro História da Matemática de Roque (2012), a autora menciona brevemente na introdução problemas relacionados com a historiografia. Entre eles, existe a discrepância entre o que realmente aconteceu e o que é contado, pois qualquer relato do passado é inevitavelmente turvado por opiniões da atualidade. Sem dúvida, relatos antigos como os de Proclus ou de pessoas que atribuíam feitos a grandes sábios sofriam do mesmo mal - o interesse do narrador. Não se pode dizer ao certo, por conseguinte, se Tales sequer existiu. Tudo o que se pode ter certeza é que as habilidades garantidas pelo estudo da matemática eram importantes na época, dignas de serem repetidamente mencionadas.