Cadernos de Práticas de Ensino de Matemática

Volume 3 – 2020

Planos de Aulas – anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio

Organização

UFABC

Virgínia Cardia Cardoso
Elisabete Marcon Mello
Vinícius Pazuch
Vivilí Maria Silva Gomes

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CADERNOS DE PRÁTICAS DE ENSINO DE MATEMÁTICA DA UFABC

VOLUME 3

PLANOS DE AULA

ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E ENSINO MÉDIO

Virgínia Cardia Cardoso

Elisabete Marcon de Mello

Vinícius Pazuch

Vivilí Maria Silva Gomes

Santo André

2020

Foto da Capa: *Francisco José Brabo Bezerra (2019)*
Capa: *Vivilí Maria Silva Gomes (2020)*

CATALOGAÇÃO NA FONTE
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

C122 Cadernos de práticas de ensino de matemática da UFABC [recurso eletrônico] – volume 3 : planos de aulas - anos finais do ensino fundamental e ensino médio / Organizado por Virgínia Cardia Cardoso, Elisabete Marcon de Mello, Vinícius Pazuch e Vivilí Maria Silva Gomes. — Santo André, SP : Universidade Federal do ABC, 2020.

160 p. : il.

E-book
ISBN: 978-65-5719-005-0

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Ensino Fundamental. 3. Ensino Médio. 4. Prática de Ensino. 5. Formação de Professores. 6. Educação Matemática. I. Cardoso, Virgínia Cardia, org. II. Mello, Elisabete Marcon de, org. III. Pazuch, Vinícius, org. IV. Gomes, Vivilí Maria Silva, org.

CDD 22 ed. – 510.7

Elaborado por Marciléia Aparecida de Paula – CRB-8/8530

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Dando continuidade à iniciativa da Prof.ª Virgínia Cardoso e do Prof. Vinícius Pazuch, apresentamos o volume 3 do *Cadernos de Práticas de Ensino de Matemática da UFABC*. Este volume, agora ampliado, engaja duas docentes do Curso de Licenciatura em Matemática da UFABC, Prof.ª Vivilí Gomes e Prof.ª Elisabete Mello, e contempla parte da produção dos estudantes das disciplinas de Práticas de Ensino de Matemática (PEM), ministradas ao longo de 2019. Evidenciamos os resultados dos diversos planejamentos de aulas elaborados pelos estudantes, orientados pelos docentes responsáveis nas disciplinas, e manifestados nos planos que elaboraram e redigiram. Esses planos são produções individuais, em duplas ou mais estudantes, sendo alguns produções de grupo ou do coletivo, conforme a proposta da atividade. A apresentação final dos planos segue um modelo criado pelos docentes e fornecido aos estudantes para facilitar a elaboração desta publicação.

As PEM são disciplinas teórico-práticas da matriz curricular do Curso de Licenciatura em Matemática da UFABC, o qual vem passando por reformulações desde a sua criação em 2010, de forma a se adequar aos parâmetros legais e às necessidades prementes da formação de professores para ensinar matemática nas diversas redes de ensino, em especial para atender as demandas do ensino público. Na matriz curricular atual, em vigência desde o ano de 2018, as PEM formam um conjunto de quatro disciplinas, quais sejam, PEM I, II, III e IV que são ministradas ao longo do ano letivo, nos períodos diurno e noturno. As PEM I e II referem-se aos anos finais do Ensino Fundamental e as PEM III e IV ao Ensino Médio. Assim, os planos de ensino que compõem este volume contaram com o acompanhamento em sua elaboração dos docentes dessas disciplinas, aqui seus organizadores. Por serem planos de ensino gerados no contexto específico de cada disciplina, incorporam as especificidades tanto de área de pesquisa do docente ministrante como de área de interesse de seus estudantes.

Quando proposta pela primeira vez a confecção desses *Cadernos*, houve aqueles que questionassem a sua validade e, portanto, a influência no âmbito da sala de aula da escola básica, uma vez que, do ponto de vista dos menos envolvidos nas atuais tendências em pesquisa e ensino na Educação Matemática, poderiam ser interpretados como uma oferta de “receitas prontas para serem degustadas”, caminhando na contramão do que os professores formadores de nossas Instituições de Ensino Superior propõem, as mais afinadas com modos de ver contemporâneos de caráter crítico e transformador do processo educativo. Entretanto, uma coisa não inviabiliza a outra! Ao apresentar uma proposta de plano de ensino já elaborada e publicável de estudantes em formação inicial, estamos reafirmando que “é possível, sim” preparar estudantes com espírito crítico e atentos para o movimento vivo do processo educativo, participante e colaborativo, tal como imaginamos deva ser a sua futura ação em sala de aula como professores. Sem perder o bom senso da necessidade de planejamento e atenção às diversas formas e conteúdos próprios de uma formação técnica e científica, as produções deixam claro na sua forma e conteúdo que o processo de sua elaboração não deixou de lado o caráter transformador do processo educativo reflexivo e crítico nelas presentes e se revela nos diversos caminhos apontados nos resultados aqui apresentados.

Ao “passear” pelas diversas produções contidas neste *Caderno*, podemos constatar a multiplicidade das produções tanto em conteúdos conceituais como em procedimentais e atitudinais explícitos em seus desenvolvimentos e nas propostas de atividades, desde as mais convencionais até as mais inusitadas e surpreendentes. Sem querer adentrar a exemplos para não sermos tendenciosos, convidamos o leitor a apreciar a criatividade de nossos estudantes ao se vislumbrarem e se aventurarem como futuros professores que ensinarão matemática nas escolas do país.

Apesar de mostrarmos o ponto de chegada, parafraseamos nosso educador maior, querido e amado Paulo Freire, ao dizermos “Caminheiro, não há caminho, o caminho se faz ao caminhar”.

Os organizadores

GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL E TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

GEOMETRIA E SUAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

João Victor Ota de Oliveira
Juliana Mieki Kamada

Ano escolar: 6º ano do Ensino Fundamental

Ementa

Pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), temos: construção de retas paralelas e perpendiculares; reconhecer polígonos considerando arestas, vértices e ângulos; reconhecer bissetriz e mediatriz nos polígonos.

Objetivo Geral

Auxiliar o aluno na compreensão de alguns dos conceitos da Geometria e suas construções geométricas, por meio da construção de Origamis.

Objetivos Específicos

- Compreender os conceitos de retas paralelas e concorrentes;
- Compreender o conceito de bissetriz e reconhecer os ângulos formados;
- Compreender os conceitos de ponto médio e mediatriz;
- Compreender os conceitos de aresta e vértice;
- Compreender que para a construção de um Origami é necessário o entendimento de conceitos de Geometria.

Recursos empregados

Quadro branco/lousa para o ensino dos conceitos geométricos e reconhecimento dos conhecimentos prévios dos estudantes. Origami como consolidação e forma de avaliação.

I. Introdução

Neste conjunto de aulas, iremos apresentar alguns conceitos básicos de geometria, e construções geométricas, para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. De início, iremos fazer uma breve apresentação da geometria na vida acadêmica e no cotidiano do estudante. Com isso, começaremos a explicar alguns conceitos teóricos sobre o tema abordado. Por fim, iremos propor uma atividade, utilizando Origamis, para consolidar e avaliar o conhecimento adquirido na aula.

Origami (ori - dobrar e kami - papel) é uma técnica japonesa na arte de dobrar papéis. Sua origem é tão remota quanto a história do papel. É uma técnica diferente pois não são utilizados recortes ou cola, apenas dobras com vincos perfeitos. Os origamistas (pessoas que fazem Origamis) acreditam que o ato de dobrar o papel representa a transformação da vida (o papel utilizado para fazer o Origami um dia fora uma semente que germinou, cresceu e se transformou numa árvore). O “tsuru” tornou-se o símbolo dos Origamis. Trata-se de uma ave japonesa que ficou popular por sua longevidade, associada à prosperidade, saúde e felicidade.

A arte do Origami está presente em projetos de engenharia, como em estudos da NASA para a construção de dispositivos que retirem ou retenham calor de satélites ou painéis solares que dobram como Origamis para facilitar a implantação.

II. Atividades

Este plano de aula foi separado em duas aulas para melhor aprendizagem e fixação dos conceitos por parte dos estudantes.

1ª aula:

a) Apresentação e destaque da importância da Geometria

No primeiro momento da aula, deve-se destacar a importância da Geometria na vida acadêmica e no cotidiano, citando exemplos que facilitem a visualização dos estudantes, como o fato de a geometria estar presente em diversos cursos (engenharias, design, arquitetura, entre outros) e todos os objetos existentes possuírem formas geométricas com um significado.

b) Reconhecimento dos conhecimentos prévios dos estudantes

Através de perguntas e questionamentos verificar os conhecimentos que os estudantes já possuem. Caso algum estudante não possua tais conhecimentos, deve-se explicar e esclarecer as dúvidas.

c) Explicação dos conceitos

Considerando os conhecimentos prévios dos estudantes (por exemplo: significado de reta, ângulo, ponto) e por meio do quadro branco ou lousa, explicar os conceitos geométricos: retas paralelas e concorrentes; bissetriz; ponto médio; mediatriz; aresta e vértice. Posteriormente, esclarecer que muitos conceitos geométricos estão envolvidos na construção de Origamis e apresentar o Origami que será construído na próxima aula.

2ª aula:

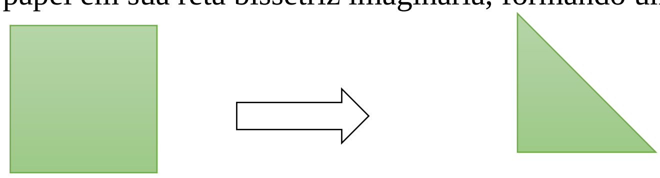
a) Revisão dos Conceitos

No primeiro momento da segunda aula, deve-se fazer uma revisão dos conceitos ensinados na primeira aula para que os estudantes construam o Origami. Este momento deve ser utilizado para sanar todas as dúvidas que os estudantes tiverem.

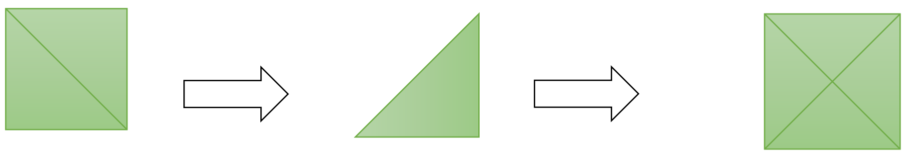
b) Construção do Origami conhecido como "Vai e Volta" ou "Abre e Fecha"

Para a construção do Origami é necessário um papel em formato de quadrado e seguir os seguintes passos:

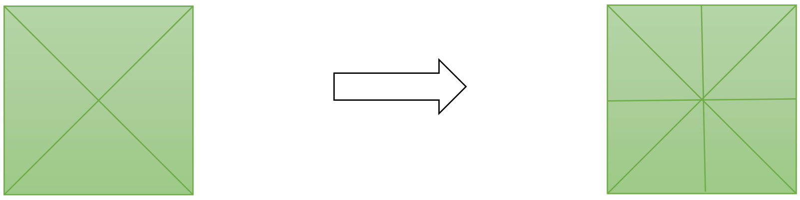
I. Imagine uma reta bissetriz que passa por dois ângulos desse papel quadrado. Dobre o papel em sua reta bissetriz imaginária, formando um triângulo:



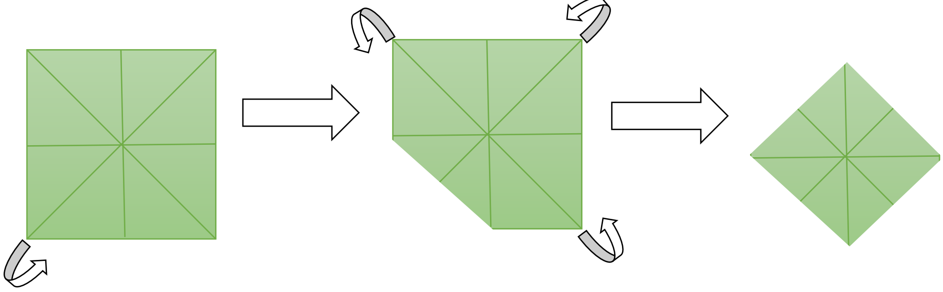
II. Abrir o papel e imagine outra bissetriz, que seja concorrente à anterior, e dobre novamente o papel, obtendo um "X":



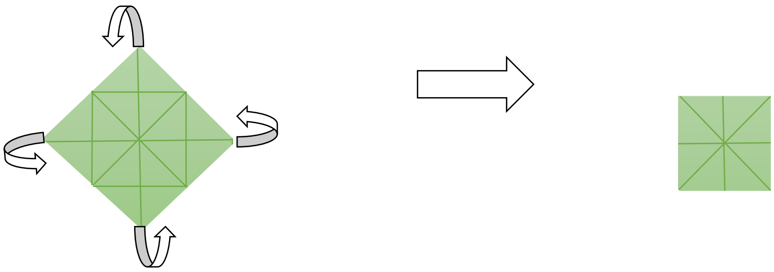
III. Dobrar o papel nos pontos médios de dois lados opostos seguindo sua mediatriz:



IV. Dobrar cada vértice até o centro da figura:



V. Virar o papel para o outro lado e dobrar novamente cada ponta até o centro:



VI. O Origami "Vai e Volta" ou "Abre e Fecha" está pronto:

Fonte: Wikihow (2019)

Após a construção do Origami, propõe-se a seguinte tarefa: os estudantes deverão escrever perguntas em cada uma das 8 partes internas (triângulos) do Origami e no verso de cada parte as respectivas respostas. Serão apresentadas sugestões de perguntas pelos professores, mas os estudantes não precisam necessariamente utilizá-las. O único requisito é que as perguntas devem estar relacionadas com a matéria aprendida nesta aula. Após isso, os estudantes deverão reunir-se em duplas. Um dos integrantes deve escolher um número inteiro positivo que corresponde a quantidade de movimentos de abre e fecha do Origami. Quando os movimentos acabarem, o estudante que fez o Origami deve pedir ao seu colega que escolha uma das quatro perguntas escritas nos triângulos. Após a escolha, o estudante que escolheu a pergunta deve responder. Se sua resposta estiver certa ganha um ponto, caso o estudante erre, não recebe pontuação.

Assim, na dupla, alternam-se aquele que responde e aquele que faz as perguntas. No final, quem possuir mais pontos ganha a brincadeira.

III. Conclusão

Em suma, essa aula tem como propósito facilitar o entendimento de alguns conceitos de Geometria, principalmente aqueles que são utilizados nas construções de Origamis. Além disso, mostrar também que este conteúdo está presente no cotidiano, vida acadêmica e vida profissional do estudante. Por fim, após esta aula, espera-se estimular o gosto e despertar a vontade nos estudantes de aprender Geometria.

Avaliação

Como avaliação, sugere-se a atividade feita após a construção do Origami. Com ela é possível identificar se os estudantes fixaram os conceitos ensinados. Além disso, é um momento de descontração para os estudantes.

Referências

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Ministério da Educação. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 08 abr. 2019.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**. Ministério da Educação. Brasília, DF: MEC, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 04 abr. 2019.

GAWENDA, M.S.; LINDEMBERG, M.S. **A arte do origami como ferramenta de aprendizagem da geometria**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_artigo_marizete_da_silva_gawenda.pdf. Acesso em: 03 abr. 2019.

HAYASAKA, E. Y.; NISHIDA, S. M. **Pequena história sobre Origami**. Disponível em: http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm. Acesso em: 08 abr. 2019.

KEESEY, L. **NASA's New Shape-Shifting Radiator Inspired by Origami**. Disponível em: https://www.nasa.gov/feature/goddard/2017/nasa-s-new-shape-shifting-radiator-inspired-by-origami. Acesso em: 08 abr. 2019.

LANDAU, E. **Solar Power, Origami -Style**. Disponível em: https://www.nasa.gov/jpl/news/origami-style-solar-power-20140814. Acesso em: 08 abr. 2019.

WIKIHOW. **Como fazer um abre e fecha**. Disponível em: https://pt.wikihow.com/Fazer-um-Abre-e-Fecha. Acesso em: 04 abr. 2019.

DECOMPOSIÇÃO, RECOMPOSIÇÃO E COMPLETAMENTO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Claudio Quessada Cabello
Gabriel Machado dos Santos Silva

Ano escolar: 8° Ano do Ensino Fundamental

Ementa

Áreas e Volumes

Objetivos

Fazer com que os alunos compreendam as diversas possibilidades de manipulação de formas geométricas para obtenção de áreas e volumes como for mais conveniente, através de decomposição e reconstrução e transposição de figuras.

Recursos empregados

Material manipulativo: Folha de malha quadriculada (A4) / Material de desenho / Régua / Compasso
Software CAD: Google SketchUp / *GeoGebra*

Atividades

Neste plano de aula, o intuito é apresentar aos alunos as possíveis manipulações de figuras geométricas como facilitador dos cálculos de área e volume. Para tal objetivo, o plano será ministrado utilizando *software* CAD e recursos manipulativos, para que os alunos possam ter a liberdade de desenhar, recortar e construir as figuras e assimilar, na prática, como os movimentos de composições, reconstruções e transposições facilitam os cálculos, servindo como ferramenta de auxílio para o aprendizado.

Serão ministradas três aulas, divididas em aula expositiva com os conceitos geométricos; aula interativa exploratória, com o auxílio do *Software* CAD e aula prática, com materiais manipulativos para melhor associação dos conceitos apresentados.

Descrição de situação 1: <u>Aula Expositiva</u>

Objetivos: Apresentar aos alunos os conceitos de decomposição, recomposição e completamento para calcular área e volume de figuras geométricas de maneira simplificada.

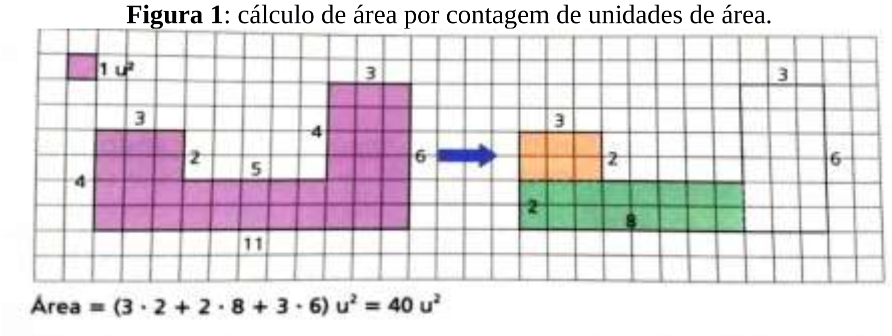
Metodologia: Utilizar figuras geométricas desenhadas sobre uma malha quadriculada e a interagir com os alunos a fim de construir, em conjunto, os conceitos como ferramentas para tais cálculos de área e volume.

Desenvolvimento:

Num primeiro momento será levantada uma discussão com os alunos sobre o que é área e o que é volume. A partir dessa abordagem, espera-se que os alunos comentem sobre metros quadrados e cúbicos e nesse ponto será apresentado o conceito de unidade de área, necessário para aprofundamento na temática. A partir das unidades de áreas é possível trabalhar com uma malha quadriculada e apresentar a contagem de quantas unidades (u^2) uma figura geométrica possui, mesmo que seja necessário fazer uma aproximação, obtendo assim a área aproximada.

Feita essa introdução, pode-se começar a trabalhar com o conceito de decomposição de figuras, mostrando que é possível segmentar a figura geométrica de maneira conveniente para calcular a área através da soma de cada uma das formas, como na figura abaixo.

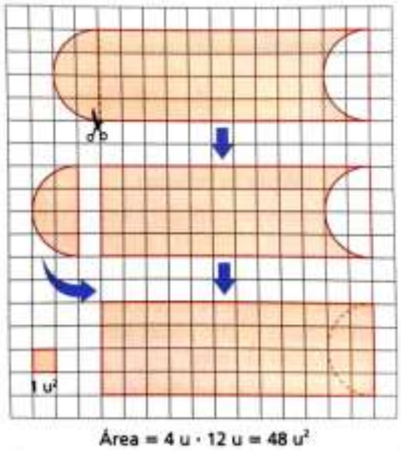
Figura 1: cálculo de área por contagem de unidades de área.



Fonte: própria

Dada a explicação de decomposição, introduz-se a ideia de recomposição, demonstrada abaixo.

Figura 2: cálculo de área por decomposição.

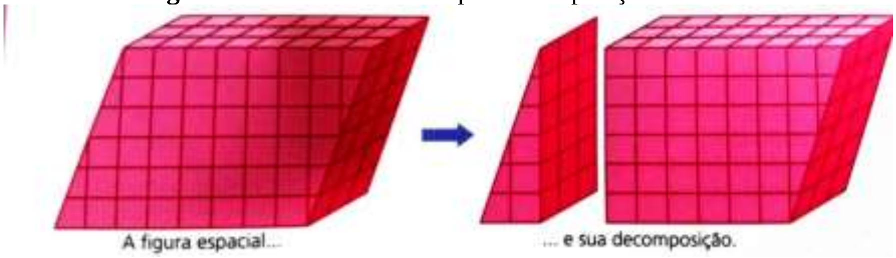


Fonte: própria

Após tais atividades, é interessante apresentar o conceito de completamento para deduzir a equação do cálculo da área do triângulo, levando assim à compreensão de que ao completar um triângulo com outro semelhante, formando um quadrilátero, calculando sua área total e dividindo-a por dois, temos a área individual do triângulo.

Por fim, trata-se sobre unidade cúbica e, usando os mesmos conceitos apresentados para geometria plana, discute-se o cálculo do volume.

Figura 3: cálculo de volume por decomposição.



Fonte: própria

Descrição de situação 2: Aula Interativa Exploratória

Objetivos: Com auxílio do *software* de desenho dar continuidade, em conjunto com os alunos, à construção do conhecimento sobre Decomposição, Recomposição e Completamento. Utilizar os palpites apontados pelos alunos para conseguir calcular da maneira mais simples possível a área das figuras apresentadas.

Metodologia: Projetar o *software* de desenho e apresentar aos alunos as figuras sobre as quais deseja-se saber a área. A partir dos palpites apontados pelos alunos recortar livremente as figuras no software e reconstruí-las, sempre visando formar figuras que já se conheça o método de cálculo.

Desenvolvimento:

Para a execução desta aula interativa exploratória, serão propostas figuras que mostrem gradativamente os processos de composição, recomposição e completamento. Primeiramente serão apresentados em triângulos e quadrados e, em seguida, polígonos regulares, círculos, semicírculos e arcos de circunferência, para que, por fim, os processos sejam feitos através de figuras mais complexas. Essas figuras devem ser feitas em *software* CAD como Google SketchUp, que permitem a manipulação (corte e cópia de figuras) facilitada.

As figuras serão exibidas no projetor da sala de aula e será aberto um debate rápido, com os alunos, para definir qual será a melhor estratégia para decompor, completar e transpor de maneira a deixar os cálculos simples. Conforme as soluções ocorrem, novas figuras serão apresentadas e o debate será repetido, para que dessa forma, os alunos consigam formar a imaginação visual de figuras e possam absorver as ferramentas apresentadas.

Descrição de situação 3: Aula Prática

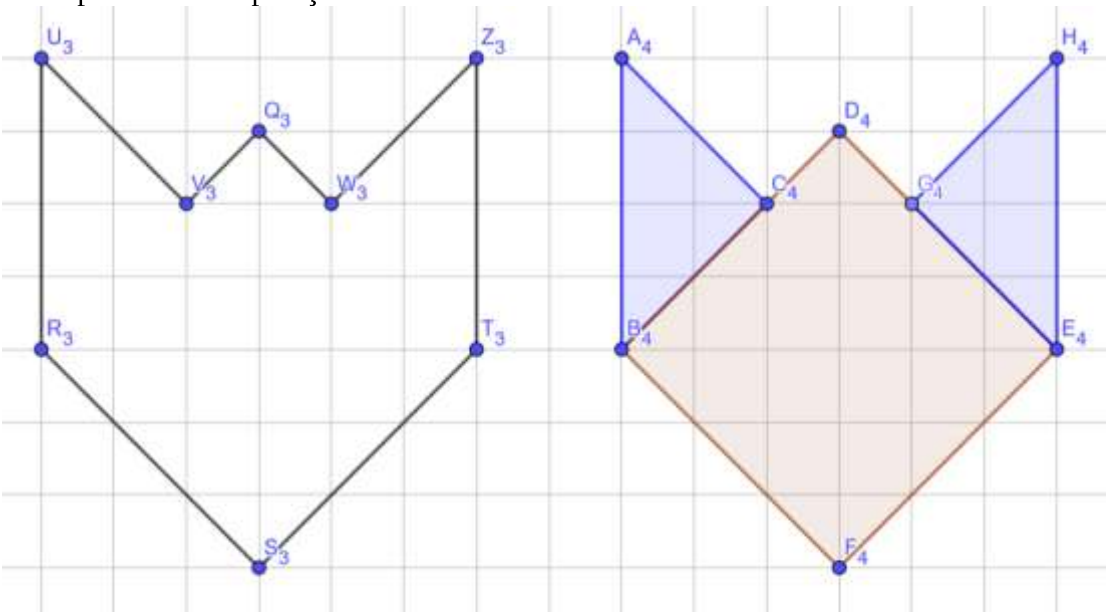
Objetivos: Permitir que os alunos tenham autonomia na decisão de como serão feitas as decomposições, recomposições e completamento e possam manipular o material da maneira como preferirem, tendo a liberdade de recortar a folha quadriculada para que construam o consolidem o conhecimento através da prática.

Metodologia: Entregar figuras geométricas diversas impressas em papel quadriculado e propor que os alunos, em grupos, se organizem para manipular as figuras a fim de calcular as áreas.

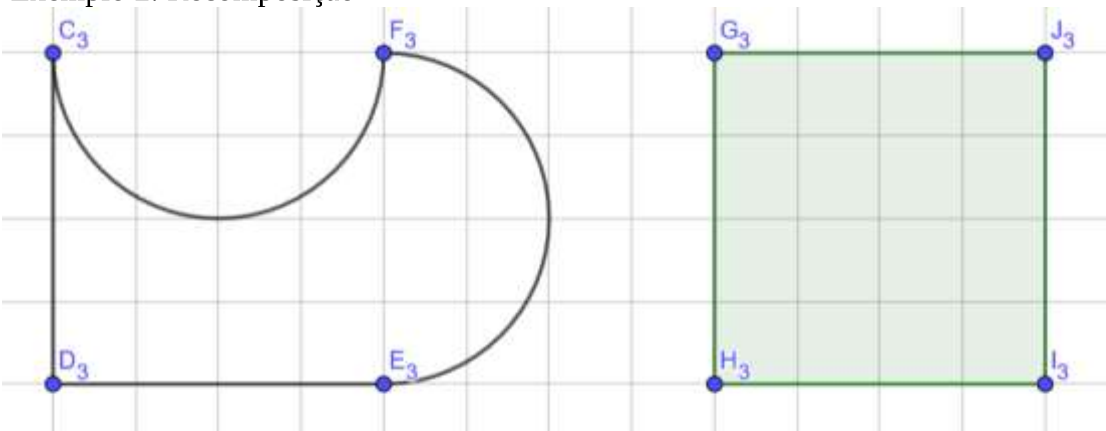
Desenvolvimento:

Será entregue uma folha de questões similares a esta proposta, onde os alunos devem copiar as figuras para uma malha quadriculada para a resolução das questões, seguindo os exemplos no papel e o conteúdo das aulas anteriores. A resolução deve ser então comentada em sala após o término das atividades, quando estas já tiverem sido entregues, já que serão também material avaliativo.

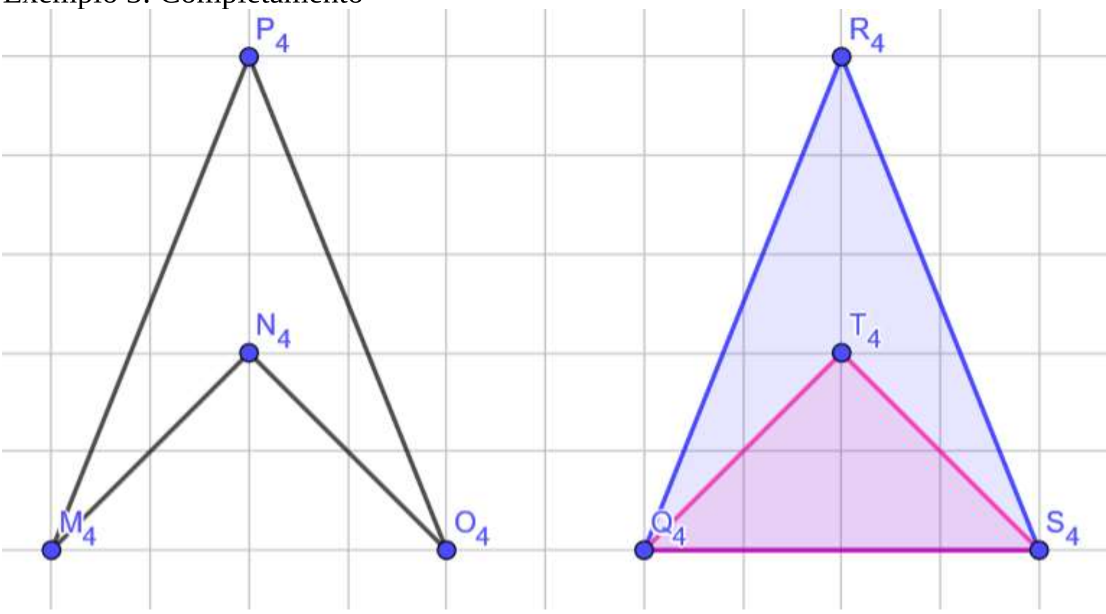
Exemplo 1: Decomposição



Exemplo 2: Recomposição

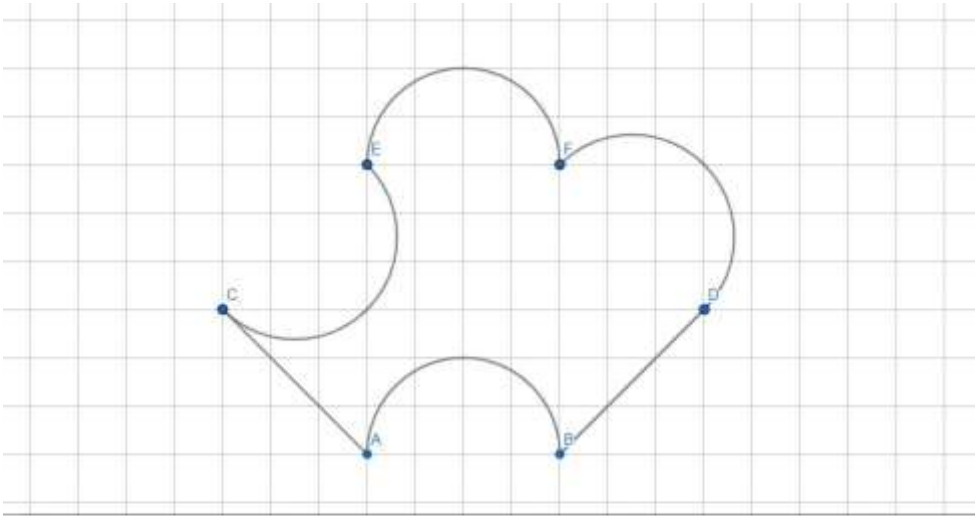


Exemplo 3: Completamento

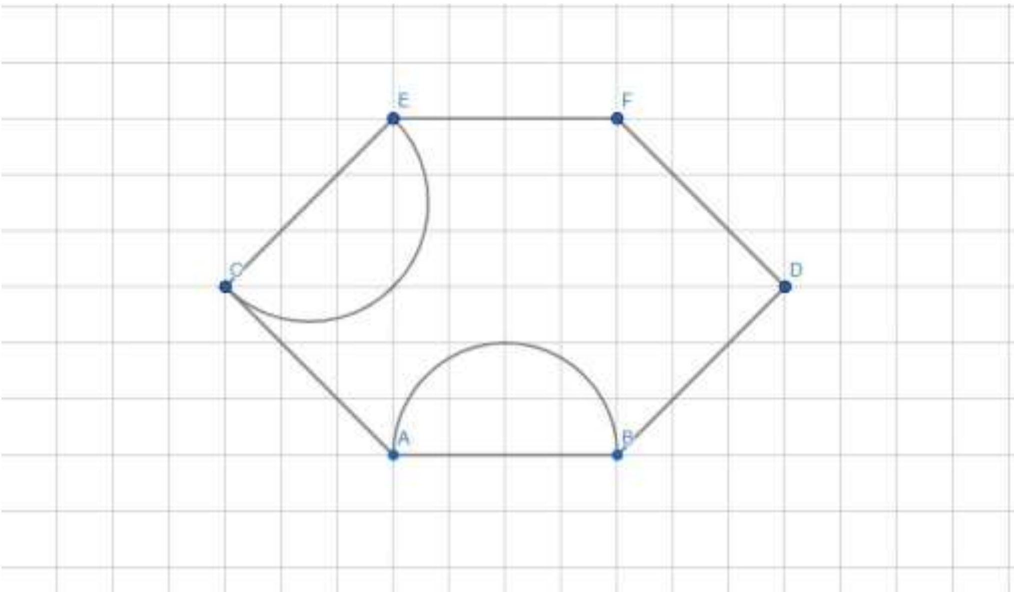


Exercício 1 - Organizar as figuras de uma forma simples para poder contar triângulos e calcular a área através da fórmula b.h / 2

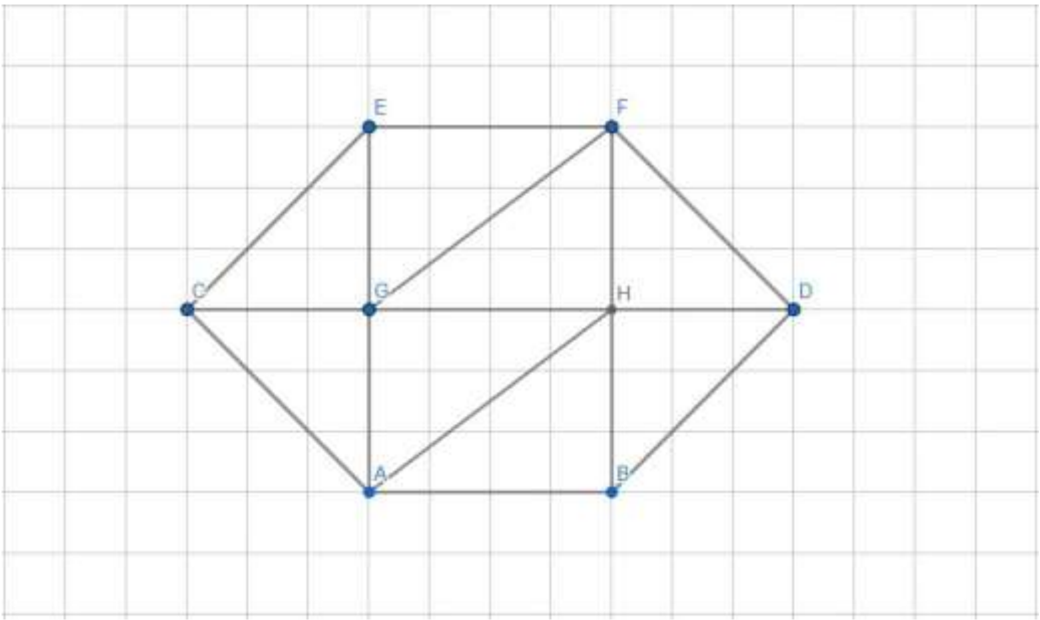
a)



Exercício 1- Primeira figura

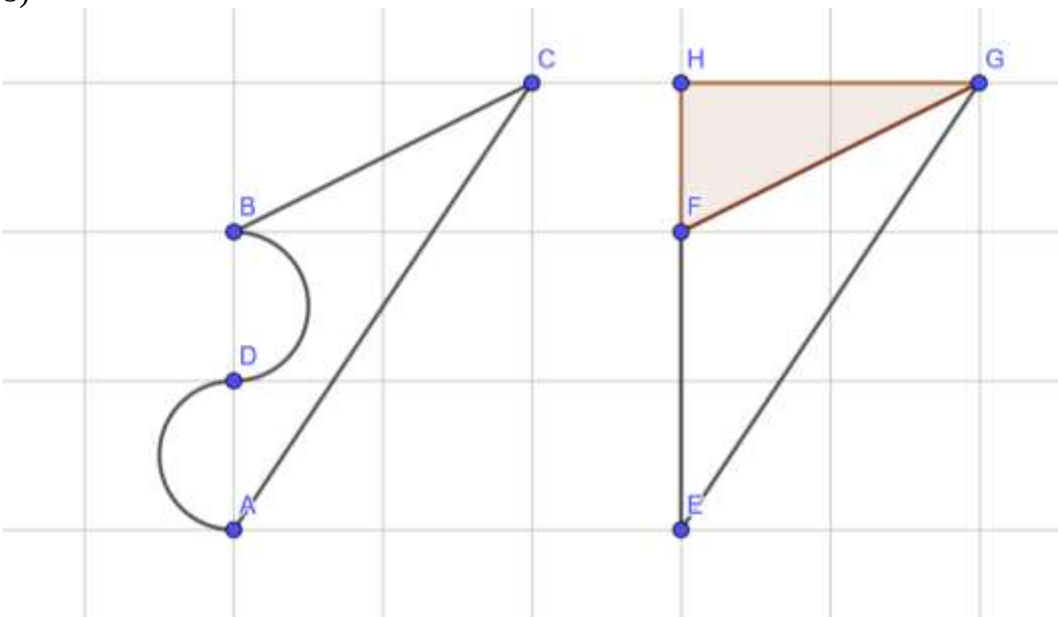


Primeira Parte da solução esperada



Parte final, contagem de triângulos e cálculo de área

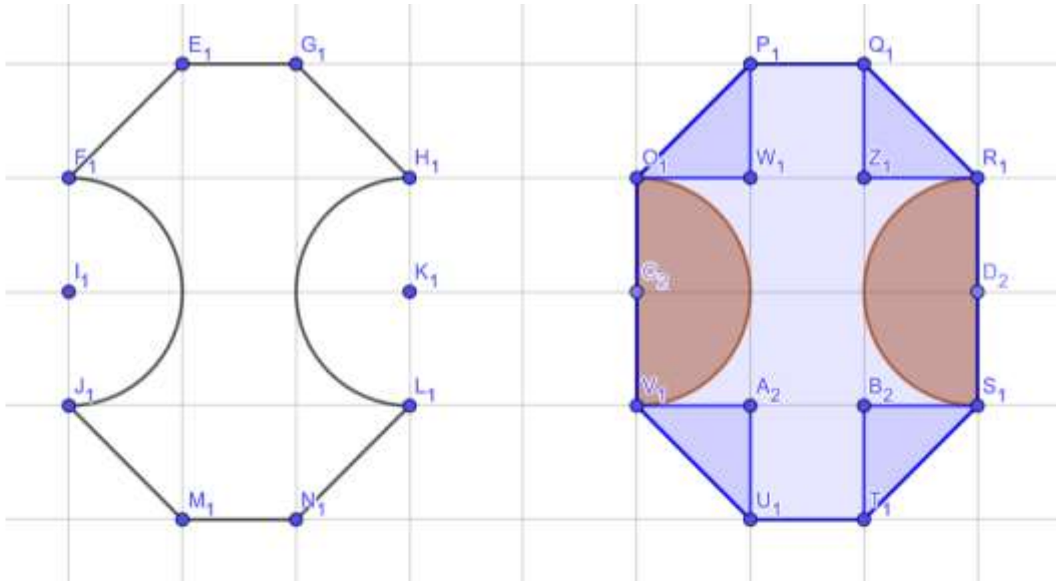
b)



Segunda figura do exercício 1, e à direita, sua possível solução, subtraindo um triângulo de outro.

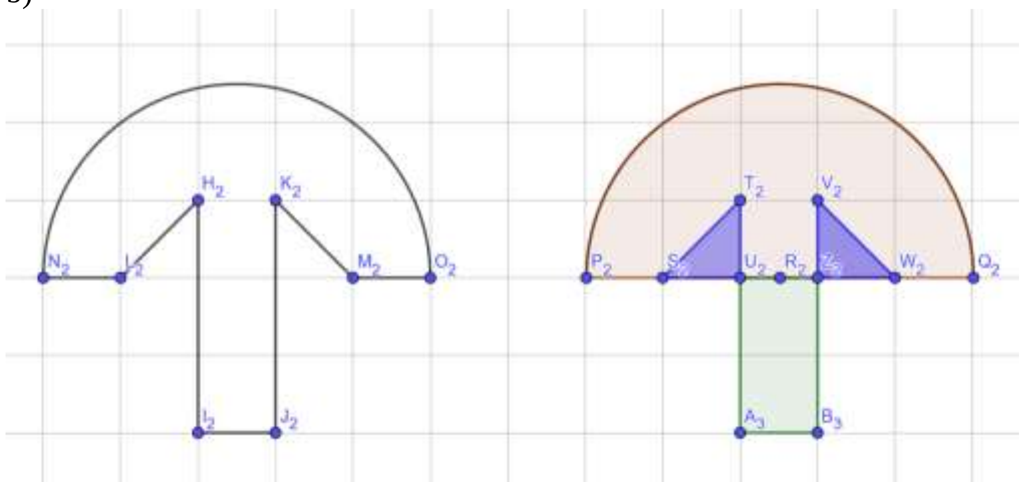
Exercício 2 - Calcule a área da figura utilizando as fórmulas para as figuras geométricas conhecidas, descrevendo as figuras utilizadas nos processos de decomposição, recomposição e completamento.

a)



Primeira figura do exercício 2 e, à sua direita, sua possível solução, dividindo em 8 quadrados e 4 triângulos, subtraídos de 2 semicírculos.

b)



Segunda figura do exercício 2, e à sua direita, sua possível solução, dividindo em um semicírculo e um retângulo, subtraído de dois triângulos.

Desafio: Tente calcular a área da figura abaixo da mesma forma que nos exercícios anteriores:

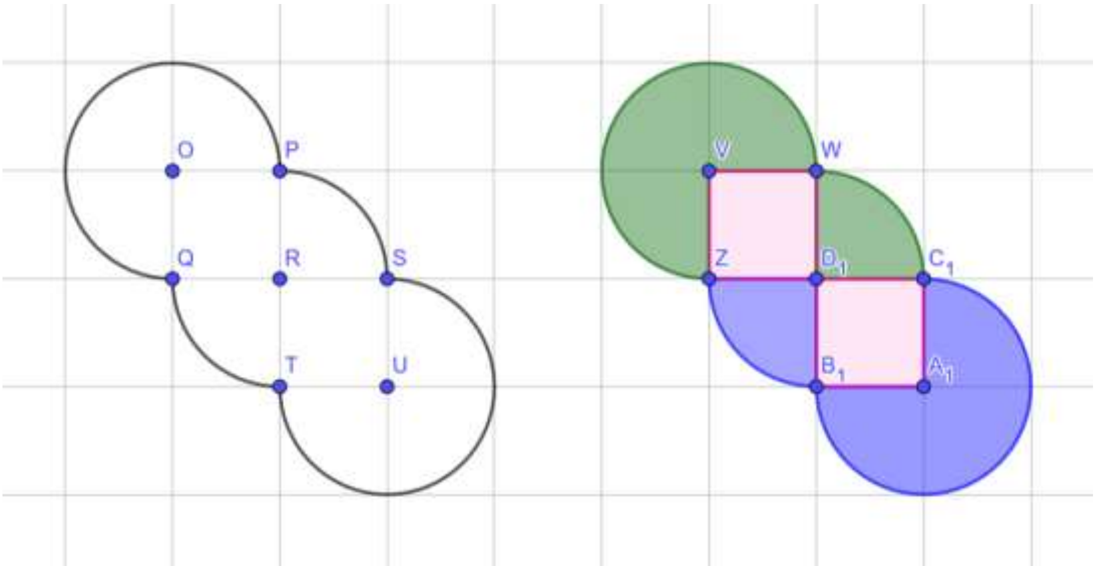


Figura do desafio e, à direita, sua possível solução, dividindo em dois círculos e dois quadrados.

Avaliação

A avaliação se dará a partir dos resultados entregues no final da aula 3 pelos grupos.

Referências

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. Capítulo 10 - Áreas e Volumes. *In*: **Matemática:** Imenes & Lellis**.** São Paulo: Moderna LTDA, 2010.

REGRA DE TRÊS: RAZÃO E PROPORÇÃO

Victória Raíssa Arantes
Giovanni Gonçalles Melcore
Lucas Passarelli
Giovanni Castro Cergol
Yasmin Gama

Ano escolar: 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.

Ementa

Regra de Três. Razão e Proporção. Resolução de Problemas e Modelagem Matemática.

Objetivos

- Compreender o raciocínio lógico envolvido na Regra de Três.
- Relacionar esse raciocínio à situações contextualizadas.
- Usar esse raciocínio no cotidiano.

Recursos empregados

- Lousa e giz;
- Fita métrica;
- Folhas de papel sulfite para o registro das atividades.

Atividades

Esta é uma de três aulas destinadas à um grupo de alunos participantes de um subprojeto do PIBID/UFABC. Esse conjunto de aulas é denominado aqui de *curso*. Em momento anterior, foi feita uma *avaliação diagnóstica* no contexto do subprojeto com o objetivo de avaliar o conhecimento dos alunos em relação às expectativas de aprendizagem para o ano e nível de ensino em que se encontram. Assim, o planejamento dessas três aulas leva em conta o desempenho desses alunos nessa *avaliação diagnóstica*. Esta aula foi dividida em 3 partes. A abordagem aproxima-se às atividades investigativas e à modelagem matemática (BARBOSA, 2009; TEIXEIRA; SANTOS, 2017).

Parte 1- Dinâmica de apresentação
a) Boas vindas e apresentação dos participantes;
b) Alinhamento de expectativas do curso: os alunos se apresentarão e dirão quais são suas expectativas para o desenrolar do curso.
c) Conversa sobre o desempenho na avaliação diagnóstica, o que percebemos ao corrigi-la, nossas expectativas e como o curso irá funcionar.

Parte 2 – Atividades em grupos

Quadro 1 – Questão da avaliação diagnóstica

Se a construção de 12 metros de uma estrutura metálica pode ser feita por 8 pessoas, que trabalham no mesmo ritmo, quantas pessoas são necessárias para construir 27 metros da mesma estrutura?

A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 17

Fonte: arquivo próprio

a) Os alunos distribuídos em grupos, tentam resolver a questão do Quadro 1 da forma que acharem conveniente.
b) Os alunos relatam a forma como resolveram e se conseguiram chegar a algum resultado.
c) É feita uma breve explicação sobre grandezas proporcionais e o raciocínio lógico envolvido na Regra de Três, por meio de Razão e Proporção. Usando como exemplo a questão do Quadro 1, fala-se sobre o que é razão (que significa divisão) e proporção (que é a relação entre duas ou mais razões). Que duas, ou mais, razões que têm a mesma constante de proporcionalidade são equivalentes, ou seja, que determinam o mesmo valor.
d) Em seguida, exemplifica-se, por meio de dados coletados na sala de aula com os estudantes, usando medidas de partes de seus corpos. As medidas são feitas com fita métrica, uma para cada grupo de alunos. Solicita-se que realizem três medições seguindo as três perguntas abaixo:

- Qual a razão entre a sua altura e a medida do seu umbigo até o chão?
- Qual a razão entre a medida do seu ombro à ponta de um dedo de sua mão e a medida do seu cotovelo à ponta do mesmo dedo?
- Qual a razão entre a medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho ao chão?

Por meio dessa atividade pretende-se que os alunos cheguem a um valor próximo à razão áurea (1,618...). Depois que todos apresentarem seus resultados, apresentar uma parte do vídeo “Donald no País da Matemágica” (DONALD, 2017), o qual explica como a razão áurea está presente no cotidiano. Depois apresentar alguns exemplos de marketing de empresas que utilizam essa razão nas suas propagandas. Apresentar também o vídeo “A Natureza em números” (VILA, 2010) que mostra como os números estão presentes na natureza, principalmente nos fractais.

Parte 3 – Atividades em grupos

a) Aos alunos em grupos, solicita-se que criem, nos mesmos grupos de antes, uma questão sobre o tema trabalhado e a resolvam;
b) Cada grupo compartilha com o coletivo a sua proposta de abordagem para a questão elaborada;
c) Os grupos e alunos individualmente discutem as diversas propostas de soluções na linha das atividades matemáticas investigativas (TEIXEIRA; SANTOS, 2017)
Observação: todas as atividades realizadas devem ser registradas pelos grupos.

Avaliação

A avaliação é feita a partir da compreensão das questões abordadas e da participação na aula bem como os registros produzidos, a fim de decidir quais serão as abordagens nas próximas aulas, não tendo como objetivo a atribuição de conceitos.

Referências

BARBOSA, J.C. Integrando Modelagem Matemática nas Práticas Pedagógicas. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, v. 14, n. 26, p. 17-25, março de 2009. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/5/5. Acesso em: 17 abr. 2017.

DONALD no País da Matemágica e o número de ouro. 2017. Disponível em: https://youtube/5pyqszJ6hSk. Acesso em: 17 abr. 2017.

TEIXEIRA, B.R.; SANTOS, E.R. Resolução de Problemas e Investigações Matemáticas: Algumas Considerações. **Educação Matemática em Revista**. Brasília, v. 22, n. 53, p. 7-16, jan./mar. 2017. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/549/pdf. Acesso em: 17 abr. 2017.

VILA, Cristóban. **Nature in numbers.** 2010. (3min43s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA. Acesso em: 17 abr. 2017.

PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS

Giovanni Gonçalles Melcore
Victória Raíssa Arantes
Lucas Passarell,
Giovanni Castro Cergol
Yasmin Gama

Ano escolar: 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio

Ementa

Área de triângulos. Soma dos ângulos internos de triângulos. Propriedades dos ângulos alternos de um triângulo. Soma dos ângulos internos de polígonos.

Objetivos

- Revisar algumas propriedades de triângulos
- Estabelecer a relação entre os ângulos de um polígono e de um triângulo;

Recursos empregados

- Lápis, borracha e papel
- Computadores com o *software Geogebra*.

Atividades

A avaliação diagnóstica para o grupo de alunos ao qual este planejamento se destina, revelou que conteúdos trabalhados em sala de aula com a docente da turma, necessitariam ser revistos para que expectativas de aprendizagem fossem atingidas. Assim, as atividades que seguem, abordam os referidos conteúdos por meio de um recurso computacional estudado em sala de aula de Práticas de Ensino de Matemática (PEM). A proposta seguiu a linha das atividades investigativas estudadas nas aulas dessa disciplina.

Preparação da Atividade

A aula deve ocorrer em uma sala com computadores com o *software GeoGebra* instalado. As atividades podem ser desenvolvidas em duplas de alunos. Assim se procede: Ligar os computadores a serem utilizados na aula; acessar o *software GeoGebra* no modo geometria; usar a ferramenta “Fixar na Malha”.

Atividade 1 - Conservação da área de um triângulo

Os itens (a) a (f) dizem respeito a construção necessária para que a discussão feita no item (g) possa ser realizada.

a) Usando a ferramenta “ponto” do *GeoGebra*, marque no plano dois pontos, A e B, em um mesmo alinhamento horizontal.

b) Marque um ponto C, fora do segmento AB.

c) Construa um triângulo ABC, utilizando o recurso polígono  do *GeoGebra*, e clicando sobre cada ponto.

d) Utilizando os recursos do *Geogebra* (clicar com o botão direito do mouse no botão "ângulo", selecionar a ferramenta "área" e, após, clicar sobre o triângulo) determine a área do triângulo.
e) Utilizando os recursos do *Geogebra,* determine a reta paralela ao segmento AB passando por C (clicar com o botão direito do mouse no botão "reta perpendicular", selecionar a ferramenta "reta paralela", clicar sobre a reta AB e mover até o ponto C).
f) Selecione o ponto C e desloque para direita e para esquerda.
g) Responda:

- O que pode ser dito em relação à área do triângulo?
- Explique porque isso ocorre, baseando-se na fórmula de área de triângulo.
- Calcule a área à mão e compare com o resultado obtido com o GeoGebra.

Atividade 2 - Soma dos ângulos internos de um triângulo
a) Marque no plano, três pontos quaisquer, A, B e C, e em seguida construa um triângulo ABC utilizando o recurso polígono  do *GeoGebra*.
b) Utilizando o recurso reta paralela  do *GeoGebra*, determine a reta paralela ao segmento AB passando por C.
c) Construa com o recurso semirreta  do *GeoGebra*, a semirreta com origem em A, passando por C.
d) Utilizando o recurso ângulo  do *GeoGebra*, meça o ângulo interno A do triângulo ABC e o ângulo formado pela reta paralela e a semirreta, nessa ordem.

- O que pode ser dito em relação à medida desses ângulos?
- Que nome é dado a esses ângulos?

e) Mova um dos vértices do triângulo ABC.

- O que pode ser observado em relação aos ângulos?
- Registre todas as suas observações.

f) Construa a semirreta com origem em B, passando por C.

g) Utilizando os recursos do *GeoGebra* meça o ângulo interno C do triângulo ABC e o ângulo formado pelas duas semirretas.

- O que pode ser dito em relação à medida desses ângulos?
- Que nome é dado a esses ângulos?

h) Mova um dos vértices do triângulo ABC.

- O que se pode dizer em relação aos ângulos?
- Registre todas as suas observações.

i) Responda:

- O que pode ser concluído em relação à soma dos ângulos internos de um triângulo, com base nas respostas anteriores?
- O que se pode dizer em relação ao ângulo oposto ao vértice C?

Atividade 3 - Ângulos internos de um polígono regular

a) Crie polígonos regulares de 4, 5 e 6 lados.

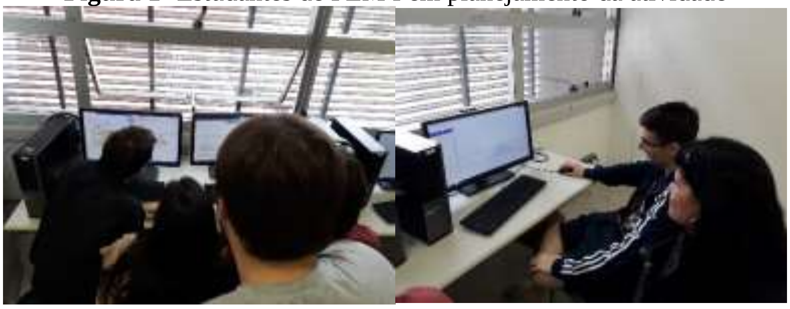
b) Utilizando o recurso ângulo  do *GeoGebra*, meça os ângulos internos desses polígonos.

c) Some os ângulos internos de cada polígono.

d) Responda:

- Qual a relação entre a soma dos ângulos dos polígonos e a soma dos ângulos de um triângulo?
- Você consegue chegar a uma fórmula geral?

Figura 1- Estudantes de PEM I em planejamento da atividade



Fonte: acervo da docente Vivilí Maria Silva Gomes

Avaliação

Participação dos alunos no desenvolvimento da atividade e das discussões com a sala no decorrer dessas atividades. A análise das respostas registradas em folha de papel, ou seja, dos protocolos produzidos pelos alunos, compõem o processo avaliativo.

Referências

PEREIRA, A.B.; MIRANDA, D. F. Explorando Elementos dos Triângulos em um Ambiente Informático de Ensino. **Caderno de Atividades** (Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Belo Horizonte: PUC/Minas Gerais, 2014.

PONTE, J. P. BROCADO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de aula.** 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

TRIGONOMETRIA

Celso Vieira Junior
Maycon Oliveira de Almeida
Raquel Moura dos Santos
Gustavo Vilela A. Duarte

Ano escolar: 1º ano do Ensino Médio

Ementa

Semelhança de Triângulos, Razões e Proporções, Relações Trigonométricas, Sistema de Medida utilizando a História da Matemática como recurso metodológico.

Objetivos

Essa aula tem como o objetivo geral apresentar aos alunos conceitos trigonométricos em um contexto histórico, e aplicar esses conceitos adquiridos em questões escolares.

Como objetivo específico, temos o desenvolvimento de interpretação e aplicação da trigonometria, partindo de semelhanças de triângulos, razões e proporções, além do uso da corda como ferramenta de medida no desenvolvimento histórico da trigonometria.

Recursos empregados

Os recursos utilizados para essa aula serão projetor para apresentação, com *slides* que resumem o assunto tratado em sala juntamente com explicações do professores acerca do conteúdo tratado. Teremos também o uso do espaço em sala para a criação de grupos e resolução de atividades em sulfite.

Atividades

1. Introdução

Segundo Mendes (2009), um dos obstáculos para o sucesso dos processos de ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula é o desinteresse do aluno pela matemática, com aulas expositivas e até, por vezes, cansativas. Mendes (2009) defende que uma das melhores maneiras de se aprender matemática é através de um ensino mais prático e dinâmico por parte do professor e dos estudantes, experimentando e buscando novos caminhos que valorizem a experiência.

Nesse sentido, a História da Matemática pode ser uma excelente aliada para ensino mais prático. Levando-a para dentro da sala de aula os alunos podem entender como os matemáticos antigos pensavam e quais ferramentas matemáticas eram utilizadas. Deste modo os alunos conseguem construir seu próprio conhecimento, se tornando mais participativos, enxergando a Matemática com outros olhos na busca de uma compreensão mais eficaz em sala de aula.

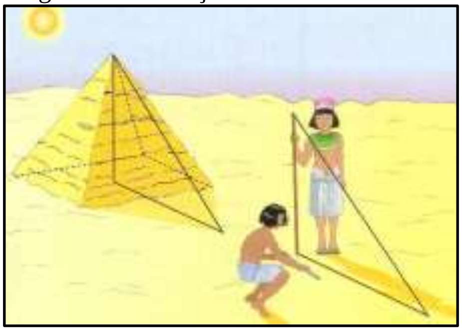
2. Atividades desenvolvidas

A aula iniciará dividindo-se a classe em grupos de até quatro pessoas para resolução de problemas desafiadores, relacionados à Trigonometria. Os alunos terão um tempo para entenderem os problemas, criarem suas conjecturas e discutirem as mesmas. Após esse tempo, a aula irá prosseguir com um breve histórico da evolução da Trigonometria.

Texto Base da Apresentação

Segundo Naracato et. al. (2014), “A trigonometria, provavelmente, surgiu a partir da semelhança de triângulos retângulos devido à necessidade de se medir distâncias inacessíveis”. Através da determinação da razão de semelhança entre triângulos retângulos, os gregos efetivaram concretamente a medição da altura dos objetos a partir de sua sombra. Tal experiência tem sua prática narrada historicamente através de um dos feitos atribuídos a **Tales de Mileto**. Aproximadamente por volta de 600 a.C. ele se encontrava no Egito e foi abordado pelos escribas egípcios (estudiosos da época), para que, em nome do Faraó, calculasse a altura de uma pirâmide de base quadrangular.

Figura 1 - Ilustração da história de Tales



Fonte: http://matematicaferafacitec.blogspot.com/2011/08/tales-de-mileto-piramide-e-o-teorema.html

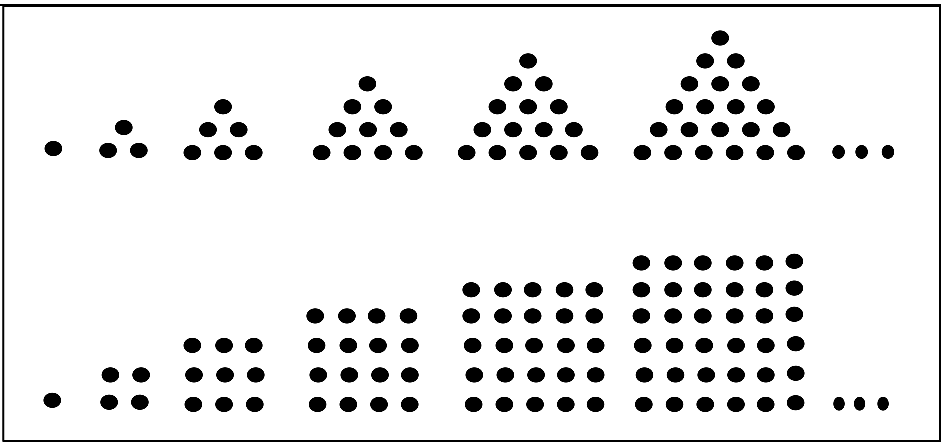
Neste momento o professor, irá mostrar o desenvolvimento do cálculo da altura feito por Tales de Mileto.

Continuação da História da Trigonometria

Pitágoras nasceu por volta de 580 a.C, na ilha de Samos, no mar Egeu, e passou parte da vida no sul da Itália. Ele e seu alunos fizeram muitas descobertas em Matemática, Filosofia e Astronomia. Sabiam que a Terra é redonda e se move ao redor do Sol. O nome Matemática, que significa **tudo que se aprende**, foi criado por Pitágoras e seu discípulos. Os pitagóricos contribuíram bastante com a matemática. Eles descobriram, por exemplo, algumas propriedades interessantes sobre os números.

- números perfeitos: um número é perfeito quando a soma de seus divisores, com exceção dele mesmo, é o próprio número. Por exemplo:
  divisores de 6: 1, 2, 3, e 6 → 1+ 2 + 3 = 6
  divisores de 28: 1, 2, 4, 7, 14 e 28 → 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28
  Então, 6 e 28 são números perfeitos.
- Descobriram outra propriedade curiosa nos números: os números triangulares (1, 3, 6, 10, 15, etc) e números quadrados (1, 4, 9, 16, 25).

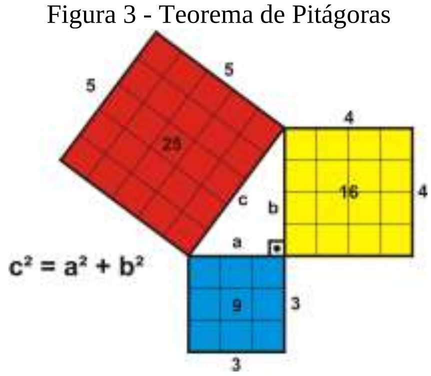
Figura 2 - Números Triangulares e Quadrados



- Mas o que de fato deu fama aos pitagóricos foi a demonstração de um teorema, provavelmente o mais famoso da História da Matemática:

Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa (c) é igual à soma dos quadrados dos catetos (a e b).

Figura 3 - Teorema de Pitágoras



Fonte: https://www.estudokids.com.br/teorema-de-pitagoras/

Após a explicação do cálculo feito por Pitágoras pode-se, então, pausar a apresentação da história da trigonometria para se discutir os problemas desafiadores entregues para os grupos no começo da aula. Neste momento o objetivo é analisar, junto com a classe, como cada grupo pensou para resolver os problemas, questionando: este método resolve o problema dado?; é a melhor forma de resolver este problema? ; etc.

Assim o professor, com base no Teorema de Tales, apresentado anteriormente, pode apresentar uma das formas mais fáceis de resolver cada problema e tirar as dúvidas levantadas pelos alunos, durante a resolução dos problemas.

Continuação da História da Trigonometria

Hiparco de Nicéia, nascido no séc. II a.C onde hoje é a Turquia, foi responsável pelas medições astronômicas mais precisas da Antiguidade, projetou e construiu diversos instrumentos astronômicos e é considerado o "pai (antigo) da trigonometria". As contribuições de Hiparco para a Astronomia são inúmeras, fortemente influenciado pela matemática Babilônica, também acreditava que a melhor base para realizar contagens era a base 60, foi por essa razão que, ao dividir a circunferência, Hiparco escolher um múltiplo de 60. Cada uma das 360 partes iguais em que a circunferência foi dividida e recebeu o nome de arco de 1 grau. Hiparco também foi responsável por construir a primeira tabela trigonométrica, com valores de cordas compreendidas de ângulos de 0° a 180°, que relacionava comprimentos de cordas aos arcos subentendidos a essas mesmas cordas, observando que em um círculo a razão do arco para cada corda diminuía conforme a medida do arco também diminuía.

Sendo obcecado em obter uma descrição geométrica para o Universo, se especializou na construção de instrumentos astronômicos, dentre eles o astrolábio, com o objetivo de registrar a posição e os movimentos dos astros. Com base em suas 18 observações, Hiparco preparou um grande catálogo astronômico, com a posição de quase mil estrelas, servindo de base para o *Almagesto* de Ptolomeu, séculos mais tarde.

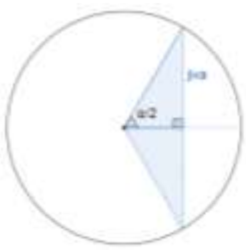
Sobre **Ptolomeu**, pouco se sabe. Possivelmente viveu em Alexandria, entre os séc. I e II da era cristã, é considerado o maior astrônomo da antiguidade. Contribuiu em outros campos além da Matemática e Astronomia, como Astrologia, Geografia, Cartografia, Óptica e Teoria Musical. Escreveu *Almagesto*, considerada a maior obra de Matemática e Astronomia da Antiguidade, onde sistematizou uma série de conhecimentos, sendo que a maior parte é baseado no trabalho de Hiparco, cujo os livros se perderam.

Esta obra é dividida em treze livros contendo conteúdos sobre: sistema solar, tábua de cordas, movimentos do Sol, da Lua, eclipses, estrelas fixas catalogadas por Hiparco, explicação detalhada da construção do Astrolábio, dentre outros (COSTA, 2008). O *Almajesto* sobreviveu por meio das traduções feitas pelos árabes e, por isso, temos suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos usados nas construções, o que é muito importante para nós, visto que muito se perdeu daquela época.

Apesar do *Almajesto* ser bem conhecido, no final do século IV da era cristã surgiu na Índia um conjunto de textos matemáticos denominado *Siddhanta*, cujo significado é Sistemas de Astronomia. Os matemáticos hindus apresentavam uma Trigonometria baseada na relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central. Decidiram trabalhar com a meia corda, porque buscavam, no interior do círculo, um triângulo retângulo, um conhecimento já adquirido anteriormente.

Os autores de *Siddhanta* construíram uma tabela trigonométrica calculando os valores da meia corda (Jiva) para os valores da metade dos ângulos centrais correspondentes, em intervalos iguais de 3,75° até 90°.

Figura 4 – Meia Corda (Jiva)



Entre os anos 850 e 929, o matemático árabe A**l-Battani** introduziu uma preciosa inovação na Trigonometria hindu: o círculo de raio unitário. Então nas tabelas produzidas a partir de Al-Battani, o valor da corda correspondente a $\frac{\alpha}{2}$ pode ser interpretado como a seguinte razão:

$$\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \text{jiva}$$

No começo do século XII a Matemática árabe começou a ser difundida para o resto do mundo, surgiram então diversos tradutores, entre eles, destacava-se o inglês Robert de Chester. Os árabes já tinham traduzidos textos de trigonometria sânscritos, por essa razão a palavra *jiva* (meia corda), foi traduzida como *jiba*. Na língua árabe costuma-se escrever apenas as consoantes, deixando para o leitor completar mentalmente as vogais, então a palavra *jiba* foi registrada pelos árabes como **jb**. Na tradução do árabe para o latim, Robert de Chester interpretou jb como sendo consoantes da palavra *jaib* que, em latim significa baía ou enseada e resolver mudar a palavra para *sinus* (sino, em latim), que tem a mesma forma de uma enseada. A partir daí, a razão entre cateto oposto e a hipotenusa de um triângulo retângulo passou ser chamada de *sinus* (em português, **seno**).

Avaliação

A avaliação será realizada com base no desenvolvimento dos alunos na tarefa aplicada. Inicialmente a tarefa tem finalidade apenas de estimular e instigar o aluno a buscar a melhor solução do problema proposto, no entanto após as demonstrações em aula e o embasamento teórico, o aluno poderá ser avaliado por completo, através de outros problemas que tenham como base as mesmas teorias desenvolvidas em sala.

Referências

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática,** Volume 6 - Dando corda na trigonometria. São Paulo: Editora Ática, 2011.

LOPES, M. M. **Construção e Aplicação de uma Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra.** Dissertação (Mestrado). 2010. 138 f. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2010. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/16068. Acesso em: 20 mai. 2014.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o Ensino da Trigonometria. In: BRITO, A. J.; MIGUEL, A.; CARVALHO, D. L.; MENDES, I. A. (orgs.) **História da Matemática em atividades didáticas.** Natal: Editora da UFRN, 2005.

MIGUEL, A. **As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores. 1997**. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646848/13749. Acesso em: 04 jun. 2014.

NACARATO, A. M.; BREDARIOL, C. C.; PASSOS, M. P. F. **Trigonometria: uma análise da sua evolução histórica e da transposição didática desse conhecimento presente nos manuais didáticos e propostas curriculares.** Disponível em: http://nutes2.nutes.ufrj.br/textosapoio/trigonometria.pdf. Acesso em: 29 abr. 2014.

LEI DOS SENOS E DOS COSSENOS

Taina Maturano Zabaneh

Ano Escolar: 1° ano do Ensino Médio

Ementa

Trigonometria em triângulos quaisquer. Lei dos senos. Lei dos cossenos.

Objetivos

Entender qual o caminho para a dedução das fórmulas das leis do seno e do cosseno. Aproximar os alunos da linguagem matemática através da dedução de fórmulas. Compreensão do uso da lei dos senos e dos cossenos, conseguindo aplicar os conceitos em exercícios e problemas.

Recursos empregados

Lousa e giz.

Atividades

Aula 1

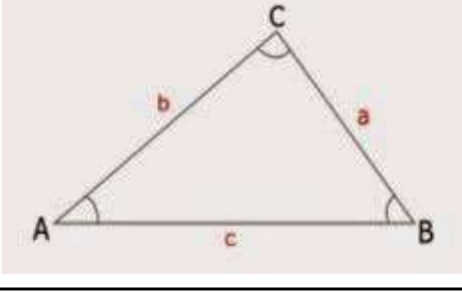
Introdução

A trigonometria, como estudo das medidas dos lados e ângulos de triângulos, começou no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo. Sua "descoberta" não ocorreu de forma repentina e por um único protagonista, assim como todas as descobertas matemáticas. Essa surgiu a partir de uma necessidade prática para resolver problemas de astronomia, agrimensura e navegações. O matemático conhecido como Regiomontanos, foi um dos primeiros registros da demonstração da lei dos senos.

Lei dos senos:

Em um triângulo qualquer a medida de seus lados é proporcional à medida do seno de seus ângulos opostos.

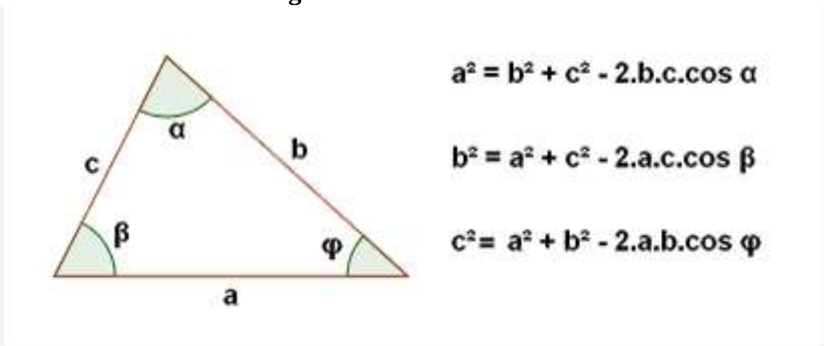
Figura 1: lei dos senos



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2r$$

Lei dos cossenos:

Figura 2: Lei dos Cossenos



Fonte: http://www.dinamatica.com.br/2011/03/uma-deducao-grafica-da-lei-dos-cossenos.html

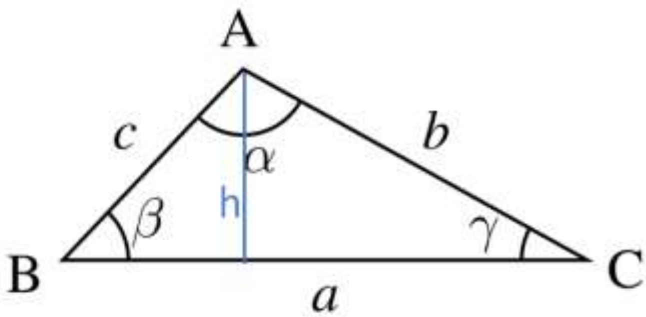
Dedução da lei dos senos

O primeiro passo é revisar os conceitos de seno, cosseno e tangente em triângulos retângulos. Após relembrar esse conteúdo o professor deverá questionar os alunos como conseguir calcular o seno de um triângulo não retângulo e como conseguir a medida dos lados quando temos algum ângulo e a medida de outros lados. A partir do brainstorm de todos na sala, o professor deve propor a atividade 1, que tem como objetivo encontrar a relação dos senos e lados de um triângulo qualquer. A atividade deve ser realizada em grupos pequenos para que possam discutir ideias.

Durante essa atividade o professor deve ter o papel de mediador, estar sempre observando e auxiliando os alunos, quando necessário, incentivando o raciocínio destes. Ao final da atividade, ocorrerá a plenária e a formalização do conteúdo pelo professor. Na plenária, o professor pode escolher alguns alunos que percebeu durante a atividade que obtiveram sucesso na atividade para explicar ao resto da sala como chegou ao resultado. A formalização do conteúdo deve ocorrer para que tenham um registro formal do assunto, e principalmente, para sanar as dúvidas dos alunos que não compreenderam com a explicação dos colegas

Atividade 1: encontrar a relação dos senos e lados de um triângulo qualquer.

Figura 3: Dedução da lei dos senos



O primeiro passo é encontrar o seno do ângulo β (Dica: lembre-se de traçar a altura relativa ao lado *a*):

$$\text{sen}(\beta) = h/c \Rightarrow h = c.\text{sen}(\beta)$$

$$\text{sen}(\gamma) = h/b \Rightarrow h = b.\text{sen}(\gamma)$$

Agora, igualando as duas sentenças: $c.\text{sen}(\beta) = b.\text{sen}(\gamma)$,

logo: $c/\text{sen}(\gamma) = b/\text{sen}(\beta)$

Aula 2

A segunda aula será dedicada aos exercícios. Os exercícios que serão trabalhados nesse momento serão exercícios introdutórios e de fixação com dificuldade baixa e média para que os alunos consigam perceber em quais momentos a lei dos senos é a estratégia mais eficiente para resolver exercícios e problemas.

Um exemplo seriam os exercícios do módulo 6 da lista de preparação para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP):

Figura 4: Exercício da OBMEP.

Exercício 10. Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala 1 : 10000, como na figura 1. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância em km entre as ilhas A e B é:

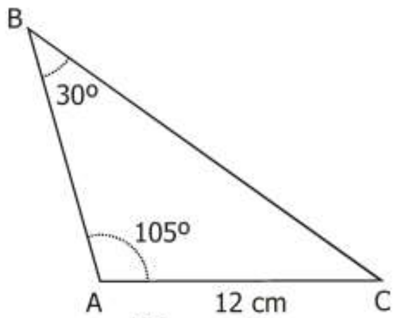


Figura 1

a) $2,3$. b) $2,1$. c) $1,9$. d) $1,4$. e) $1,7$.

Figura 5: Exercício da OBMEP.

Exercício 4. Sendo a o lado oposto ao ângulo α, b oposto a β e c oposto a γ, em um triângulo, calcule:

a) o seno de β para $a = 4$ cm, $\alpha = 30°$ e $b = 8$ cm;

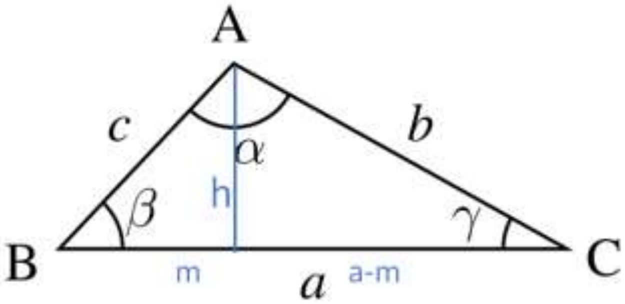
b) o valor de γ para $a = \sqrt{2}$ cm, $\beta = 45°$ e $b = 2$; e

Aula 3

Essa aula, assim como a primeira, tem como objetivo fazer com que os alunos cheguem na lei dos cossenos, a partir da atividade 2. Novamente o papel do professor será o de mediador enquanto os alunos em grupos tentam realizar a atividade. É importante que professor esteja atento a todas as dúvidas e eventuais problemas e tente induzir o aluno a chegar em respostas sem, de fato, dar a resposta. Caso os alunos tenham muita dificuldade em alguma parte, cabe ao professor explicar para todos os alunos, sem dar a solução do problema para eles.

Atividade 2: deduzir a lei dos cossenos.

Figura 6: Dedução da lei dos Cossenos.



O primeiro passo é encontrar o cosseno do ângulo β (Dica: lembre-se de traçar a altura e coloque *a* como a soma de dois segmentos *m* e *a* - *m*):

$$\cos(\beta) = m/c \rightarrow m = c.\cos(\beta)$$

O segundo passo é achar a relação de Pitágoras dos dois triângulos retângulos formados pela altura.

$$c^2 = m^2 + h^2$$
$$b^2 = (a-m)^2 + h^2$$

Isolando *h* nas duas equações acima e as igualando, temos:

$$c^2 - m^2 = b^2 - (a-m)^2$$

Substituindo *m* pelo valor encontrado no primeiro caso:

$$c^2 - (c.cos(\beta))^2 = b^2 - (a - c.cos(\beta))^2$$
$$c^2 - c^2cos^2(\beta) = b^2 - (a^2 - 2ac.cos(\beta) + c^2cos^2(\beta))$$
$$c^2 + a^2 - 2ac.cos(\beta) = b^2$$

Aula 4

Essa aula será dedicada à exercícios. Serão exercícios para que os alunos consigam compreender a utilidade desse teorema, bem como usá-lo. É importante fazer uma revisão rápida dos conceitos estudados anteriormente para que os alunos consigam resolver os exercícios com maior facilidade.

Exercício 1: Dois lados de um triângulo medem 6 m e 10 m e formam entre si um ângulo de 120º. Determinar a medida do terceiro lado.

Exercício 2: No triângulo ABC, os lados AC e BC medem 8 cm e 6 cm, respectivamente, e o ângulo A vale 30º. Calcule o valor do terceiro lado e o cosseno relativo ao maior lado do triângulo.

Aula 5

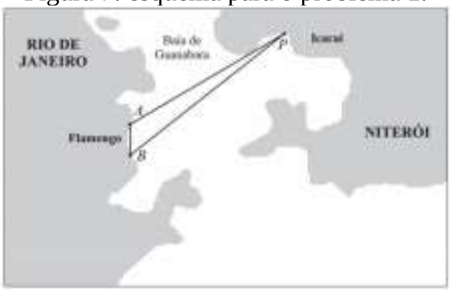
A aula será dedicada à solução de problemas mais complexos, envolvendo a lei dos senos e a lei dos cossenos. Para melhor aproveitamento, a atividade será realizada em grupos. A ideia é mostrar situações reais como demarcação de terras e distâncias em mapas. Maia (2015) sugere alguns exemplos que podem ser utilizados em sala de aula.

Outra sugestão seria a utilização de exercícios da lista da OBMEP ou adaptações destes exercícios, caso necessário. A ideia é melhorar a capacidade visual e aplicação do conteúdo ensinado em diversas situações.

Exemplos de Problemas:

Problema 1: medir a distância de um ponto do Rio de Janeiro a um ponto visível de Niterói. De um ponto A na praia do Flamengo, no Rio de Janeiro, avista-se um ponto P na praia de Icaraí em Niterói (estes dois pontos estão em lados opostos do canal de entrada da Baía de Guanabara). De um ponto B na Praia do Flamengo, distante 1 km de A, também se avista o ponto P (Figura 7). Um observador no Rio de Janeiro mediu os ângulos BÂP = 119º e ABP = 52º. Qual é a distância entre A e P?

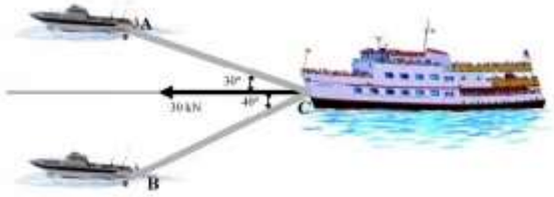
Figura 7: esquema para o problema 1.



Fonte: Wagner *et al* (2010)

Problema 2:
Duas lanchas rebocam um barco de passageiros que se encontra com problemas em seus motores. Sabendo que a força resultante é igual a 30 kN, encontre suas componentes nas direções AC e BC.

Figura 8: esquema do problema 2.



Fonte: http://www.cronosquality.com/aulas/ms/ms01.pdf

Avaliação

A avaliação será a atividade da aula 5. Será avaliado a participação e se o grupo demonstra conhecimento do conteúdo apresentado, dessa forma verificando se os alunos fizeram os exercícios de aulas anteriores.

Referências

Lista de Exercícios Sala do Saber. Disponível em: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/64bkfymijrwg4.pdf Acesso em: 17 abr. 2018.

MAIA, Rayanne Dantas. **Um estudo sobre lei dos senos, lei dos cossenos e suas aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015.

PEREIRA, Mariana Barreto; FERREIRA, Guttenberg Sergistótanes Santos. **Sobre Relações Métricas, Lei dos Senos e Cossenos no ENEM: Um estudo de Iniciação Científica**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, 2015.

WAGNER, Eduardo; *et al.* **Temas e Problemas**. Rio de janeiro: SBM, 2010.

CLASSIFICAÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Sara dos Santos Costa

Ano escolar: 2º ano do Ensino Médio

Ementa

Geometria métrica espacial

- Poliedros, prismas e pirâmides
- Cilindros, cones e esferas

Objetivos

Apresentação inicial dos sólidos geométricos em geometria espacial.

Recursos empregados

Material manipulativo

- O brinquedo construtivo - *GEOLIG*.
- Palitos e jujubas.

Atividades

Propõe-se uma aula introdutória sobre geometria espacial e sólidos geométricos. Com o objetivo de ser uma aula lúdica, na qual os alunos coloquem a mão na massa e vejam algo concreto, será usado jujuba (bala de goma), palitos e jogo construtivo. Lembramos que as escolas estaduais de São Paulo não disponibilizam nenhum software, sequer o *GeoGebra,* para facilitar a visualização das figuras no processo de ensino aprendizagem.

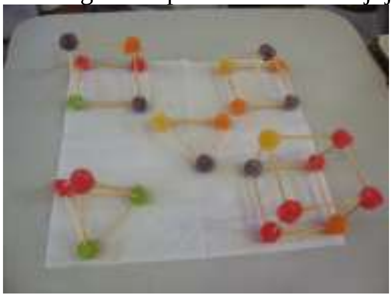
A duração será de 2 aulas (aproximadamente 1h40min). Inicialmente os alunos trabalham em grupos de 4 a 5 integrantes, agrupados pelo critério de que pelo menos um tenha internet no celular. Será colocado na lousa o nome de seis sólidos geométricos, (poliedros) para cada grupo. Os alunos terão que pesquisar na internet e reproduzir todos os sólidos com a jujuba sendo os vértices e os palitos as arestas das figuras, ou com o brinquedo construtivo *Geolig* (figura 1).

Figura 1: Caixa de Geolig

Fonte: https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-1179813098-geolig-77-pecas-_JM

O professor deve ir passando de grupo em grupo, acompanhando as discussões e os resultados. Caso veja algum erro grave questionar o grupo, pedir que pesquisem em mais de uma fonte ou confirmar se está bem representado conforme a pesquisa. Após todos terem terminado será solicitado que cada aluno apresente um sólido, mostrando a construção e explicando o que foi pesquisado. Contribuindo para uma discussão entre grupos, socializar as informações, para todos verem as figuras que foram criadas (figura 2).

Figura 2: Figuras espaciais feitas com jujuba.



Fonte: http://4anovesp.blogspot.com/2014/07/jujubas-palitos-de-dente-e-geometria.html

Depois será acrescentado em cada grupo alguns sólidos redondos, e solicitado que eles separem os sólidos como quiserem e como acharem que faz mais sentido, montando assim suas próprias classificações. A próxima etapa será socializar como cada grupo dividiu seus objetos. Nessa etapa o professor mostrará aos alunos que existe uma classificação adotada pelos matemáticos, apresentando o conceito de prisma, pirâmides, poliedros de Platão, poliedros regulares, entre outros. Mas que essa é apenas uma construção humana, que foi adotada a muito tempo atrás para padronização e para o melhor estudo dos sólidos geométricos, podendo também contar um pouco da história da matemática.

Avaliação

Os alunos serão avaliados pela participação na atividade, pelo comprometimento na pesquisa e pela apresentação do que foi realizado a sala. Também será verificado se os alunos entregam os seis sólidos geométricos. Mas não será aplicado no dia prova nem questionário. Sendo assim, uma avaliação continuada que verifica a participação dos alunos.

Referências

ANDRADE, Fabiana. **Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio**. Trabalho de conclusão de curso (Pós graduação). Rio de Janeiro, UNIRIO, 2014. Disponível em: http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/TCC_Fabiana.pdf. Acesso em: 02 abr. 2019.

SÃO PAULO, Secretaria Estadual da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo e suas Tecnologias: Matemática**. São Paulo, 2011. Disponível em: http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf. Acesso em: 02 abr. 2019.

GEOMETRIA ESPACIAL: PRISMAS

Amanda Braga

Ano escolar: 3º ano do Ensino Médio

Ementa

Os conteúdos e habilidades matemáticas tratados nessa aula são:

- Volume de prismas
- Planificação de prismas
- Construção geométrica
- Conversão de unidades
- Visão espacial

Como conteúdos procedimentais temos:

- Utilização de régua, compasso e materiais não convencionais para realizar medições e construir figuras geométricas.
- Utilização de materiais diversos para construir sólidos geométricos.

Como conteúdos atitudinais temos:

- Capacidade de trabalhar em grupo: participar ativamente da atividade, propondo soluções e também escutando sugestões dos demais integrantes, avaliando em conjunto as opções e escolhendo o melhor caminho para desempenhar a tarefa solicitada.
- Analisar a razoabilidade de um resultado.

Requisitos: Geometria Plana.

Objetivos

O objetivo desta atividade é que cada aluno atue na planificação e construção de um prisma com capacidade para 1 L de água. Para tal espera-se que os alunos:

- Compreendam quais as medidas necessárias para a construção de um prisma
- Compreendam a representação plana de um prisma
- Construam um prisma a partir da planificação feita e o tornem impermeável com a utilização de materiais diversos.

Recursos empregados

Os recursos empregados nessa atividade são:

- Folhas de papel sulfite: utilizadas para as contas e para a planificação.
- Régua e compasso/barbante fino: utilizados para medições e construções geométricas, sendo o barbante um substituto do compasso (nesse caso o professor deve instruir os alunos sobre como usá-lo).
- Cartolina, papelão, isopor, papel filme, papel alumínio, jornal, revistas, entre outros: é necessário ter uma grande variedade de materiais para que os alunos possam usar sua criatividade e seus conhecimentos próprios na construção de um vaso impermeável a partir da planificação obtida.

Atividades

Esta atividade foi pensada para uma turma de 3° ano do Ensino Médio, sendo uma introdução ao assunto de Geometria Espacial, ocorrendo em 3 aulas. Em cada uma das aulas será realizada uma fase da atividade, que estão descritas a seguir.

Situação Problema

A escola está passando por um projeto de revitalização. A direção solicitou aos alunos que dessem sugestões do que gostariam de ter na escola e uma das mais feitas foi a colocação de plantas em todos os ambientes, pois os alunos consideravam que a presença delas, além de tornar o ambiente mais agradável, interferia diretamente no seu bem-estar. Essa sugestão foi prontamente acatada pela direção e estava em processo de levantamento de orçamento quando um dos professores sugeriu que pelo menos parte das decorações com plantas fosse feita pelos alunos. O professor de matemática teve, então, a ideia de que fossem os alunos que produzissem os vasos para as salas de aula. Já relacionando com o tema que trabalharia com os alunos do terceiro ano do ensino médio, prismas, pensou em pedir aos seus alunos que fizessem modelos dos vasos que seriam colocados nas salas, para que depois fossem passados para as demais turmas, a fim de servir como base para que cada uma construa os vasos para sua própria sala.

O que o professor solicitou a seus alunos foi o seguinte: que construíssem um modelo de vaso que tivesse a forma de um prisma de base triangular com capacidade de 1 litro e com todas as arestas da mesma medida, apresentando a foto abaixo como exemplo do que se espera como produto final.

Figura 1: vasos em formato de prisma de base triangular.

Roteiro da atividade

O professor dividiu a tarefa em quatro fases: 1) cálculos; 2) planificação; 3) construção; 4) teste. Cada uma dessas fases sendo realizada por todos os alunos da turma, separados em grupos de três pessoas, ou quatro quando necessário e com duração de uma aula de 50 minutos.

1. Cálculos

   A fase de cálculos consiste em descobrir a medida da aresta do prisma. É esperado que haja uma discussão entre os integrantes de cada grupo para levantar quais as medidas que serão necessárias para construir a planificação. O professor não deve guiar os alunos nessa etapa, assumindo apenas o papel de apoio, auxiliando os alunos por meio de perguntas reflexivas, nunca entregando um caminho pronto. Cada grupo deverá construir sua própria solução, podendo recorrer à *internet* e aos demais grupos para troca de ideias. Cada grupo terá uma folha na qual devem constar os cálculos realizados de forma clara, que deve ser entregue ao final da aula.

2. Planificação

Na aula seguinte terá início a fase de planificação, na qual cada grupo deverá construir a planificação do vaso utilizando o valor da aresta calculado na aula anterior. Nessa fase os alunos terão à disposição réguas e compassos para a construção das figuras geométricas. É esperado que a planificação contenha três quadrados e um triângulo equilátero (uma das bases do prisma deve ser aberta), todos com aresta 13,22 cm. O professor novamente assume um papel de apoio, não devendo apresentar uma solução, mas permitindo que os alunos pesquisem na internet e conversem com outros grupos. Ao final da aula cada grupo deverá entregar sua planificação.

3. Construção

Todo o tempo da terceira aula será destinado à construção do vaso, com cada grupo utilizando a sua planificação como base. Os grupos estão livres para decidirem qual material usar na construção dentre os citados anteriormente em "Recursos empregados". É recomendado deixar a aula inteira para que os alunos possam realizar a atividade livremente sem pressão do tempo, dando oportunidade para que os alunos se expressem artisticamente. Ao final da aula todos os grupos devem entregar seus vasos.

4. Teste

Nessa fase todos os vasos construídos serão testados. O professor colocará 1 litro de água em cada vaso e esperará por 3 minutos. Ao final do tempo é esperado que não haja vazamentos e que o nível de água esteja nivelado com a borda do vaso. Os modelos que passarem no teste servirão de modelo para as demais turmas. Os grupos que criaram esses vasos deverão fornecer a planificação, a relação de materiais usados e um roteiro de construção, este último sendo elaborado com o auxílio da turma inteira.

Avaliação

Essa atividade se baseia nas metodologias de investigação e etnomatemática (D'AMBROSIO, 2007). Segundo Ponte (2009), a atividade investigativa possui quatro momentos: reconhecimento da situação, formulação de conjecturas, realização de testes e argumentações. Esse plano de aula foi pensado para que em todas as aulas seja possível observar esses quatro momentos, dependendo enormemente da postura do professor em sala de aula, pois este deve deixar os alunos livres para agirem, atuando apenas como auxiliar quando necessário. A influência da etnomatemática se evidencia no fato de o aluno estar livre para utilizar seus próprios conhecimentos na construção do vaso, podendo inclusive se expressar artisticamente. O aluno não é cru em conhecimentos, pois o ato de construir um objeto exige que o aluno saiba manipular objetos, saiba estimar, medir, tenha visão espacial, habilidades estas que não são ensinadas na escola (de forma explícita), muitas vezes constituindo um conhecimento que o aluno adquiriu em outros meios, na interação com a cultura na qual está inserido. D'AMBROSIO (2007, p.111) escreve

> para compor a palavra etnomatemática utilizei as raízes *tica, matema e etno* para significar que há várias maneiras, técnicas, habilidades (tica) de explicar, de entender, de lidar, de conviver (matema) com distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (etno).

É com base nessa visão que este plano foi concebido.

A avaliação será por conceitos, uma vez que são muitos parâmetros para serem avaliados e fica muito difícil atribuir uma nota numérica. Há apenas dois conceitos, S para satisfatório e N para não satisfatório. O mesmo conceito será atribuído a todos os integrantes do grupo. Os conceitos são: • S: todos os integrantes do grupo participaram ativamente das atividades e todos estavam cientes de todos os processos; o grupo entregou todas as atividades solicitadas ao final de cada aula de forma organizada e clara; apresentou um protótipo que atendia às características solicitadas (capacidade de 1 litro e impermeável). • N: tudo que não for considerado como satisfatório.
Referências D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2007. PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigação matemáticas na sala de aula.** 2. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2009.

PROBABILIDADE
E
ESTATÍSTICA

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
João Paulo Vieira de Carvalho
Ano escolar: 9º ano do Ensino Fundamental
Ementa Objeto de Conhecimento: Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes. Habilidade: **(EF09MA20)** - Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos. (BRASIL, 2017)
Objetivos Permitir com que os alunos reconheçam e saibam como utilizar a probabilidade e estatística em eventos do seu cotidiano.
Recursos empregados Tecnologias Digitais (Jogo do cotidiano dos alunos).
Atividades Um guia mais preciso de como as atividades seriam realizadas pode ser acessado pelo *link:* https://docs.google.com/presentation/d/1U4QmsUzRXbiTMeDVIyiXBhxJ7jBX87ejFK4Ld1VvkC0/edit?usp=sharing. De maneira geral, que será melhor explicitada à frente, a atividade tomará em torno de 3 a 4 aulas (caso seja possível utilizar uma quarta aula, temos o melhor cenário). Dividiremos as aulas em 3 situações, onde na primeira será feita uma apresentação parecida com a do link, mas sem os cálculos, apenas apresentando quantidade de campeões, quantidade de cartas de cada campeão, etc, para ambientar os alunos com o jogo. Na segunda situação, os alunos jogariam uma ou duas partidas do jogo (os jogos funcionam com 8 jogadores, então seria melhor formar grupos de 8 pessoas que jogariam entre si, visto que, como o jogo é *online*, se não há um número fechado de jogadores, o jogo procura jogadores *online* no momento). Cada partida dura em torno de 30 a 40 minutos, então o cenário que se imagina é que sejam duas aula em sequência, já numa sala com computadores, onde o professor explicará o jogo nos primeiros 20 minutos e então dará para a sala 70 minutos para jogar, sobrando 10 minutos para eventuais problemas. Na terceira situação acontece a prática proposta nos *slides*. Vamos detalhar mais cada situação. **Descrição de situação 1:** **Objetivos:** Introduzir os conceitos e objetos que serão utilizados em jogo, para terem uma base de como proceder. **Metodologia:** Exposição com *slides*. Apesar de não achar a mais indicada, neste momento, os alunos devem se preocupar mais como as cartas que recebem em mãos, para ver que se pode estipular uma chance, mas não se pode dizer, com certeza, qual carta cairá. Dessa maneira, é mais importante que os alunos saibam que existem muitas cartas, e não quais são elas em específico.

Desenvolvimento: Estes são os primeiros 20 minutos de aula, onde o professor irá expor o que será trabalhado. Coisas como o nome do jogo, perguntar se os alunos já o conhecem, apresentar as cartas do jogo, como é a jogabilidade, etc. Caso seja necessário, há uma sobra de 10 minutos que pode ser utilizada.

Descrição de situação 2:
Objetivos: Espera-se que os alunos, ao jogarem, vejam como as cartas aparecem a cada rodada, se há algum padrão, se elas surgem de modo aleatório, se há níveis específicos para as cartas surgirem, etc.
Metodologia: Alunos se ambientando com o jogo.
Desenvolvimento: Nesta etapa, os alunos ficarão jogando durante cerca de 70 minutos. Isso dá em torno de 2 partidas, visto que elas costumam demorar de 30 a 40 minutos. Caso o tempo comece a se exceder, é possível que todos saiam de uma sala, sem penalidades. Caso haja a possibilidade de aplicar este plano em 4 aulas, é possível usar a 3ª aula como continuação desta etapa, dando a possibilidade de jogarem mais uma partida. O restante do tempo da 3ª aula, se houver, pode ser usado para os alunos relatarem o que sentiram e o que puderam observar do jogo.

Descrição de situação 3:
Objetivos: Aplicar o que os alunos viram no jogo, agora com os conceitos iniciais de contagem de probabilidade.
Metodologia: Ação investigativa por parte dos alunos.
Desenvolvimento: Aqui espera-se que os alunos façam a atividade proposta nos slides. O professor disponibilizará a quantidades de cartas por nível e a quantidade de cartas de um mesmo campeão. Os alunos devem calcular o total de cartas em jogo para fazerem cálculos posteriores que serão pedidos O professor pode então fazer perguntas do gênero "Qual a chance de tirar um campeão específico na sua mão?" ou outras que relacionem a probabilidade de tirar um campeão específico, ou um grupo específico de campeões. O intuito é que, dado um tempo de atividade (em que os alunos podem calcular diversas possibilidades de coisas diferentes acontecerem), definido pelo professor, este mostre a tabela que se encontra nos *slides* (de probabilidade de tirar uma carta de determinado Tier, a cada nível do jogador). Dado o caráter de ação investigativa, o esperado é que os alunos percebam que os valores que encontraram de determinadas objetos não bate com os disponibilizados na tabela. Isso acontece porque existem muitos outros fatores para o cálculo dessas probabilidades, os quais geram essa diferença nos valores pressupostos.

Avaliação

O objetivo principal é ver se os alunos conseguiram relacionar algo do cotidiano deles (dos que já jogavam ou conheciam o jogo) com os conteúdos curriculares, além de tentar mostrar a todos que é possível encontrar relações entre atividades do cotidiano e conteúdos trabalhados na escola. Dessa forma, após a atividade, as anotações e cálculos seriam avaliados, para ver se os alunos conseguiram fazer as relações esperadas corretamente.

Referências

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Ministério da Educação. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 08 abr. 2019.

MEDIDAS DE DISPERSÃO ESTATÍSTICAS

Wesley Cunha de Jesus

Ano escolar: 2º ano do Ensino Médio

Ementa

Medidas de Centralidade e variabilidade; Média aritmética; Média aritmética ponderada; Mediana; Moda; Variância; Desvio Padrão; Medidas de centralidade e dispersão para dados agrupados; Outras medidas de separação de dados.

Objetivos

Geral: Compreender e obter conhecimentos teóricos e práticos, a fim de estabelecer relações e aprofundar o conhecimento e domínio sobre medidas de dispersão estatísticas.
Específico: Analisar dados e seus agrupamentos; Analisar gráficos e tabelas; Analisar e estabelecer relações entre os conteúdos teóricos, práticos e fórmulas matemáticas elencadas em cada conteúdo; Estabelecer capacidades de raciocínio lógico e de trabalho em grupo.

Recursos empregados

Uso de *slides* e projetor, imagens, gráficos e tabelas: Usaremos o projetor para apresentar a história da estatística e sua aplicação nos dias atuais. Além disso, através dessa ferramenta, utilizaremos a projeção de imagens e tabelas contendo dados e agrupamentos de dados que são utilizados de base para a formação de planilhas e estudos estatísticos diversos, como por exemplo, dados relacionados a condições climáticas e distâncias e trajetos percorridos pelos alunos em seu caminho até a escola.
Lousa, caneta esferográfica, régua, papel sulfite: O professor deverá utilizar-se da lousa para exemplos simplificados e até mesmo mais complexos para demonstração aos seus alunos, além disso, os alunos utilizarão a caneta esferográfica, a régua e o papel sulfite para o desenho de gráficos e tabelas de acordo com a orientação do professor, obtendo conhecimentos como coleta de dados, agrupamento e modelagem de dados.
Uso do computador para demonstrar cálculos, fórmulas, soluções de problemas, e demonstrações de como obter gráficos e tabelas através da ferramenta Calc ou Excel: Os materiais têm por objetivo mostrar na prática a comprovação e aplicação dos conceitos, assim como exemplificar e simplificar os conteúdos apresentados com relação as atividades e situações do nosso dia a dia.
Aplicação da avaliação prática: A prova prática medirá os conhecimentos obtidos pelos alunos durante o curso, além de verificar a capacidade de trabalho em grupo e a contribuição para o aprendizado dos demais colegas.
Discussão e apresentação dos resultados obtidos: A discussão com sala tem por objetivo verificar e sanar as dúvidas que os alunos ainda possam ter. Além disso, a discussão é fundamental para o compartilhamento de ideias é capaz de gerar um vasto campo de análises e conhecimentos acerca dos conteúdos.
Considerações Finais: As considerações finais serão como um fechamento de todo conteúdo apresentado, como um resumo do que foi ensinado e o que foi obtido durante esse processo de ensino.

Atividades

1. Introdução

A preocupação mediante a questões relacionadas aos conteúdos de Probabilidade e Estatística ou Medidas de Dispersão Estatísticas apresentadas nos livros didáticos de matemática, motivou a elaboração deste trabalho. É indubitável que a formação dos alunos como cidadãos envolve cada vez mais o aprendizado de tais conteúdos. Aliás, já faz tempo que o aprendizado em matemática deixou de apresentar conteúdos e significados com base apenas em números.

Os livros didáticos são, muitas vezes, o único recurso pedagógico disponível par o professor e para o aluno. Entretanto, alguns livros didáticos estão repletos de fórmulas e conceitos prontos e acabados, fazendo com que, de certa forma, haja um desperdício de tempo na realização de cálculos que muitas vezes podem ser realizados em apenas segundos com a utilização de calculadoras, computadores, *softwares*, etc. Sendo assim, não estamos contribuindo para que o aluno desenvolva um pensamento crítico, estatístico e nem probabilístico que envolva o uso de estratégias de resoluções de problemas e a análise dos resultados obtidos através de provas e métodos de investigação.

Através dessa lógica, percebe-se que é necessário um estudo mais aprofundado sobre os conteúdos de medidas de dispersão e estatística. Além disso, nota-se que esse conteúdo é essencial para a formação de alunos críticos, que sejam capazes de resolver problemas através da análise lógica e coleta de dados que têm fundamento em problematizações e situações do cotidiano.

Partindo do pressuposto de que tanto a Probabilidade, como a Estatística e as Medidas de Dispersão são temas que não recebem tratamento adequado nos livros didáticos de matemática destinados ao ensino fundamental e ao ensino médio, apesar de sua aplicabilidade no dia-a-dia dos estudantes, definiu-se o foco deste estudo.

2. Atividades desenvolvidas (com duração de até 5 aulas de 50min)

a) A História da Palavra Estatística

A palavra Estatística está associada à palavra latina *status* (Estado), e também está diretamente ligada à outra palavra – censos – que surgiu bem antes do que já conhecemos. De acordo com dados históricos, há 3000 a.C. já se faziam censos nas civilizações antigas como na Babilônia, na China e no Egito. No 4º livro do Velho Testamento, há referências às instruções dadas a Moisés para que realizasse um levantamento de homens de Israel aptos para guerrear. Nessa época, essas informações eram utilizadas para a taxação de impostos ou para o alistamento militar. Atribui-se a Aristóteles cento e oitenta descrições de Estados. Outro fato histórico, é que o Imperador César Augusto, por exemplo, ordenou que se fizesse o Censo de todo o Império Romano.

A palavra CENSO é derivada da palavra CENSERE, que em Latim significa TAXAR. Em 1085, Guilherme, O Conquistador, solicitou um levantamento estatístico da Inglaterra, que deveria conter informações sobre terras, proprietários, uso da terra, empregados e animais. Os resultados deste censo foram publicados em 1086 no livro intitulado *Domesday Book* e serviram de base para o cálculo de impostos. Contudo, mesmo que a prática de coletar dados sobre colheitas, composição da população humana ou de animais, impostos, etc., fosse conhecida pelos egípcios, hebreus, caldeus e gregos, apenas no século XVII a Estatística passou a ser considerada uma disciplina autônoma, tendo como objetivo básico a descrição dos **bens** do Estado.

Entretanto, somente muito tempo depois é que a palavra Estatística, ficou conhecida como a entendemos hoje. Cunhada pelo acadêmico alemão Gottfried Achenwall (1719-1772), que foi um notável continuador dos estudos de Hermann Conrig (1606-1681). Podemos dizer que o seu principal legado foi o termo Staatenkunde, que deu origem à designação atual. Na Enciclopédia Britânica, o verbete Statistics apareceu em 1797.

b) Medidas de Dispersão Estatísticas

Medidas de dispersão são parâmetros estatísticos usados para determinar o grau de variabilidade dos dados de um conjunto de valores. A utilização desses parâmetros torna a análise de uma amostra mais confiável, visto que as variáveis de tendência central (média, mediana, moda), muitas vezes, escondem a homogeneidade ou não dos dados. Dessa forma, as medidas de dispersão servem para avaliar o quanto os dados são semelhantes. Descrevem o quanto os dados distam do valor central. Desse modo, as medidas de dispersão servem para avaliar qual o grau de representação da média.

c) Média, Mediana e Moda

A <u>Média</u> (Me) é calculada somando-se todos os valores de um conjunto de dados e dividindo-se pelo número de elementos deste conjunto. Como a média é uma medida sensível aos valores da amostra, é mais adequada para situações em que os dados são distribuídos mais ou menos de forma uniforme, ou seja, valores sem grandes discrepâncias.

Fórmula:

$$M_e = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Sendo:

Me: média

x1, x2, x3,..., xn: valores dos dados

n: número de elementos do conjunto de dados

Exemplo:

Os jogadores de uma equipe de basquete apresentam as seguintes idades: 28, 27, 19, 23 e 21 anos. Qual a média de idade desta equipe?

Solução:

$$M_e = \frac{28 + 27 + 19 + 23 + 21}{5}$$

$$M_e = \frac{118}{5} = 23{,}6$$

A <u>Moda</u> (Mo) representa o valor mais frequente de um conjunto de dados. Sendo assim, para defini-la basta observar a frequência com que os valores aparecem. Um conjunto de dados é chamado de bimodal quando apresenta duas modas, ou seja, dois valores são mais frequentes.

Exemplo:

Em uma sapataria, durante um dia, foram vendidos os seguintes números de sapato: 34, 39, 36, 35, 37, 40, 36, 38, 36, 38 e 41. Qual o valor da moda desta amostra?

Solução:

Observando os números vendidos notamos que o número 36 foi o que apresentou maior frequência (3 pares), portanto, a moda é igual a:

Mo = 36

A Mediana (Md) representa o valor central de um conjunto de dados. Para encontrar o valor da mediana é necessário colocar os valores em ordem crescente ou decrescente. Quando o número elementos de um conjunto é par, a mediana é encontrada pela média dos dois valores centrais. Assim, esses valores são somados e divididos por dois.

Exemplos:

1) Em uma escola, o professor de educação física anotou a altura de um grupo de alunos. Considerando que os valores medidos foram: 1,54 m; 1,67 m, 1,50 m; 1,65 m; 1,75 m; 1,69 m; 1,60 m; 1,55 m e 1,78 m, qual o valor da mediana das alturas dos alunos?

Solução:

Primeiro devemos colocar os valores em ordem. Neste caso, colocaremos em ordem crescente. Assim, o conjunto de dados ficará:

1,50; 1,54; 1,55; 1,60; 1,65; 1,67; 1,69; 1,75; 1,78

Como o conjunto é formado por 9 elementos, que é um número ímpar, então a mediana será igual ao 5º elemento, ou seja:

Md = 1,65 m

2) Calcule o valor da mediana da seguinte amostra de dados: (32, 27, 15, 44, 15, 32).

Solução:

Primeiro precisamos colocar os dados em ordem, assim temos:

15, 15, 27, 32, 32, 44

Como essa amostra é formada por 6 elementos, que é um número par, a mediana será igual a média dos elementos centrais, ou seja:

$$M_d = \frac{27+32}{2} = \frac{59}{2} = 29{,}5$$

d) Amplitude, Variância, Desvio padrão e Coeficiente de Variação

As medidas de dispersão mais usadas são: amplitude, variância, desvio padrão e coeficiente de variação.

Amplitude: Essa medida de dispersão é definida como a diferença entre a maior e a menor observação de um conjunto de dados, isto é:

$$A = X_{maior} - X_{menor}$$

Por ser uma medida que não leva em consideração como os dados estão efetivamente distribuídos, não é muito utilizada.

Exemplo:

O setor de controle de qualidade de uma empresa seleciona, ao acaso, peças de um lote. Quando a amplitude das medidas dos diâmetros das peças ultrapassa 0,8 cm o lote é rejeitado. Considerando que em um lote foram encontrados os valores 2,1 cm; 2,0 cm; 2,2 cm; 2,9 cm; 2,4 cm, esse lote foi aprovado ou rejeitado?

Solução:

Para calcular a amplitude, basta identificar o menor e o maior valores, que neste caso, são 2,0 cm e 2,9 cm. Calculando a amplitude, temos:

A = 2,9 - 2 = 0,9 cm

Nesta situação o lote foi rejeitado, pois a amplitude ultrapassou o valor limite.

Variância: A variância é determinada pela média dos quadrados das diferenças entre cada uma das observações e a média aritmética da amostra. O cálculo é feito com base na seguinte fórmula:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - MA)^2}{n}$$

Sendo:

V: variância;

x_i: valor observado;

MA: média aritmética da amostra;

n: número de dados observados.

Exemplo:

Considerando as idades das crianças de duas festas, vamos calcular a variância desses conjuntos de dados.

Solução:

Festa A - Dados: 1 ano, 2 anos, 2 anos, 12 anos, 12 anos e 13 anos;

Média:

$$MA_a = \frac{1+2+2+12+12+13}{6} = \frac{42}{6} = 7\ anos$$

Variância:

$$V_a = \frac{(1-7)^2 + (2-7)^2 + (2-7)^2 + (12-7)^2 + (12-7)^2 + (13-7)^2}{6}$$

$$V_a = \frac{36+25+25+25+25+36}{6} \cong 28{,}67\ anos^2$$

Festa B - Dados: 5 anos, 6 anos, 7 anos, 7 anos, 8 anos e 9 anos

Média:

$$MA_b = \frac{5+6+7+7+8+9}{6} = 7\ anos$$

Variância:

$$V_b = \frac{(5-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (9-7)^2}{6}$$

$$V_b = \frac{4+1+0+0+1+4}{6} \cong 1{,}67\ anos^2$$

Observe que apesar da média ser igual, o valor da variância é bem diferente, ou seja, os dados do primeiro conjunto são bem mais heterogêneos.

Desvio Padrão: O desvio padrão é definido como a raiz quadrada da variância. Desta forma, a unidade de medida do desvio padrão será a mesma da unidade de medida dos dados, o que não acontece com a variância. Assim, o desvio padrão é encontrado fazendo-se:

$$DP = \sqrt{V}$$

Quando todos os valores de uma amostra são iguais, o desvio padrão é igual a 0. Sendo que, quanto mais próximo de 0, menor é a dispersão dos dados.

Exemplo:

Considerando ainda o exemplo anterior, das idades de crianças em duas festas, vamos calcular o desvio padrão para as duas situações:

$$DP_a = \sqrt{28{,}67} = 5{,}35\ anos$$

$$DP_b = \sqrt{1{,}67} = 1{,}29\ anos$$

Agora, sabemos que a variação das idades do primeiro grupo em relação a média é de aproximadamente 5 anos, enquanto que a do segundo grupo é de apenas 1 ano.

Coeficiente de Variação: Para encontrar o coeficiente de variação, devemos multiplicar o desvio padrão por 100 e dividir o resultado pela média. Essa medida é expressa em porcentagem.

$$CV = \frac{100.DP}{MA}$$

O coeficiente de variação é utilizado quando precisamos comparar variáveis que apresentam médias diferentes. Como o desvio padrão representa o quanto os dados estão dispersos em relação a uma média, ao comparar amostras com médias diferentes, a sua utilização pode gerar erros de interpretação.

Em suma, ao confrontar dois conjuntos de dados, o mais homogêneo será aquele que apresentar menor coeficiente de variação.

3. **Conclusões**

O estudo da estatística e das medidas de dispersão tem muita importância por ser um assunto base para o aprofundamento em outros tópicos da Matemática. No entanto, percebemos a necessidade de uma nova abordagem no ensino desses conteúdos. O que existe atualmente tem se revelado insuficiente ou superficial, o que leva a grande maioria dos professores a não trabalharem com este conteúdo no Ensino Médio, e aqueles que trabalham, o fazem de maneira excessivamente algorítmica, o que não favorece o desenvolvimento do pensamento estatístico por parte dos alunos. O seu ensino é essencial para a compreensão de conceitos matemáticos entre razão, variação e também, das relações como indicadores estatísticos, coleta e manipulação de dados e suas aplicações.

Avaliação

A avaliação será progressiva e realizada durante todo processo, desde a participação das atividades propostas e avaliação prática em grupo, com ênfase no acompanhamento da evolução dos conceitos obtidos pelo aluno e sua contribuição para a aprendizagem dos demais integrantes de seu grupo e sala.

Inicialmente os alunos serão avaliados de acordo com a participação nas aulas, e evolução dos conceitos teóricos e práticos que serão apresentados aos alunos por meio dos slides, lousa e também através dos conceitos aprendidos em grupos com a ferramenta **Calc/Excel**, que serão apresentados ao longo do curso.

As atividades feitas através do computador, terão finalidade de ensinar o aluno a trabalhar com fórmulas e princípios fundamentais utilizando medidas de dispersão estatísticas, como a coleta e modelagem de banco de dados, construção e análise de gráficos e tabelas correlacionados.

Após o término das atividades acima, será aplicado uma avaliação em grupo, com a intenção de consolidar o que os conceitos e conteúdos práticos e teóricos aprendidos ao longo do curso, visando o compartilhamento de informações, o trabalho em conjunto e a participação de cada aluno em relação a sua contribuição para a aprendizagem dos demais integrantes do seu grupo e sala de aula. Dessa forma, os alunos serão avaliados de acordo com cada atividade apresentada. A avaliação que se pretende aplicar está descrita a seguir.

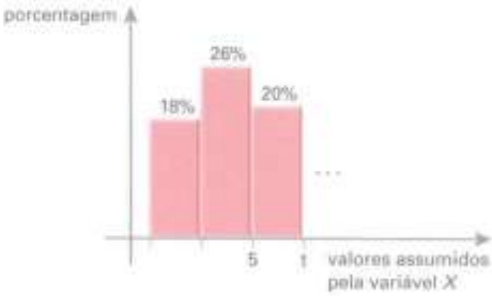
Anote e explique cada passo de suas respostas.

1) O treinador de uma equipe de voleibol resolveu medir a altura dos jogadores da sua equipe e encontrou os seguintes valores: 1,86 m; 1,97 m; 1,78 m; 2,05 m; 1,91 m; 1,80 m. Em seguida, calculou a variância e o coeficiente de variação das alturas. Os valores aproximados foram respectivamente:

a) 0,08 m^2 e 50%
b) 0,3 m^2 e 0,5%
c) 0,0089 m^2 e 4,97%
d) 0,1 m^2 e 40%

2) A figura 1 mostra os três primeiros intervalos de um histograma que representa a distribuição de uma variável X, acompanhados das respectivas frequências. Se a mediana desses dados é 6,2, determine o valor de t.

Figura 1



Fonte: Iezzi (2004)

3) O histograma abaixo mostra a distribuição de gastos com guloseimas registrada em uma barraca instalada na saída de uma estação de metrô. Por falha de impressão, não aparecem no histograma as frequências relativas aos intervalos de 3 a 5 reais e de 5 a 7 reais. Sabe-se, entretanto, que a média de gastos é R$ 2,80.

Figura 2

Fonte: Iezzi (2004)

Determine os valores relativos às frequências que não aparecem no gráfico. Qual é a variância correspondente?

Referências

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. 11, 1. ed. São Paulo: Atual, 2004.

GOUVEIA, R. **Medidas de Dispersão**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/medidas-de-dispersao/. Acesso em: 05 abr. 2019.

LARSON, R.; FARBER, B. **Estatística aplicada**. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2004.

NACARATO, A. M.; GRANDO, R. C. **Estatística e Probabilidade na Educação Básica - Professores Narrando Suas Experiências**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

OLIVEIRA, P. I. F. **A estatística e a probabilidade nos livros didáticos de matemática no ensino médio**. Porto Alegre, RS: Pontifícia Universidade Católica, 2006.

Princípios de Estatística: Medidas de dispersão. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/estat/basica/pagina7.php. Acesso em: 08 abr. 2019.

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Leonardo dos Santos Batista
Natalia Nascimben Delmondi Munhoz.

Ano escolar: 2º ano do Ensino Médio

Ementa

- Conteúdos Conceituais: Probabilidade. Média. Moda. Mediana. Contagem.
- Conteúdos Procedimentais: Efetuação de cálculos mentais. Anotação precisa dos dados.
- Conteúdos Atitudinais: Definir e seguir regras. Espírito esportivo. Argumentação embasada.

Objetivos

- Desenvolver a capacidade de formulação de regras e adaptar estratégias para atendê-las, utilizando as propostas iniciais do jogo "Probabilidado", para realizar uma análise prática das possibilidades de ocorrência de um evento.
- Desenvolver a prática dos procedimentos de resolução de contagem e probabilidade, sempre visando a significância que os resultados revelam, comparando, argumentando e registrando os resultados obtidos e os esperados com toda a turma.

Em termos de Competências e Habilidades da Matriz do ENEM (BRASIL, 2012):

C1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
- H2: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- H3: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

C4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a
solução de problemas do cotidiano.
- H15: Identificar a relação de dependência entre grandezas.

C6: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
- H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

C7: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
- H27: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
- H28: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
- H29: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
- H30: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Recursos empregados

- Giz/caneta, Lousa, Lápis, Papel, Régua;
- Folhas de EVA de diversas cores;
- Jogo "Probabilidado", contendo: 1 tabuleiro, 4 conjuntos com 15 fichas cada, dois dados e 1 bloco de folhas para anotação das jogadas.
- Peças extras para o Jogo "Probabilidado", a serem elaboradas pelos estudantes.

Atividades

O jogo "Probabilidado" está disponível no Laboratório de Estudos e Práticas em Educação Matemática (LEPEM) da UFABC e é usado para a introdução ao cálculo de probabilidade simples, probabilidades condicionais e ainda nos produtos de probabilidade para dois ou mais eventos independentes.

A escolha desse jogo teve como propósito a fixação de conceitos previamente estudados, por meio de recursos metodológicos que possam fazer com que os estudantes se envolvam mais nas atividades e, consequentemente, apresentem uma aprendizagem com mais significado e sentido. Portanto, a proposta deste plano de aula possui um caráter investigativo (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2013; SERRAZINA, 2017).

Para a realização do jogo, a sala deve ser dividida em grupos de no máximo 4 estudantes. A introdução da tarefa deve ser feita por meio de uma contextualização histórica (BOYER, 2015), com base no trabalho de Viali (2008, p.143-153), sobre o surgimento e desenvolvimento dos estudos sobre probabilidade. O artigo pode ser acessado na íntegra e o docente pode abordar a história da probabilidade da forma que lhe convir. Após essa apresentação histórica, é proposta a seguinte questão:

> *Os primeiros estudos sobre probabilidade ocorreram por volta do século XVI, com o propósito de se obter o melhor resultado possível em jogos. Assim, vamos utilizar um jogo para realizar um estudo sobre probabilidade. Será que apenas cálculos probabilísticos podem determinar o sucesso ou o fracasso em um determinado jogo?*

Após essa introdução com esse questionamento, o professor deve apresentar aos estudantes o tabuleiro e as peças do jogo "Probabilidado", ilustrado na Figura 1.

Figura 1- Jogo "Probabilidado"

Fonte: (MMP, 2019)

O tabuleiro serve apenas de inspiração para que os estudantes elaborem o seu próprio jogo, da maneira que julgarem mais adequada para a sua execução, de acordo com as regras estabelecidas por eles. Assim, cada um dos grupos deve discutir sobre quais regras e qual forma o tabuleiro do jogo deve ter. Os estudantes devem então, construir o tabuleiro e realizar uma partida de acordo com as regras previamente estabelecidas. Após a primeira partida, os estudantes devem discutir sobre possíveis aperfeiçoamentos a serem feitos nas regras e realizar uma nova partida. Finalizadas as partidas, os estudantes devem discutir, dentro de seus grupos, às seguintes questões:

1) Qual das partidas realizadas apresentou a maior probabilidade de vitória? Explique.
2) Os resultados das suas jogadas corresponderam as probabilidades previstas?
3) Compare os seus resultados com o dos seus colegas de grupo. Eles foram semelhantes ou diferentes aos seus?
4) Realize a média, moda, e mediana entre os seus resultados e o dos seus colegas, para cada uma das partidas realizadas.
5) Elabore um gráfico comparando os resultados previstos com os resultados obtidos, para cada uma das partidas realizadas. O tipo de gráfico utilizado deve ser aquele que você julgar mais adequado para apresentar esses resultados.

Após a realização dessas etapas, o professor deve pedir que os estudantes apresentem as reflexões realizadas dentro de cada um dos grupos e retomar o questionamento inicial:

> *Será que apenas cálculos probabilísticos podem determinar o sucesso ou o fracasso em um determinado jogo?*

A discussão a ser conduzida pelo professor deve contemplar que, mesmo havendo uma grande probabilidade de se ganhar o jogo, ela nunca será 100%, pois dessa maneira todos ganhariam, o que não é possível. Logo, existe um fator, em todo jogo, que não pode ser contemplado por análises probabilísticas. Nesse momento, o professor também pode introduzir outras aplicações da probabilidade, como valores de seguros, pesquisas de mercado, pesquisas eleitorais e previsão do tempo.

O professor ainda deve, se for viável, discutir com os estudantes aspectos como os gráficos elaborados, refletindo sobre que tipos seriam os mais adequados para expressar os resultados desejados, e sobre como o tamanho da amostra coletada pode influenciar nos resultados obtidos. Para complementar essa tarefa, os estudantes podem realizar novos cálculos da média, moda e mediana, e elaboração de novos gráficos, com os resultados obtidos por todos os alunos da sala, refletindo sobre se há ou não alterações nos resultados, alterando-se os tamanhos das amostras.

Possível Cronograma das atividades (2 aulas de 50 minutos)

1º momento com duração de 10 minutos:

Teremos uma breve contextualização do surgimento do cálculo da probabilidade seguindo o artigo de Viali (2008, p. p.143-153), que registra eventos como o jogo de Tali, que se assemelhava aos jogos com dados. Para mais relevância, também poderia ser usado, como exemplo, os Bingos, que são apenas jogos de azar.

2º momento com duração de 10 minutos:

Considerando que os alunos já tenham tido o básico de contagem anteriormente, iniciaremos explicando as regras iniciais do jogo “Probabilidado”, e os deixando livres para jogar e registrar suas ideias em pequenos grupos de no máximo 4 pessoas. Planejamos esse momento para retomarmos os conteúdos conceituais e procedimentais definidos, e especificamente estaremos trabalhando: Probabilidade, média, moda, mediana, contagem, realização de cálculos mentais e registro preciso dos dados.

3º momento com duração de 50 minutos:

Como momento central da atividade, os grupos desenvolverão regras para implementação no “Probabilidado”, e elaborar um tabuleiro que se adeque a tais regras. Orientar os alunos para escreverem as regras em suas anotações de forma que elas sejam coerentes com as estratégias adotadas, e também salientar que a cada fim de partida, as regras e o tabuleiro (se necessário) devem ser mudados.

Planejamos nesse momento reforçar os conteúdos anteriores, porém dessa vez com inserção de conteúdos atitudinais como: definir e seguir regras, espírito esportivo, argumentação embasada. Nesse momento, serão trabalhadas as seguintes competências e habilidades da matriz do ENEM (2012): C1 por meio de H2 e H3; C4 por meio de H15; C6 por meio de H24 e H26 e C7 por meio de H27, H28, H29, H30.

4° momento com duração de 30 minutos:

Com os registros em mãos, este momento será dedicado a discussão. Os alunos irão revelar que estratégias adotaram para aumentar suas chances de vitórias e explanar se elas foram suficientes para vencer os adversários. Além disso, serão discutidos os tópicos das questões de 1 a 5, apresentados previamente pelo professor.

Finalizar a discussão lembrando que o perder dessa atividade retoma um tema social, onde todos dentro dos jogos de azar querem ganhar, porém apenas um não perde.

Planejamos, nesse momento, apresentar uma justificativa aos conteúdos anteriores, destacando aspectos que podem não ter sido explorados por todos os alunos. Nesse momento, serão trabalhadas as seguintes competências e habilidades da matriz do ENEM (2012): C6 por meio de H24 e H26; C7 por meio de H27 e H29.

Avaliação

A avaliação será feita de forma contínua, analisando o empenho e desenvolvimento dos alunos ao longo dos 4 momentos, especificamente. Numa escala de 10 pontos, propomos os seguintes critérios para a métrica da avaliação:

- Participação no jogo, na resolução das tarefas e nas discussões em grupos (4 pontos): o professor avaliará o andamento da tarefa e o envolvimento dos estudantes durante a execução dela.
- Registro escrito individual (3 pontos): ainda que o principal objetivo seja que o aluno compreenda a tarefa, ele também deve ser capaz de formalizar suas conjecturas em um registro escrito.
- Envolvimento no processo de elaboração de regras (3 pontos): O desenvolvimento de novas regras irá exigir dos alunos tanto a capacidade argumentativa, quanto a capacidade de analisar o que se deve fazer na próxima partida, sendo um importante passo para a realização completa da tarefa.

Referências

BOYER, C. B. **História da Matemática. 3ª** reimpressão. São Paulo: Blucher, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de Referência ENEM**. 2012. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 07/04/ 2019.

MMP materiais pedagógicos. **Jogo Probabilidado**. Disponível em: https://mmpmateriaispedagogicos.com.br/produto/jogo-probabilidado/. Acesso em: 02/03/2019

PONTE, J. P. BROCADO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de aula**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

SERRAZINA, L. Planificação do ensino e aprendizagem da matemática. **A prática dos professores**: Planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM-Associação de Professores e Matemática, 2017.

VIALI, Lorí. Algumas considerações sobre a origem da Teoria da Probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Rio Claro: v..8, n.16, p. 143-153, 2008.

PROBABILIDADE NO CAMPO MINADO

Adriano de Faria
Paulo Henrique Souza Nakamura

Ano escolar: 2º ano do Ensino Médio.

Ementa

Aleatoriedade. Análise de possibilidades. Cálculo de Probabilidade.

Objetivos

- Introduzir o estudante no cálculo de probabilidades. Em termos de Competências e Habilidades da Matriz do ENEM (BRASIL, 2012):

> C7: Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
> H28: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

- Em termos das Competências Específicas e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), o plano relaciona-se à Competência Específica 3 do Ensino Médio e sua Habilidade 11, a saber:

> Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (p.535-537)
>
> Habilidade 11, denominada (EM13MAT311): Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade" (p.536).

Recursos empregados

- Livro didático.
- Computadores, preferencialmente, ou celulares para o mesmo fim.
- Jogo "Campo Minado" (*software* da Microsoft)

Atividades

O jogo "Campo Minado" foi criado pelos programadores Robert Donner e Curt Johnson para a Microsoft. O programa principal foi escrito por Donner em apenas um fim de semana, baseado em um *script* antigo que Johnson lhe emprestara. O jogo foi incluído no *Windows Entertainment Pack*, uma coleção de jogos casuais em 16 bits, lançado em 8 de outubro de 1990 pela Microsoft, com o objetivo de popularizar o Windows nas residências e pequenas empresas. Além disso, figurou em outras versões do Windows, como o XP e o Vista (WINDOWS MINESWEEPER, 2013).

Figura 1 – Um tabuleiro do jogo virtual.

fonte: Brasil (2009)

Trata-se de um jogo lógico no qual minas (artefatos explosivos) são distribuídas numa malha quadriculada (campo minado). A Figura 1 mostra um tabuleiro virtual do jogo. Para revelar um quadrado (escavar o campo) basta clicar sobre ele com o botão esquerdo do mouse. Feito isso, surgem números nos quadrados que indicam o número de minas que existem nos 8 quadrados adjacentes que o cercam. Para verificar a hipótese de que um quadrado contém uma mina, é só clicar sobre ele com o botão direito do mouse. Caso seja, aparecerá uma bandeira na posição. O objetivo é encontrar todas as minas no menor tempo possível. Para isso, os estudantes devem propor estratégias para atingir o objetivo (WINDOWS MINESWEEPER, 2013). Essas estratégias podem ser construídas com base em probabilidades teóricas de eventos equiprováveis. Esse conteúdo matemático pode já ter sido trabalhado em aula ou não, e o uso do jogo pode ativar essa aprendizagem. A O uso do jogo “Campo Minado” como recurso para a abordagem do cálculo de probabilidades requer uma sobreposição de Tendências em Educação Matemática como o recurso ao uso de jogos (SMOLE et al, 2008), tecnologia digital de comunicação e informação (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014) e história da matemática (MIGUEL et al, 2009), além de ser um problema disparador para atividade investigativa (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013).

Abaixo o roteiro proposto para o trabalho em sala de aula.

1. *Pré-aula*: instalação de um aplicativo do jogo “Campo Minado” nos computadores e solicitação de que os(as) alunos(as) tragam o livro didático sugerido (DANTE, 2010)

2. *Preparação da sala*: os(as) estudantes são organizados(as) em duplas ou trios, sendo que equipes maiores devem ser evitadas, e os computadores são iniciados (sem internet para evitar distrações). A apresentação da atividade envolve uma breve descrição do jogo e sua relação com o conteúdo de probabilidade.

3. *Exploração das regras do jogo*: no nível fácil (com poucos quadrados), os(as) alunos(as) terão tempo para jogarem, a fim de observarem, por tentativa e erro, quais os regras do jogo.

4. *Sistematização das regras*: cada grupo deve discutir sobre a estratégia recomendada para “vencer” (minimizando o tempo de jogo) e registrar em um editor de texto no computador.

5. *Consulta ao material didático*: professor(a) solicita aos(às) estudantes que

observem o conceito de probabilidade no material didático.

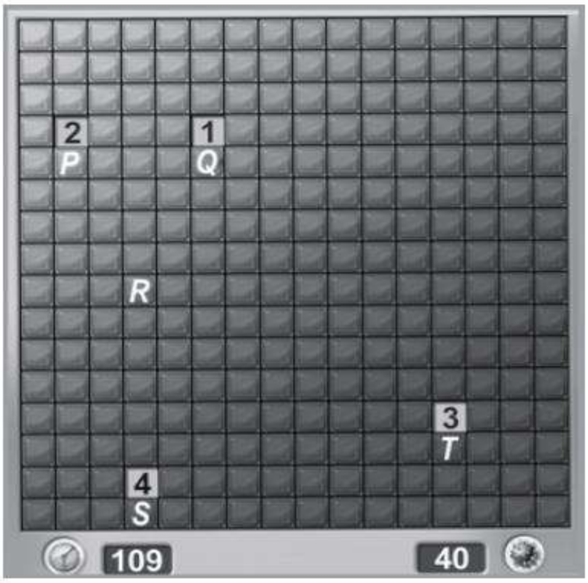
6. *Argumentação matemática*: alunos(as) devem incluir os conceitos e cálculos de probabilidade que apoiem suas recomendações.

7. *Plenária*: docente seleciona algumas recomendações para serem discutidas em sala. Ou, se houver tempo, todas as propostas podem ser discutidas e a sala avaliar a viabilidade das propostas e eleger a mais viável.

8. *Pós-aula*: indicação de uma questão do ENEM 2017 (BRASIL, 2017) sobre o jogo por realizar em sala.

Figura 2 - Questão sobre o jogo “Campo Minado” do ENEM 2017.

A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16 × 16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras *P*, *Q*, *R*, *S* e *T* um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

A *P*.
B *Q*.
C *R*.
D *S*.
E *T*.

Fonte: Inep (2017).

Avaliação

Em uma escala de 10 pontos, a atividade pode ser avaliada em duas partes com igual ponderação como segue:

- Autoavaliação do grupo: baseado em todo o processo: os(as) discentes atribuem uma nota de 0,0 a 5,0, apresentando uma justificativa para a pontuação atribuída.

- O(a) docente indicará uma pontuação considerando a disciplina e o desenvolvimento matemático de cada estudante segundo suas capacidades e desempenho demonstrado por seus instrumentos avaliativos.

Referências

BORBA, M.C.; SILVA, R.S.R. e GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação**. Portal do Professor.** 2009. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1919. Acesso em: 07 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de Referência ENEM**. 2012. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 07 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a base. 2018. p.527-546. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 07 abr. 2019.

DANTE, L.R. **Matemática: contexto e aplicações.** Volume único. 3.ed. São Paulo: Ática, 2010.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Prova de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Prova de Matemática e suas Tecnologias**. ENEM 2017. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_7_prova_azul_12112017.pdf. Acesso em: 07 abr. 2019.

MIGUEL, A. BRITO, A. J., CARVALHO, D. L., MENDES, I. A. **História da Matemática em Atividades Didáticas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

PONTE, J. P. BROCADO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de aula**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I.; PESSOA, N.; ISHIHARA, C. **Cadernos do MATHEMA: Jogos de Matemática de 1º a 3º ano do Ensino Médio.** São Paulo: Artmed, 2008, p. , 9-27.

WINDOWS MINESWEEPER. **Minesweeper wiki**, 2013. Disponível em: http://www.minesweeper.info/wiki/Windows_Minesweeper. Acesso em: 07 abr. 2019.

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA DE UM PROBLEMA MARAVILHOSAMENTE CONFUSO

Marcos Paulo Teodoro de Oliveira

Ano escolar: 2º Ano do Ensino Médio

Ementa

Estudo das relações entre os conteúdos de análise combinatória e probabilidade. Relações causais, diferença entre relação e correlação, leis de contagem e inferência estatística. História da matemática como contextualização e formação de questões geradoras.

Objetivos

- Estabelecer relações entre o desenvolvimento histórico da estatística e da probabilidade através de pequenos fatos históricos.
- Recolher dados e informações, organizá-los, estimar resultados e expressar conclusões valorizando a linguagem estatística de forma a comunicá-los.
- Identificar características de acontecimentos aleatórios e previsíveis, bem como relações de causalidade, utilizando-se de recursos da probabilidade e estatística.
- Compreender a matemática e em específico a probabilidade e estatística como um conteúdo que permeia toda a história humana, construído de forma errática em seus primórdios, bem como seu papel numa era onde há um grande volume de dados disponíveis.
- Identificar a probabilidade e estatística como formas de compreender fenômenos de forma profunda.
- Utilizar diferentes registros gráficos - desenhos, esquemas, escritas numéricas - como recurso para expressar ideias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados.
- Compreender o mundo de maneira crítica, utilizando-se da matemática como ferramenta de apoio para tomada de decisão.
- Compreender as ideias de aleatoriedade da probabilidade e estatística como, fundamentalmente, uma codificação do bom senso.

Em termos de Competências e Habilidades da Matriz do ENEM (BRASIL, 2012):

> C1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
> - H4: Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
> C6: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
> - H26: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
> C7: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas,

determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
- H28: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
- H29: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
- H30: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Recursos empregados

- Jogo/simulador para testar as possibilidades do "Problema de Monty Hall" (SANTOS, 2015), ou então, em substituição, um recurso analógico com o mesmo intuito, contendo 3 "portas" feitas de material comum como um papel cartão, do tamanho de uma carta de baralho. Por de trás de 2 delas um "monstro" desenhado, e apenas atrás de uma delas o prêmio como na Figura 1.
- Bloco de anotações para que os alunos descrevam o experimento.

Atividades

Esta atividade pode ser usada como exemplificação de conteúdos conceituais já estudados, como para introduzi-los de forma prática e ilustrar a enunciação desses conceitos acompanhada de muitas reflexões pelos estudantes. Sugere-se como apoio didático Scheinerman (2003).

Parte 1 – Sobre Indução e Dedução
Iniciar trabalhando o conceito de método indutivo e dedutivo e seu papel na matemática e estatística. É importante fazer a sondagem e entendimento das concepções prévias dos alunos sobre suas impressões de como a matemática funciona. O excerto da Quadro 1 pode ser usado para o debate com os estudantes.

Quadro 1 – Texto para ser usado na discussão sobre método indutivo e dedutivo

SOBRE O MÉTODO INDUTIVO

[...] Galileu foi o precursor da indução experimental; ou seja, do método indutivo. Esse método prevê que pela indução experimental o pesquisador pode chegar a uma lei geral por meio da observação de certos casos particulares sobre o objeto (fenômeno/fato) observado. Nesse sentido, o pesquisador sai das constatações particulares sobre os fenômenos observados até as leis e teorias gerais. Pode-se concluir que a trajetória do pensamento vai de casos particulares a leis gerais sobre os fenômenos investigados. Nessa perspectiva, o exercício metódico do conhecer afirma uma posição indutiva do sujeito em relação ao objeto, na qual a investigação científica é uma questão de generalização provável, a partir dos resultados obtidos por meio das observações e das experiências.
"Todos os cães que foram observados tinham um coração. Logo, todos os cães têm um coração" (Lakatos e Marconi, 2000, p.63 apud Diniz e Silva, 2008, p. 4)

SOBRE O MÉTODO DEDUTIVO

O conhecimento científico procura conhecer, além do fenômeno observado, utilizando-se da razão como caminho para chegar à certeza sobre a verdade do fenômeno investigado. Essa prerrogativa de certeza dada pela razão enquanto princípio absoluto do conhecimento originou-se na obra O discurso do método de René Descartes, que instituiu a dedução como caminho para o conhecimento. O método dedutivo parte das teorias e leis consideradas gerais e universais buscando explicar a ocorrência de fenômenos particulares. O exercício metódico da dedução parte de enunciados gerais (leis universais) que supostos constituem as premissas do pensamento racional e deduzidas chegam a

conclusões. O exercício do pensamento pela razão cria uma operação na qual são formuladas premissas e as regras de conclusão que se denominam demonstração.
"Todo mamífero tem um coração. Ora, todos os cães são mamíferos. Logo, todos os cães têm um coração." (Lakatos e Marconi, 2000, p.63 apud DINIZ e SILVA, 2008, p. 6)

Fonte: Diniz e Silva (2008, p. 3-6)

Parte 2 – Sobre fundamentos do pensamento estocástico: "Viés de Sobrevivência" e Primeira Lei da Probabilidade

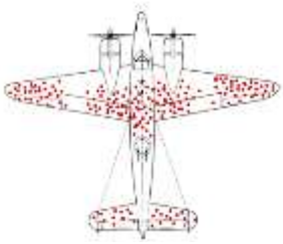
Posteriormente, introduzir conteúdos de história da matemática. Sugerimos um exemplo exposto no Quadro 2, no qual conceitos como frequências, ocorrência, evento, entre outros, podem ser apresentados pelo docente a partir do mesmo texto.

Quadro 2 – Texto para ser usado na discussão sobre conceitos relevantes em Estatística

UM POUCO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA...VIÉS DE SOBREVIVÊNCIA

A seguinte sequência tem como objetivo demonstrar o cerne do pensamento matemático e estatístico, e favorecer uma maior compreensão conceitual. Um dos interesses do uso da História da Matemática no ensino de matemática é a possibilidade de utilizar e mapear a trajetória do desenvolvimento de algum conceito, e desta forma gerar contexto e estabelecer os caminhos pelos quais as pessoas interessadas em matemática precisam trilhar para evoluir em um conhecimento.

Um exemplo interessante é o chamado "Viés da Sobrevivência", onde durante a segunda guerra mundial o exército americano estava interessado em blindar de forma mais efetiva seus aviões, aumentando assim a taxa de sobrevivência em batalhas. Eles identificaram o seguinte padrão nas perfurações à bala nos aviões aos quais eles tinham acesso, como na figura ao lado. A intenção era blindar justamente essas partes onde foram identificadas uma frequência de tiros alta. Porém o estatístico contratado discordou. Ele identificou que como esses aviões eram alvejados a partir do solo, e que isso não garantia uma precisão muito boa, os disparos eram aproximadamente aleatórios. Sendo assim, os aviões eram alvejados em qualquer lugar de sua área. Desta forma, a probabilidade de qualquer pedaço do avião receber um tiro era igual. Se olharmos, portanto, que os aviões que voltavam não apresentavam perfurações em áreas específicas, era preciso, na verdade, reforçar as áreas onde a frequência de tiros dos aviões que voltavam era a menor possível, pois os tiros nessas áreas eram o suficiente para que os aviões fossem derrubados. O maior volume de dados só trazia a informação de quais áreas eram desimportantes o suficiente para serem alvejados várias vezes e ainda assim não serem abatidos. Então as áreas com menos tiros eram as, de fato, vitais.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Vi%C3%A9s_de_sobreviv%C3%AAncia

Este pequeno exemplo demonstra que ao analisarmos probabilidade e estatística de maneira ingênua, podemos enviesar o nosso estudo e desta forma alterar o resultado ao ponto de ele não coincidir com a realidade. Isso demonstra que há métodos e que esses métodos funcionam por que já sobreviveram há diversas situações aparentemente contraditórias e difíceis de resolver, e que isso fez o conhecimento evoluir. Um ponto transversal demonstrado nessa história é a derrubada da ideia de que o conhecimento só avança a partir de trajetórias bastante retilíneas, e que não haja equívocos ou confusões no meio do caminho. Um outro caminho e é que, agora dado o exemplo, podemos nomear os conceitos apropriadamente: "Correlação é diferente de relação", "Ocorrência", "Frequência", "Evento"... Tudo isso à partir de uma história interessante o suficiente para que pareça apenas uma história e haja interesse de que os próprios alunos à repassem, e que desta forma seja possível associar o conceito à algo que gere significado, possibilitando a criação de uma narrativa mais consistente

Fonte: elaborado pelo autor

Parte 3 - Atividade "Testando Estereótipos"

Inicia-se com o pequeno texto adaptado de Mlodnow (2009):

Imaginar uma mulher chamada Flora, de 31 anos de idade, solteira, sincera e muito inteligente, formada em filosofia. Quando estudante, preocupava-se profundamente com discriminação e justiça social e participou de protestos em favor da educação.

Dado este texto, o que é possível aferir, com maior ou menor probabilidade de acertar, sobre o futuro de Flora? A tabela que se apresenta no Quadro 3 dá algumas opções e os alunos devem classificar de 1 a 8, de acordo com sua probabilidade, de modo que 1 represente a mais provável e 8 a mais improvável. A tabela deve ser reproduzida na lousa e um cartão com a mesma tabela será distribuído aos alunos e por eles preenchida.

Quadro 3 – Tabela para a atividade "Testando Estereótipos".

Afirmação	**Classificação de 1 a 8 (1=mais provável; 8=mais improvável)**
Flora participa do movimento feminista.	
Flora é voluntária na AACD	
Flora trabalha numa livraria e faz aulas de ioga.	
Flora é bancária e participa do movimento feminista.	
Flora é professora do ensino fundamental e voluntária na AACD	
Flora é filiada à um partido político.	
Flora é bancária.	
Flora é corretora de seguros.	

Fonte: adaptado de Mlodinow (2009, p.20-21)

Na lousa, o professor irá, após o preenchimento pelos alunos, inserir as pontuações máximas e mínimas que os alunos deram, e iniciar um debate reflexivo sobre quais resultados parecem mais corretos. Após o debate, será introduzida a "*Primeira lei da Probabilidade: a probabilidade de que dois eventos ocorram nunca pode ser maior que a probabilidade de que cada evento ocorra individualmente"* Mlodinow (2009, p.20).

Mlodinow (2009) diz ainda que "se a chance de que Flora seja bancária e participe do movimento feminista for maior que a chance de que ela seja bancária, isso seria uma violação dessa primeira lei da probabilidade" (p.20). Ou seja, se os detalhes que recebemos se adequarem ao nosso estereótipo, tendemos a considerar essas características mais prováveis então, quanto maior o número de detalhes numa situação, mais real ela parecerá e, portanto, consideramos que será mais provável. Tal viés promove frequentemente avaliações injustas em nossa vida e é chamado de “viés de confirmação”, característica onde confundimos a frequência com que somos expostos à algo com a frequência que este algo realmente acontece. A essa problematização podem ser acrescentados outros dados e situações capazes de iluminar o entendimento sobre o contexto apresentado.

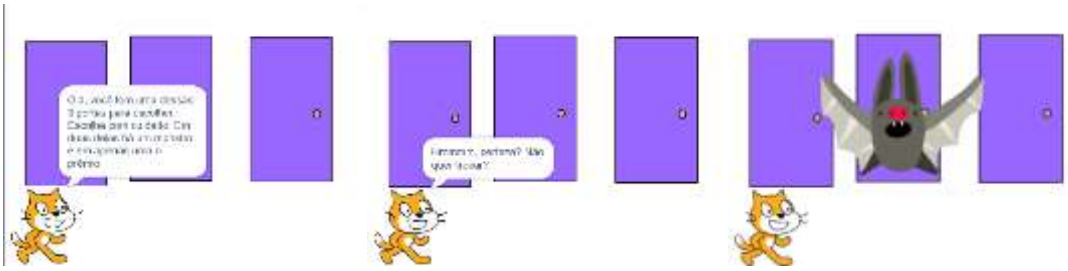
Parte 4 - Lei da Combinação das Probabilidades introduzida a partir do “Problema de Monty Hall”

Inicia-se com o seguinte enunciado adaptado de Santos (2015):

> *Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. O apresentador questiona a certeza do participante e pergunta se a pessoa gostaria de trocar de porta. A troca é vantajosa?*

No Brasil durante a década de 1990 o programa do Sérgio Malandro continha um famoso quadro chamado “A Porta dos Desesperados” (SOLDATELLI, 2016).

Figura 1: Ilustração do jogo da Porta dos Desesperados ou de Monty Hall



Fonte: adaptado de Santos (2015)

Aqui os alunos irão dar suas respostas e, posteriormente, irão testar essas hipóteses e jogarão algumas vezes o material proposto e elaborado para simular o quadro televisivo. Devem anotar os dados obtidos, acertos e erros, bem como se houve ou não troca das portas durante o experimento.

Os alunos formam grupos de 5 pessoas, onde cada aluno fará 10 vezes o experimento e algum aluno representará o apresentador Monty Hall, revezando-se para que todos joguem e sejam apresentadores. Os alunos que não estiverem jogando irão anotar os resultados. É importante que sejam anotados de forma eficiente e organizada, como em uma tabela, indicando se houve ou não troca, e se o participante ganhou ou não o prêmio. Dessa forma cada grupo fornece como dado 50 simulações do quadro. Espera-se que os grupos tenham como conclusão empírica e intuitiva de que a troca da porta fornece maiores chances de premiação, e que a partir da metade da simulação tenham mais trocas do que não trocas de portas.

O objetivo é responder se a troca é vantajosa ou não. Os alunos irão recuperar os dados tabulados e compartilhar entre os demais grupos. Feito isso, irão analisar as estatísticas de acertos e erros e compará-la com o indicado nas probabilidades calculadas. A depender do planejamento e as aulas prévias sobre o assunto, o docente escolherá a melhor forma de introduzir esse cálculo pela *Lei da Combinação de Probabilidades* (Associado ao princípio fundamental da contagem):

Seja dois eventos possíveis, A e B. Se A e B forem independentes, a probabilidade de que A e B ocorram é igual ao produto de suas probabilidades individuais.

Ver o material de apoio no Quadro 4.

Quadro 4 – Material de apoio para a resolução do "Problema de Montey Hall"

Para iniciar o entendimento intuitivo do problema, escolhemos, por exemplo, a porta de número 1. O espaço amostral, neste caso, é a lista dos três resultados possíveis: O carro está atrás da porta 1. O carro está atrás da porta 2. O carro está atrás da porta 3. Cada uma dessas possibilidades tem probabilidade de 1/3. Como estamos pressupondo que a maior parte das pessoas preferiria o carro, a primeira possibilidade é a vencedora, e nossa chance de ter feito a escolha certa é de 1/3. Quando o apresentador abre a porta sem o prêmio, ao abrir essa porta, o apresentador usou seu conhecimento para evitar revelar o carro e, portanto, não se trata de um processo completamente aleatório.

Temos dois casos a considerar. O primeiro é aquele em que nossa escolha inicial foi correta (Chute Certo). O apresentador vai agora abrir aleatoriamente a porta 2 ou a porta 3, e, se decidirmos mudar nossa escolha, perderíamos. e o primeiro chute realmente fosse o certo, seria melhor não mudarmos nossa escolha – mas a probabilidade de que caiamos no caso do Chute Certo é de apenas 1/3. É importante então considerarmos que não acertamos o primeiro chute (Chute Errado). Com uma chance de errarmos nosso chute como sendo de 2/3, a probabilidade de errarmos é duas vezes mais provável que a de acertarmos. Como o apresentador escolhe, propositadamente abrir uma das portas sem o carro de prêmio, ocorre uma intervenção no processo, até agora, aleatório.

Resumindo: se estivermos no caso do Chute Certo (probabilidade de 1/3), ganharemos se mantivermos nossa escolha. Se estivermos no caso do Chute Errado (probabilidade de 2/3), devido à ação do apresentador, ganharemos se mudarmos nossa escolha. Como saber então em qual dos dois casos nos encontramos? Demos o primeiro chute certo ou o primeiro chute errado? A chance de que estejamos no caso do Chute Errado é duas vezes maior que a do Chute Certo, portanto, é mais sábio mudarmos a escolha. É mais provável estarmos errados do que certo, e a escolha acertada é sempre a mais provável.

Uma possibilidade de intervenção é considerar então um número maior de portas, e assim convencer os alunos. Suponha 100 portas agora. Ainda escolhemos a porta 1, mas agora temos uma probabilidade de 1/100
de estar certos. Por outro lado, a chance de que o prêmio estar atrás de uma das outras portas é de 99/100.

Formalização da resolução utilizando árvore de tomada de decisões, probabilidade condicional com cálculo direto, com uso do Teorema de Baye:

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

Sendo

- A1: Porta 1 escolhida e prêmio na porta 1.
- A2: Porta 1 escolhida e prêmio na porta 2.
- A3: Porta 1 escolhida e prêmio na porta 3.

$P(Ai) = 1/3$

Se o Evento B é a abertura da porta A2, as probabilidades condicionais são:

$P(B|A1) = 1/2$; $P(B|A2) = 0$ (As regras o impedem de abrir a porta A2); $P(B|A3) = 1$

Fonte: adaptado de Santos (2015)

Avaliação

Um dos pontos importantes para a avaliação é a forma com que os dados serão contabilizados, analisados e trocados entre os grupos. Espera-se que os grupos não anotem tudo de forma idêntica, porém, caso as anotações estejam organizadas, será possível traduzir os dados a partir de configurações diferentes de anotações. Uma melhor escolha de métodos é considerada parte da avaliação.

Coerência na apresentação dos resultados. É esperado que apresentem os dados também, quando cabível, em termos de porcentagens, ou gráficos, ou frações, e que o resultado seja justificado levando em conta o conteúdo apresentado.

Compreender intuitivamente a vantagem na troca das portas durante a etapa de simulação do jogo no "Problema de Monty Hall" e compreender matematicamente os motivos da vantagem na troca das portas.

Relacionar a quantidade de dados obtidos com a precisão na representação da realidade a partir da estatística e que, de acordo com a lei dos grandes números, um maior número de dados implica numa maior aproximação da probabilidade calculada com os dados obtidos experimentalmente.

A análise crítica dos resultados por parte dos alunos e a capacidade de reavaliação de crenças acerca dos fenômenos estatísticos e probabilísticos, e não necessariamente o inicial, é o principal foco avaliativo desta atividade.

Como avaliação escrita, cada aluno deve entregar anotações contendo o que compreendeu sobre o tema e exemplos abordados. Esta avaliação tem caráter formativo, e pode ser utilizada pelo docente para compreender o impacto desses conteúdos na compreensão de ideias muitas vezes confusas.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de Referência ENEM**. 2012. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 7 abr. 2019.

DINIZ, C.R.; SILVA, I.B. **Metodologia científica**. Campina Grande; Natal: UEPB/UFRN - EDUEP, 2008. Disponível em: http://ead.uepb.edu.br/ava/arquivos/cursos/geografia/metodologia_cientifica/Met_Cie_A04_M_WEB_310708.pdf. Acesso em: 16 abr. 2019.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado**: como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

SANTOS, L. G. dos. **O problema de Monty Hall: Uma abordagem introdutória para o estudo da Probabilidade Condicional**. Dissertação de Mestrado Profissional. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2015.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta: Uma Introdução**. Brasil: Cengage Learning, 2003.

SOLDATELLI, A. O paradoxo da posta dos desesperados. **Scientia cum industria**, v.4, n.4, p. 228—231, 2016.

PROBABILIDADE

Bruno Barbosa de Oliveira

Ano escolar: 2º ano do Ensino Médio

Ementa

Introdução à probabilidade. Experimento aleatório. Espaço amostral. Evento.

Objetivos

Desenvolver os conceitos das ementas.

Recursos empregados

Um par de dados para cada dupla e fichas-problema com questões relacionadas ao conteúdo de probabilidade.

Atividades

As atividades aqui propostas foram inspiradas a partir das leituras feitas em Borin (2004) e Lopes (2006; 2007). O plano de aula é dividido em duas etapas sendo que cada uma corresponde a um conjunto de tarefas a serem desenvolvidas num total de duas aulas de 45 min cada aula.

Etapa 1 – Introdução à probabilidade

Nesta parte espera-se que estudante desenvolva a compreensão do conceito de probabilidade e a utilize para identificar as melhores estratégias do jogo proposto na atividade. Os objetivos serão atingidos por meio do uso de material manipulativo (um par de dados) e a ficha-problema 1 (Quadro 1), onde os alunos, após jogarem, devem preencher as informações solicitadas, investigar as situações e resolver os problemas (propostos na ficha). Para essa primeira etapa os alunos devem ser divididos em duplas. Cada dupla recebe um par de dados de 6 faces e a ficha-problema 1, mostrada no Quadro 1.

O professor deve explicar as seguintes regras do jogo para os alunos: em cada dupla, os alunos jogadores são adversários. Eles devem decidir por conta própria qual dos dois inicia o jogo. Em seguida, os alunos devem convencionar um modo de lançar os dados, e esse modo deverá ser utilizado em todas as etapas. O jogador que iniciar deve efetuar o primeiro lançamento dos dois dados simultaneamente e ao visualizar as faces ele será pontuado conforme os valores para as faces obtidas, conforme o Quadro 2.

Quadro 1 - Ficha-Problema 1

Leiam atentamente antes de preencher a ficha. A ficha deve ser preenchida depois de decidir qual dos dois alunos começará o jogo. Após decidirem, preencham os dados abaixo.

Nome do Aluno A (Primeiro jogador): ____

Nome do Aluno B (Segundo jogador): ____

Após jogarem, anotem a pontuação obtida em cada campo. Caso algum jogador não tenha efetuado o segundo lançamento (por opção) este deve marcar um X no campo para isso.

Aluno A (Primeiro jogador)

Primeiro lançamento_______

Segundo lançamento_______

Aluno B (Segundo jogador)

Primeiro lançamento_______

Segundo lançamento_______

Responda as duas questões seguintes:

1 – O Aluno A sempre deverá aproveitar o segundo lançamento? Por quê?

2 – O Aluno B possui maior possibilidade de vencer o jogo? Por quê?

Responder as questões abaixo apenas quando o professor solicitar.

3 – Agora, após a explicação do professor, responda se o Aluno A adotou a melhor estratégia ou não e justifique.

4– Apresente uma alteração nas regras do jogo que solucione a problemática discutida pelo professor com relação à questão 2.

5 – Considere que um dos jogadores conheça as melhores estratégias (discutidas nas questões anteriores), isso garante sua vitória? Por quê?

Fonte: elaborado pelo autor

Quadro 2 - Pontuações relativas às faces do dado.

Faces	Pontuação
(1,4) ou (4,1)	1
(4,2) ou (2,4)	2
(4,3) ou (3,4)	3
(4,4)	4
(4,5) ou (5,4)	5
(4,6) ou (6,4)	6

Fonte: elaborado pelo autor

É possível verificar que todas as possibilidades que pontuam contêm a face 4, logo, se não obter nenhuma face 4 o jogador não marca ponto. Nesse caso, ele realiza um segundo lançamento e tenta conseguir uma pontuação. Mas, se ele consegue alguma pontuação no primeiro lançamento, ele tem duas escolhas:

1) Pode tentar melhorar sua pontuação efetuando o segundo lançamento e a pontuação deste, se não for zero, substituirá obrigatoriamente a pontuação que ele havia obtido no primeiro lançamento.

2) Pode abster-se do segundo lançamento e manter a pontuação obtida no primeiro. Caso a pontuação do segundo lançamento seja zero é mantida a pontuação do primeiro lançamento.

O segundo jogador deve obedecer às mesmas regras. Em caso de empate, repete-se o procedimento.

Após conhecerem as regras, os alunos devem jogar uma vez e preencher a ficha-problema 1 e, em seguida, o professor deve discutir as respostas dos alunos com base numa situação hipotética, colocada por meio da sequência seguinte sobre cada questão respondida.

Sobre a questão 1- Se o jogador obtém 1 ponto no primeiro lançamento, ele não pode piorar sua pontuação, logo deve lançar o dado. Caso o jogador 1 obtenha 3 pontos no primeiro lançamento, ele terá uma chance em 6 de manter a mesma pontuação, duas chances em 6 de piorar sua pontuação (obtendo face 1 ou 2), e 3 chances em 6 de melhorar sua pontuação (obtendo face 4, 5 ou 6).

Sobre a questão 2 - O jogador 2 possui vantagem, pois conhece os resultados do primeiro e consegue aproveitar melhor seu segundo lançamento.
Após a discussão desencadeada acima, o professor solicita aos alunos responderem às questões 3 a 5 e entregarem a ficha. Espera-se dos alunos o que segue para essas três próximas questões:

Sobre a questão 3- Que os alunos saibam identificar e justificar as probabilidades que caracterizem a melhor estratégia com base nos resultados obtidos.

Sobre a questão 4 - Que os alunos verifiquem a possibilidade de alternar os lançamentos entre os jogadores, retirando a desvantagem do jogador 1.

Sobre a questão 5 - Que os alunos reflitam sobre a diferenciação de possibilidade e certeza e que a probabilidade é na verdade um valor numérico que quantifica essa possibilidade. Portanto, mesmo sabendo que determinado evento tenha maior probabilidade, isso não garante a vitória. Para essa questão não é esperado um resultado correto e, sim, que o aluno reflita. O fato de cobrar que o aluno escreva isso irá instigar a discussão em dupla, até porque, existem diversas linhas de interpretações em vários âmbitos, como filosóficos, por exemplo, do que seria a probabilidade, e devido a isso seria difícil categorizar determinadas interpretações como incorretas. Além disso, o aprofundamento nessas questões será feito no decorrer do estudo.

Etapa 2 - Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Nesta parte espera-se que o estudante desenvolva a compreensão dos conceitos de experimento aleatório, espaço amostral e evento e os utilize para identificar as melhores estratégias do jogo proposto na atividade. Os objetivos serão atingidos por meio de material manipulativo, que será um par de dados e a ficha-problema 2, onde os alunos, após jogarem, devem preencher os dados solicitados e investigar as situações com objetivo de resolver os problemas. Os alunos devem ser divididos em dupla. O primeiro aluno deve efetuar um lançamento e anotar a pontuação na ficha-problema 2 (Quadro 3). Caso, nesse lançamento, não consiga pontuação deve repetir o lançamento até obter qualquer pontuação diferente de zero. Em seguida, o segundo aluno deve efetuar um lançamento e obter um valor qualquer de pontuação, porém, além de não poder ser zero, também deve ser diferente da pontuação obtida pelo primeiro aluno. Do mesmo modo, caso obtenha zero ou pontuação igual à do primeiro aluno, deve fazer outros lançamentos até obter o que se pede.

Quadro 3 – Ficha-Problema 2

Leiam atentamente antes de preencher a ficha. A ficha deve ser preenchida depois de decidir qual dos dois alunos começará o jogo. Após decidirem, preencham os dados abaixo.

Nome do Aluno A (Primeiro jogador): ____

Nome do Aluno B (Segundo jogador): _______________________________________

O primeiro jogador deve fazer um lançamento e anotar a pontuação obtida no campo indicado abaixo. Caso obtenha a pontuação zero, repetir o lançamento até encontrar um valor diferente de zero. Em seguida o segundo jogador deverá efetuar o lançamento e registrar uma pontuação com valor diferente de zero e também diferente da pontuação obtida pelo primeiro jogador.

Aluno A (Primeiro jogador) - Pontuação obtida ___________

Aluno B (Segundo jogador) - Pontuação obtida ___________

1 – De modo geral, qual das duas pontuações obtidas tem maior chance de acontecer? Por quê?

Responder as questões abaixo apenas quando o professor solicitar.

2 – Considere uma partida envolvendo apenas um lançamento por parte de cada jogador. Considere que o primeiro jogador tenha conseguido 4 pontos em seu lançamento. O segundo jogador tem maior chance de empatar ou de vencer? Porquê?

3 – Em um primeiro lançamento, o jogador tem mais chances de fazer alguma pontuação ou de não marcar nenhuma pontuação? Por quê?

Fonte: elaborado pelo autor

Após isso, os alunos irão compartilhar as respostas dadas para a Questão 1. Após um tempo de discussão entre as duplas, o professor irá fazer a intervenção, tomando como exemplo algumas das respostas dos alunos e, então, irá abordar alguns aspectos, sendo eles:

1º aspecto - No lançamento de dados, não é possível descobrir o resultado (Experimento aleatório).

2º aspecto - É possível fazer uma descrição dos resultados possíveis (Espaço amostral).

3º aspecto - Cada caso que gera uma pontuação corresponde a um dos resultados possíveis do espaço amostral (Evento).

Ou seja, o professor deverá aqui conceituar Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento, tendo como ponto de partida o resultado obtido na tarefa investigativa do aluno para atingir a formalização. Para essa etapa o professor poderá tomar como referencial teórico os artigos descritos nas referências deste plano (BORIN, 2004; LOPES, 2006; 2007) ou algum livro didático (DANTE, 2010)

Em seguida, os alunos estarão aptos a responder com maior consistência as Questões 2 e 3, onde espera-se que:

Sobre a questão 2 - o aluno consiga verificar que no espaço amostral proposto, a possibilidade de empatar é 1 em 36 (conforme pode ser visualizado na Figura 1, destacado em amarelo); enquanto a possibilidade de vencer, ou seja, tirar mais que 4 pontos representa 4 chances em 36 resultados possíveis (representado em vermelho na imagem da Figura 1).

Figura 1 - Espaço amostral, destacando possibilidades de empate e tirar mais que 4 pontos.

	Dado 2						
	Faces	1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: elaborado pelo autor

Logo o aluno deve concluir que a probabilidade de vencer é maior do que de empatar.

Sobre a questão 3 - Espera-se que o aluno possa verificar que as possibilidades de não fazer nenhuma pontuação equivalem a 25 em 36 (ilustrado em verde na Figura 2). Porém as chances de fazer pontuação correspondem a 11 em 36 (ilustrado em azul na Figura 2), logo, há mais chances de não fazer nenhuma pontuação do que fazer alguma pontuação.

Figura 2 - Espaço amostral, destacando as possibilidades de não fazer nenhuma pontuação e de fazer alguma pontuação.

	Dado 2						
	Faces	1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: elaborado pelo autor

Avaliação

A avaliação será feita nas fichas problema em dois momentos. O primeiro momento avaliativo ocorre na etapa investigativa. O segundo momento avaliativo ocorre na análise das respostas registradas nas fichas. O que deve ser avaliado é a participação e engajamentos dos alunos durante a etapa investigativa e se as respostas para as questões do primeiro momento demonstram que os alunos realmente se empenharam em investigar as possíveis soluções. Quanto às respostas das fichas, será avaliado se após a atividade investigativa, os alunos se apropriaram dos conceitos apresentados e puderam responder às questões de modo mais consistente.

Referências

BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas:** Uma estratégia para as aulas de matemática. 5. ed. CAEM - IME/USP: São Paulo: 2004.

DANTE, L.R. **Matemática: contexto e aplicações.** Volume único. 3.ed. São Paulo: Ática, 2010.

LOPES, J. M. Conceitos básicos de Probabilidade com Resolução de Problemas: Relato de uma experiência. **Revista do Professor de Matemática.** Sociedade Brasileira de Matemática: v. 59, p. 41-45, São Paulo, 2006.

LOPES, J. M. - Probabilidade condicional por meio da resolução de problemas. **Revista do Professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, v. 62, p. 34-38, São Paulo, 2007.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA E DE DISPERSÃO EM ESTATÍSTICA

Vinicius Teodoro Ferreira

Ano escolar: 3º ano do Ensino Médio

Ementa

- Medidas de posição (média, moda e mediana) e
- Introdução a medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão).

Objetivos

- Instigar os alunos à ação durante a atividades investigativa;
- Aprimorar seus conhecimentos sobre obtenção, organização e análise de dados;
- Aprofundar, potencializar e consolidar as ideias já conhecidas sobre conteúdos fundamentais da estatística (média, moda, mediana, desvio padrão e variância

Recursos empregados

- Fita métrica
- Régua
- Prancheta para coleta de dados

Atividades

1.Introdução

A estatística constitui um ramo de grande relevância dentro da Matemática, trazendo consigo aspectos fundamentais para as atividades humanas, em especial aquelas que encontram na informação a chave para o seu desenvolvimento. Segundo a BNCC, para o desenvolvimento de habilidades relativas à Estatística, os estudantes devem não apenas interpretar estatísticas divulgadas pela mídia, mas, sobretudo, planejar e executar pesquisa amostral, interpretando as medidas de tendência central, e de comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, incluindo representações gráficas adequadas. O estudo da estatística visa levar os estudantes a serem capazes de lidar com a informação e extrair o que há de mais importante, refletindo criticamente diante dos fatos.

A investigações matemáticas torna-se um facilitador do processo de ensino-aprendizagem da estatística, sendo capaz de colocar os estudantes no centro do processo e faze-lo aprender em meio a sua própria prática. Dessa forma, propõe-se nesse plano de aula o uso de uma atividade de caráter investigativo, envolvendo os conceitos de estatística. Para tornar esse momento significativo, a ideia é colocar os estudantes em ação, pois dar aos estudantes a oportunidade de produzir seus próprios dados e encontrar os resultados, ajuda-os no seu próprio aprendizado.

A proposta é usar entre uma ou duas aulas para realizar toda a sequência aqui proposta, a depender do ritmo dos estudantes.

3. Descrição das atividades

1.ª Etapa - Introdução à atividade investigativa (2 min)

Comece a aula explicando para os estudantes que eles farão uma atividade investigativa em sala de aula. Questione os estudantes se eles sabem o que é uma atividade investigativa e como eles imaginam que será a aula.

"Como vocês imaginam que é uma atividade investigativa em sala de aula? Quais as expectativas de vocês quando falamos em atividade investigativa?"

2.ª Etapa – Arranque da aula: Entendimento do que se espera da atividade (8 min)

Divida os estudantes em grupos de 4 integrantes e explique que a atividade envolverá a participação de todos os integrantes do grupo.

Peça ao grupo que se organize para coletar dados de algumas pessoas da escola. Os dados podem ser dos próprios estudantes, dos professores, dos funcionários, de estudantes de outras séries, etc. O importante é que no final da coleta de dados, todas as informações estejam registradas.

No total deverão ser coletadas informações de 10 pessoas diferentes. Os dados que os estudantes deverão coletar são os seguintes:

- Nome da pessoa
- Altura (m)
- Peso (kg)
- Idade (anos)
- Tamanho da palma da mão (cm)

Disponibilize os instrumentos de medida e os materiais para os estudantes (Régua, fita métrica, prancheta e folha de atividade – Anexo 1). Oriente os estudantes que usem os instrumentos de medica disponíveis para coletar os dados pedidos.

No caso do nome, peso, e idade, os estudantes devem perguntar para a pessoa que estiverem pesquisando, já os dados de altura e tamanho da palma da mão devem ser medidos no momento da coleta de dados com a ajuda dos instrumentos disponíveis.

Distribua uma folha de atividade que contenha a seguinte tabela – Parte 1 – Coleta de dados (Anexo 1):

Tabela 1: dados coletados

Nome	Altura (m)	Peso (Kg)	Idade (anos)	Palma da mão (cm)

Explique para os estudantes que eles devem levar essa tabela para escrever todos os dados coletados nela. No final da coleta de dados, todos os dados das 10 pessoas pesquisadas deverão estar registrados na folha.

O tempo de coleta de dados é de 20 minutos. Oriente para que os alunos se organizem para coletarem os dados no tempo determinado. Antes de iniciar a atividade pergunte aos estudantes se eles têm alguma dúvida em relação ao que eles precisam fazer. Se tudo estiver esclarecido, siga para a próxima etapa para iniciar a coleta de dados dos estudantes.

3ª Etapa – Desenvolvimento do Trabalho (Coleta dos dados) - (25 min)

Nesse momento os estudantes farão a coleta de dados na escola. Reserve 20 minutos do tempo para que eles coletem todos os dados.

Após retornarem para a sala de aula, oriente que transcrevam os dados coletados para a tabela na lousa que você (professor) deverá elaborar enquanto os alunos estiverem coletando os dados. Deixe que os próprios alunos escrevem os dados na tabela.

Todos os grupos deverão transcrever os dados na tabela do professor. Após a tabela preenchida o professor deve fazer alguns questionamentos quanto a coleta de dados. Esses questionamentos estarão na folha de atividade que contém a tabela previamente distribuída.

“Quais foram as dificuldades que vocês encontraram?”

“Os instrumentos de medidas foram suficientes para a coleta?”

"Qual foi a reação das pessoas quando foram abordadas?”

Peça que cada grupo responda cada uma das questões propostas para toda a sala.

4ª Etapa – Cálculo e análise dos dados coletados

Após a tabela preenchida, é hora de calcularmos alguns dados estatísticos. A partir dos dados coletados na tabela, peça para que os alunos respondam os questionamentos a seguir.

1) Qual a altura média do grupo pesquisado?
2) Qual o peso médio do grupo pesquisado?
3) Qual a mediana das alturas?
4) Qual a moda da idade dos integrantes do grupo?
5) Será que a altura média encontrada corresponde, de fato, a altura de todos os integrantes?
6) Você sabe qual é a altura média do brasileiro e o tamanho da palma? Pesquise agora na internet.

A última pergunta dessa fase da atividade busca saber dos alunos se a altura média do grupo, que eles haviam encontrado, de fato, correspondia à altura de todos os integrantes e a da população brasileira. Esse questionamento teve o objetivo de motivar os alunos a compreenderem a validade dos próximos conceitos a serem trabalhados, isto é, as medidas de dispersão (variância e desvio padrão).

Comente e faça uma introdução sobre o Desvio Padrão.

O desvio padrão é uma medida que expressa o grau de dispersão de um conjunto de dados. Ou seja, o desvio padrão indica o quanto um conjunto de dados é uniforme. Quanto mais próximo de 0 for o desvio padrão, mais homogêneo são os dados.

Por último, peça para que os alunos calculem o desvio padrão da altura coletadas. Faça questionamentos do que aquele valor representa na prática.

Com o dado da altura média do brasileiro, discuta com os estudantes se o valor está próximo ou não dos que eles encontraram. Como eles imaginam o Desvio Padrão da altura média da população Brasileira?

6ª Etapa – Ficha de avaliação e encerramento

Para encerrar a aula, peça para que os alunos respondam as questões da parte final da atividade (Ficha de avaliação). A ficha contém questões auto avaliativas sobre a aula da investigação matemática e propõe.

- Como você considera a oficina realizada sobre estatística?
- Você acha importante o estudo da estatística?
- Você sentiu dificuldades com os temas tratados na oficina?
- Após essa oficina, como você vê a estatística?

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Curricular** – Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 17 abr. 2019.

LOPES, C. E. Educação Estatística no Curso de Licenciatura em Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 901-915, dez. 2013.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações matemáticas na sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

SILVA, A. E., SOUZA, E. L., VALENTINI, M. P. O ensino de estatística por meio da investigação matemática: Um relato e reflexão de experiência. **V CONEDU – Congresso Nacional de Educação** - 2018

Anexo 1:

Parte 1 – Coleta de dados

1. Colete uma amostra de 10 elementos das informações contidas na tabela abaixo:

Nome	Altura (m)	Peso (Kg)	Idade (anos)	Palma da mão (cm)

Questões para discutirmos em sala:

- Quais foram as dificuldades que vocês encontraram?
- Os instrumentos de medidas foram suficientes para a coleta?
- Qual foi a reação das pessoas quando foram abordadas?

Parte 2 – Calcular dados

2. Calcule os dados pedidos abaixo:
   A) Qual a altura média do grupo pesquisado? ___________________
   B) Qual o peso médio do grupo pesquisado? ___________________
   C) Qual a mediana das alturas? ___________________
   D) Qual a moda da idade dos integrantes do grupo? ________________
   E) Qual a média da palma da mão do grupo pesquisado? ________________
   F) Será que a altura média encontrada corresponde, de fato, a altura de todos os integrantes? Comente sua resposta
   G) Você sabe qual é a altura média do brasileiro e o tamanho da palma? Como você faria para descobrir?
   H) Calcule o desvio padrão da altura dos dados que você coletou? O que esse valor significa?

$$\textit{desvio padrão amostral} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

Parte 3 – Ficha de Avaliação

3. Responda os itens abaixo:

A) Como você considera a oficina realizada sobre estatística?
( ) Ruim ( ) Regular ( ) Boa ( ) Ótima

B) Qual o grau de importância que você considera o estudo da estatística na sua vida?
( ) Não é importante ( ) Mais ou menos importante ( ) Importante
( ) Muito importante

C) Você sentiu alguma dificuldade nos temas tratados na oficina?
D) Após essa oficina, como você vê a estatística?

Formas previstas de avaliação

- Os alunos serão avaliados pela participação em aula nas atividades em grupo
- Participação durante a atividade de coleta e análise dos dados
- Entrega da Atividade (Anexo 1) com as questões respondidas – uma por Grupo

ESTATÍSTICA: MEDIDAS DE TENDÊNCIA E DE DISPERSÃO

Bruno Bittner Castilho

Ano escolar: 3º ano do Ensino Médio

Ementa

Estatística: Medidas de tendência central, Média, Mediana, Moda.

Objetivos

Auxiliar na compreensão, manipulação, construção e fixação de conceitos estatísticos, através de jogos e de situações-problema.

Recursos empregados

Utilizaremos o recurso de jogos nas duas atividades investigativas, de modo a colaborar com um processo de ensino-aprendizagem construtivista, através de conjecturas e discussões, advindas da execução dos jogos, e das soluções propostas para as situações-problema. Utilizaremos também conceitos da metodologia freiriana, como o rompimento das aulas expositivas, a democratização da fala, de modo a promover a autonomia dos alunos na construção de seu saber ao colocar o professor no papel de mediador.

Atividades

Atividade 1

O Jogo dos 3Ms

(LOPES, CORRAL e RESENDE, 2012)

1 – Material
O jogo utiliza 36 cartas de um baralho comum numeradas de 2 a 10, com quatro cartas de cada número e uma folha de papel para anotações das jogadas. Para este jogo utilizamos apenas o número da carta e não o naipe.

2 – Objetivo
Obter o maior número de pontos. As pontuações serão obtidas em função dos maiores valores de uma das medidas de posição, dentre a média, a mediana ou a moda. Em cada rodada um dos jogadores escolhe qual dessas medidas de posição será utilizada.

3 – Regras

3.1 - Pode ser jogado por dois, três ou quatro jogadores. Cada partida consiste de três rodadas. Para cada rodada serão distribuídas no sentido anti-horário cinco cartas para cada jogador. A partir dessas cartas cada jogador irá calcular a média, a mediana e a moda referente aos números das cinco cartas. Os valores da média, da mediana e da moda correspondem às pontuações do jogador naquela rodada;

3.2 - A rodada se inicia com o primeiro jogador que recebeu as cartas. Em cada rodada o jogador tem a opção de comprar até duas cartas, uma de cada vez, do maço ou dentre aquelas já descartadas sobre a mesa, porém terá que descartar uma carta para cada carta comprada;

3.3 - Depois de realizada a operação de compra e descarte de cartas, cada jogador retira uma carta do maço, aquele que retirou a maior carta escolhe a medida de posição para a pontuação daquela rodada. Caso ocorram empates a operação é repetida dentre aqueles que empataram até que se defina quem vai escolher a medida de posição;

3.4 - Para finalizar a rodada, todos expõem as cinco cartas sobre a mesa com os valores já calculados e anotados em uma folha de papel para as três medidas de posição: média, mediana e moda. Quando as cinco cartas são diferentes, então a moda não existe; ou seja; o conjunto é amodal, e neste caso, a pontuação do jogador para a medida moda será convencionada como sendo igual à zero nesta rodada. Será desclassificado da rodada o jogador que calculou de maneira incorreta o valor de alguma das medidas de posição;

3.5 - Após a realização de cada rodada os jogadores serão classificados em primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar, dependendo da pontuação obtida. O jogador que obteve o maior valor para a medida de posição é classificado em primeiro lugar e recebe três pontos, o segundo colocado recebe dois pontos, o terceiro colocado recebe um ponto e o último colocado não recebe pontuação naquela rodada. Caso ocorram empates, cada jogador receberá a pontuação correspondente à sua classificação. Após a realização da terceira rodada, os pontos obtidos em cada rodada serão somados, e vence o jogo aquele jogador que obteve o maior valor.

Para uma melhor compreensão, apresentamos a seguir uma simulação de partida do Jogo dos 3Ms entre dois jogadores.

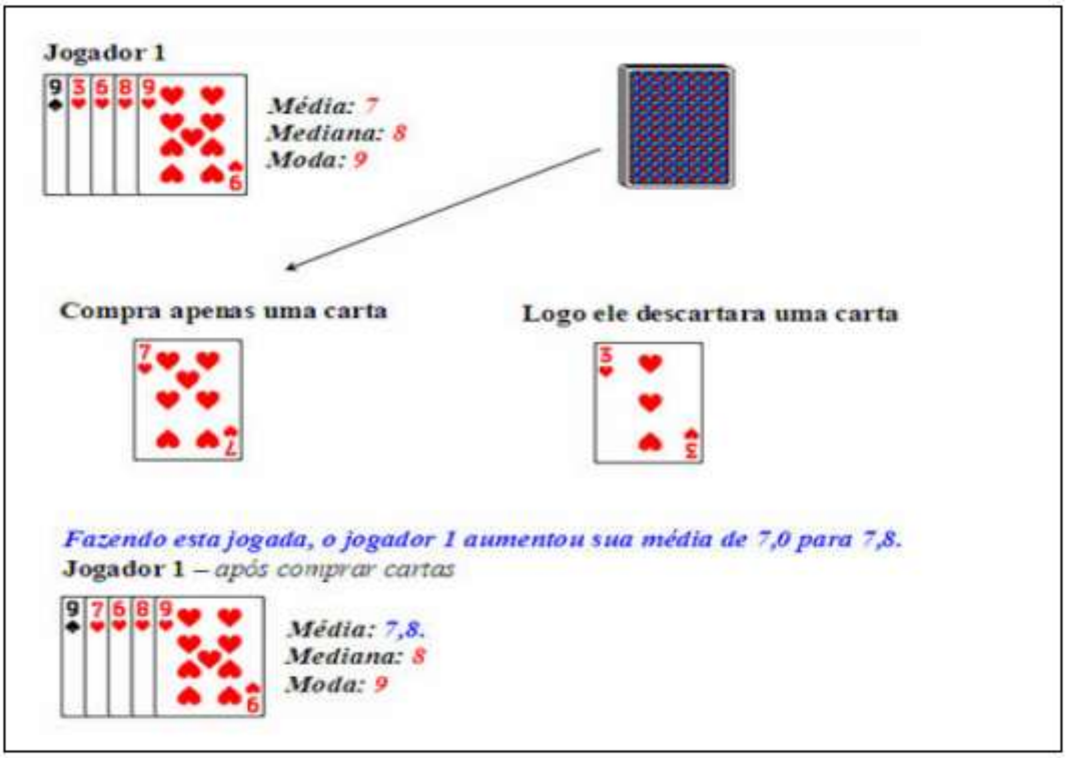
(i) Distribuição de cartas e cálculo das medidas de posição
Cada jogador recebe cinco cartas das quais deve calcular a média, a mediana e a moda dos números das cartas em mãos (Figura 1).

Figura 1 - Cálculo da média, mediana e moda

Fonte: (LOPES, CORRAL e RESENDE, 2012)

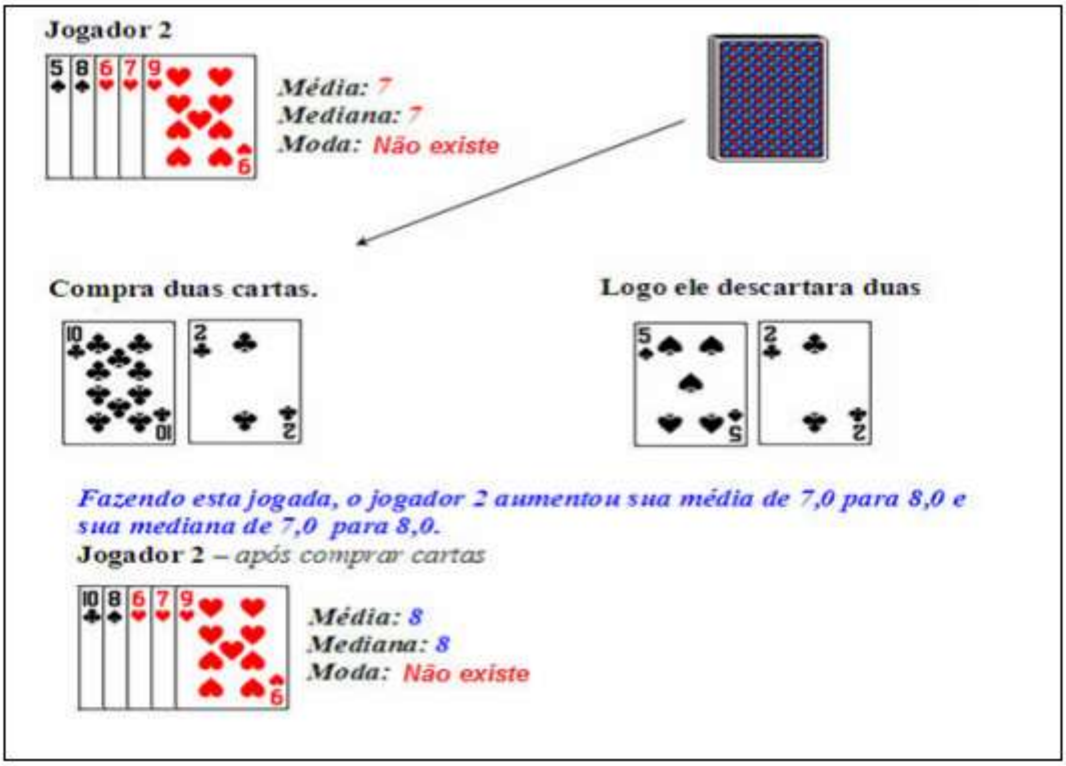
(ii) Comprando cartas
Cada jogador tem a opção de comprar uma ou duas cartas do maço ou da mesa, porém, para cada carta que ele comprar deverá também descartar uma carta (Figuras 2a e 2b).

Figura 2a



Fonte: (LOPES, CORRAL e RESENDE, 2012)

Figura 2b

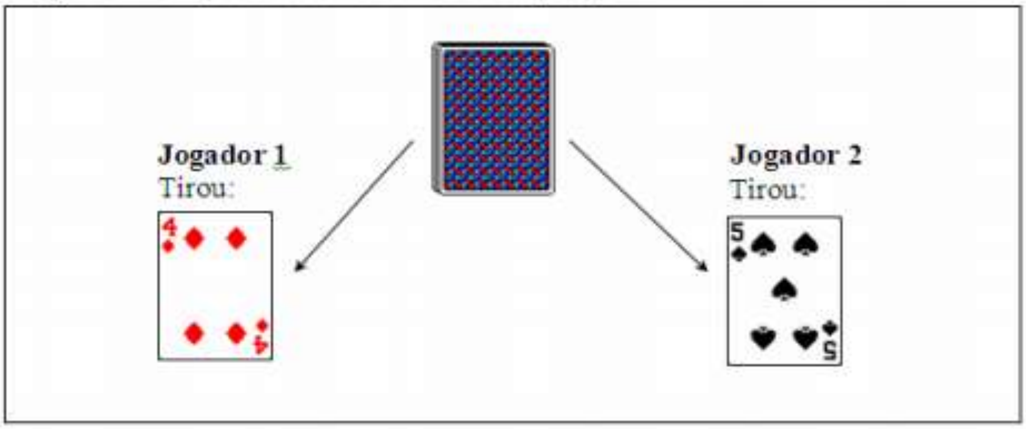


Fonte: (LOPES, CORRAL e RESENDE, 2012)

(iii) Escolha da medida de posição

Cada jogador tira uma carta do maço (Figura 3), quem tirar a maior carta irá escolher a medida de posição que será utilizada naquela rodada.

Figura 3 - Definição da escolha da medida de posição



Fonte: (LOPES, CORRAL e RESENDE, 2012)

(iv) Finalização da rodada

Como o Jogador 2 obteve a maior carta é ele quem vai escolher com qual medida de posição será realizada a disputa dentre as medidas de tendência central: média, mediana ou moda.

Caso o Jogador 2 escolha média, ele vencerá o Jogador 1 nesta rodada, pois o valor de sua média é 8 e a de seu oponente é 7,8. Se o Jogador 2 escolher mediana, ele empata com o Jogador 1 e ambos recebem neste caso três pontos. Por razões óbvias, o Jogador 2 não deve escolher a medida de posição moda, nesta rodada.

Situações-problema

Situações-problema utilizadas em sala de aula (LOPES, CORRAL e RESENDE, 2012).

Problema 1. No Jogo dos 3Ms poderão ocorrer valores iguais para a média e a mediana? Justificar sua resposta.

Problema 2. No Jogo dos 3Ms poderão ocorrer valores iguais para a mediana e a moda? Justificar sua resposta.

Problema 3. No Jogo dos 3Ms poderão ocorrer valores iguais para as três medidas de posição? Justificar sua resposta.

Problema 4. No Jogo dos 3Ms qual o maior valor possível para a média? Justificar sua resposta.

Problema 5. No Jogo dos 3Ms qual o maior valor possível para a mediana? Justificar sua resposta.

Problema 6. No Jogo dos 3Ms qual o maior valor possível para a moda? Justificar sua resposta.

Problema 7. No Jogo dos 3Ms a mediana será sempre maior do que média? Justificar sua resposta.

Problema 8. Em quais casos do Jogo dos 3Ms o jogador poderá obter a média igual a 9,8? Justificar sua resposta.

Problema 9. Em quais casos do Jogo dos 3Ms o Jogador poderá obter a média igual a 9,6? Justificar sua resposta.

Problema 10. Em quais casos do Jogo dos 3Ms o Jogador poderá obter a mediana igual a 10? Justificar sua resposta.

Problema 11. Em quais casos do Jogo dos 3Ms o Jogador poderá obter a moda igual a 10? Justificar sua resposta.

Atividade 2

Nesta atividade é feita uma simulação onde estudante está preso no Covil Estatístico do Mal (Kraus, 2010, apud LOPES, 2014). Todas as saídas do calabouço estão cheias de monstros cruéis. Existem três saídas (portas), cada uma delas marcada com uma medida de tendência central que descreve o tamanho dos monstros que estão entre a porta e a liberdade. A primeira porta indica moda igual a 25 polegadas, a segunda indica mediana igual a 40 polegadas e a terceira indica média igual a 26 polegadas.

Os alunos são convidados a estudar as portas e escolher o caminho mais seguro para a liberdade. Assim que os alunos fazem suas escolhas por escrito, as portas são abertas para mostrar os monstros que esperam os intrépidos estudantes de Estatística. Atrás das duas primeiras portas existe um monstro gigantesco. Assim, caso o estudante escolha uma delas, será certamente comido pelo monstro. Por causa da distribuição enviesada, tanto a moda como a mediana não serão capazes de detectar a presença desse terrível monstro. A porta 3 é a melhor escolha: existem monstros, mas nenhum com tamanho suficiente para comer o estudante. Depois da atividade, os alunos podem entender que a média é uma medida que limita a presença de monstros enormes. A autora deste jogo (ver nota de rodapé) afirma que, em uma classe típica e de sua experiência, poucos alunos escolhem a porta 3.

Avaliação

Os alunos serão avaliados de modo processual, com avaliações individuas e em grupo. A princípio o professor deve avaliar de maneira qualitativa e individual seus alunos através do empenho e dedicação na execução do jogo (atividade 1) e também nas discussões pertinentes realizadas com seu grupo, acompanhando seu entendimento, autonomia e capacidade de fala a respeito do tema. Em um segundo momento avaliaremos as argumentações do grupo a respeito das situações-problema, acompanhando as conclusões obtidas e possibilitando e promovendo o debate com os demais grupos, a fim de validarmos suas conclusões. E de modo análogo faremos para a atividade 2.

Referências

LOPES, José Marcos. O uso de um jogo de treinamento no ensino dos conceitos de média e variância. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 8, n. 2, p. 345-362, 2014.

LOPES, José Marcos; CORRAL, Renato Sagiorato; RESENDE, Jéssica Scavazini. O estudo da média, da mediana e da moda através de um jogo e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 2, p. 250-270, 2012.

NÚMEROS

NÚMEROS E SUAS RELAÇÕES

Guilherme Luiz dos Santos
Vinicius Teodoro Ferreira

Ano escolar: 9º ano do Ensino Fundamental

Ementa

Conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais como subconjuntos do conjunto dos números reais.

Objetivos

- Compreender a formação do conjunto dos números reais.
- Compreender os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais como subconjuntos do conjunto dos números reais.
- Aprofundar, potencializar e consolidar as ideias já conhecidas sobre conjuntos numéricos.

Recursos empregados

- Impressão das cartas e tabuleiro do jogo para os estudantes.
- Projetor e computador para apresentar as regras do jogo.

Atividades

Esse plano de aula tem como tema números e suas relações. Ele está divido em 6 situações descritas a seguir, sendo que a atividade principal é composta por um jogo de tabuleiro onde os estudantes deverão responder questões relacionadas aos conjuntos numéricos. O plano de aula é um recorte e adaptação de um plano de aula elaborado e disponível no site da Nova Escola. A referência está no final deste plano.

SITUAÇÃO 1: Introdução e apresentação dos objetivos esperados (2 minutos)

Objetivos: Apresentar os objetivos da aula e o que se espera dos alunos nessa aula.

Desenvolvimento:
Comece a aula apresentando os objetivos de aula propostos e o que se espera dos estudantes ao final da aula. Explique que ao final da aula será retomado esses objetivos para verificar se foram atingidos.

SITUAÇÃO 2: Retomada dos conhecimentos (5 minutos)

Objetivos: Realizar uma revisão de conteúdo já visto: números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Resolver exercícios que envolvem os números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Desenvolvimento: No início da aula distribua a atividade 1 (Anexo 1) para os estudantes e peça para que, individualmente, os alunos leiam a atividade e a realizem. Em seguida, deixe que discutam em duplas suas soluções. Reserve 5 minutos para um debate coletivo e deixe que as duplas compartilhem o que discutiram.

Discuta com a turma e faça os seguintes questionamentos?

- Pergunte se ainda há alguma dúvida em distinguir números naturais e inteiros.
- Pergunte se ainda há alguma dúvida em distinguir números racionais e irracionais.

SITUAÇÃO 3: Instruções para a atividade principal. (10 minutos)

Objetivos: Apresentar as instruções da atividade principal

Desenvolvimento: Peça para que os alunos formem grupos de 5 alunos, oriente os grupos a se posicionarem de forma que a possibilidade de interação entre eles e também com você, professor, seja favorecida.

Distribua os tabuleiros (Anexo 2) do jogo e as cartas com as perguntas do jogo com os conjuntos numéricos (Anexo 3). Nas cartas com as perguntas está contido a resposta também. Apresentar o tabuleiro é simples, as flechas mostram o sentido que se deve seguir em direção ao ponto de chegada. Converse sobre as regras do jogo. Garanta que todos entenderam as regras. Peça para anotarem as dúvidas sobre as atividades para serem discutidas com a sala toda.

As regras do jogo são as seguintes:

- *Os estudantes se dividirão em grupos de 5.*
- *O jogo ocorrerá dentro de cada equipe.*
- *Os integrantes, em comum acordo, devem decidir quem começa o jogo. A sequência pode ser no sentido horário.*
- *O estudante que iniciará jogo deve pegar todas as cartas, embaralhar e pegar a primeira carta (sem olhar o conteúdo) e dar para o próximo estudante na sequência. O estudante que receber a pegar a carta deve ler para o estudante que pegou a carta (anterior) para que ele tente responder a pergunta nela contida.*
- *Se o estudante acertar, ele avança uma casa no tabuleiro.*
- *Se a resposta possuir o mesmo conjunto numérico que o jogador estiver parado no tabuleiro e a pergunta for respondida corretamente, o jogador avança duas casas.*
- *O jogo deve seguir na sequência definida.*
- *Peça aos estudantes que separem as cartas que foram respondidas certas da que não foram. Eles deverão entregar essas cartas de forma separada no final do jogo.*
- *Ganha quem chegar à casa final.*

SITUAÇÃO 4: Jogando com os números. (25 minutos)

Reserve 25 minutos para que os estudantes joguem no tabuleiro. Oriente para que anotem as dúvidas que surgirem ao longo do jogo para discussão posterior. Acompanhe o andamento do jogo nos grupos e observe também as principais dúvidas que surgirem.

SITUAÇÃO 5: Discussão e socialização do conhecimento. (5 minutos)

Objetivos: Discussão e socialização do conhecimento desenvolvido durante o jogo.

Desenvolvimento: Nesse momento deverão ser discutidos com os estudantes as principais dúvidas anotadas por eles durante a atividade.

Para facilitar o andamento da discussão, aqui estão descritos alguns questionamentos previstos durante essa atividade. Esse guia auxilia o professor a conduzir as discussões nesse momento. O professor pode fazer os seguintes questionamentos:

- O conjunto dos números inteiros negativos é a expansão de qual conjunto? Justifique.
- O conjunto dos números racionais é expansão de qual conjunto?
- Qual o conjunto dos números não racionais?
- Quais conjuntos formam o conjunto dos números reais?
- Que tipo de número forma o conjunto dos números racionais?
- De quantas formas é possível representar um número racional e quais são?

SITUAÇÃO 6: Encerramento da atividade e avaliação (5 minutos)

Objetivos: Concluir que o conjunto dos números reais foi formado a partir da necessidade de expandir os conjuntos.

Desenvolvimento: Para encerrar, explique aos alunos que o diagrama mostra como se formou o conjunto dos números reais. Os números inteiros sendo a expansão dos números naturais. Os números racionais sendo a expansão dos números inteiros. Depois dos racionais, houve a necessidade de outros números, os decimais não racionais, surgindo assim os irracionais. Concluindo que os racionais e irracionais formam o conjunto dos números reais. Este diagrama não significa que um conjunto está contido em outro, mas a sequência em que eles foram surgindo e que um é a expansão do outro.

Como forma de avaliação peça para que os estudantes entreguem as cartas que foram separadas com respostas certas ou erradas. Isso auxiliará o professor a fazer uma avaliação do grupo em relação aos acertos e dificuldades na atividade.

Por fim, recolha todo o material dos alunos. Você poderá usar esse material em outras aulas.

Avaliação

- Os alunos serão avaliados pela participação em aula na atividade em grupo
- Participação durante o desenvolvimento da atividade
- Número de acertos de cada grupo em relação às perguntas. Isso auxiliará o professor para verificar quais foram as principais dúvidas e dificuldades, bem como verificar se os objetivos foram atendidos.

Referências

ESTRANDIOTO, M. B. Plano de Aula: Jogando com números reais. **Nova Escola** n. 676. Disponível em: https://novaescola.org.br/plano-de-aula/676/jogando-com-numeros-reais. Acesso em: 02 jul. 2019.

ANEXOS

Anexo 1:

1. Corrija as frases para que se tornem verdadeiras:

a) Todo número natural pertence ao conjunto dos números reais, porém não é possível localizar esses números na reta real.

Todo número natural pertence ao conjunto dos números reais e é possível localizar esses números na reta real.

b) O conjunto dos números inteiros é um subconjunto do conjunto dos números reais e do conjunto dos números naturais.

O conjunto dos números inteiros é um subconjunto do conjunto dos números reais e contém o conjunto dos números naturais.

c) Todo número racional pertence ao conjunto dos números reais, é infinito e não periódico.

Todo número racional pertence ao conjunto dos números reais, pode ser infinito e periódico.

d) Todo número irracional pertence ao conjunto dos números reais, e pode ser escrito no formato de fração, na qual o numerador e denominador são números inteiros.

Anexo 2:

Anexo 3:
Imprima as questões abaixo em tiras de papel (cartas) para o jogo.

1 - Quais números formam o conjunto dos números Naturais, que pertencem ao conjunto dos números Reais?
R: Os números inteiros positivos e o zero.

2 - Os números Naturais estão contidos em quais conjuntos?
R: Estão contidos nos conjuntos dos inteiros, racionais e reais.

3 - Raízes de quadrados perfeitos pertencem a quais conjuntos?
R: Aos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais.

4 - O conjunto dos números Naturais é subconjunto de quais conjuntos?
R: Aos conjuntos dos números inteiros, racionais e reais.

5 - Há algum número Natural que não é possível localizar na reta real? Justifique.
R: Não, pois todos os números inteiros positivos se encontram na reta real, do zero ao infinito.

6 - Qual é o conjunto numérico que é subconjunto do conjunto dos números Inteiros?
R: O conjunto dos números naturais.

7 - O conjunto dos números Naturais surgiu da necessidade do homem de quantificar elementos, mas com o tempo esses números não foram suficientes e surgiu um novo conjunto. Qual é esse conjunto?
R: O conjunto dos números inteiros, pois contém, além dos inteiros positivos (naturais), os inteiros negativos.

8 - Quais números formam o conjunto dos números Inteiros, o qual pertence ao conjunto dos números Reais?
R: Os inteiros positivos, os inteiros negativos e o zero.

9 - Os números inteiros pertencem a quais conjuntos?
R: Aos conjuntos dos números inteiros, racionais e reais.

10 - O conjunto dos números inteiros é subconjunto de quais conjuntos?
R: Dos conjuntos dos números racionais e reais.

11 - Qual a diferença entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros?
R: O conjunto dos números naturais é formado apenas pelos inteiros positivos e o zero, o conjunto dos números inteiros é formado pelo conjunto dos números naturais e pelos inteiros negativos.

12 - Há algum número inteiro que não é possível localizar na reta real? Justifique.
R: Não. A reta real é infinita e contém todos os números positivos e negativos.

13 - O conjunto dos números racionais é um subconjunto dos Números Reais, formado por números decimais. Porém, há alguns números decimais que não pertencem ao conjunto dos números racionais, quem são eles?
R: Os números decimais infinitos e não periódicos.

14 - O que são dízimas periódicas, e a quais conjuntos esses números pertencem?
R: São números que repetem uma sequência de algarismos na parte decimal, infinitamente.

15 - Qual a diferença entre os números racionais e irracionais?
R: Os racionais na forma decimal podem ser finitos ou infinitos periódicos, e os irracionais são decimais infinitos não periódicos. Os racionais podem ser escritos em forma de fração com numerador e denominador inteiros, os irracionais não.

16 - Há algum número racional que não é possível localizar na reta real? Justifique.
R: Não, a reta real contém todos os números racionais.

17 - Podemos representar os números racionais de três formas, quais são elas?
R: Em forma de razão/fração, de decimal exato ou de dízima periódica.

18 - Um número infinito de casas decimais e periódico pertence a quais conjuntos?
R: É um número racional, portanto, pertence ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

19 - Um número que tem uma quantidade finita de casas decimais pertence a quais conjuntos?
R: É um número racional, portanto, pertence ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

20 - Um número escrito em forma de fração com números inteiros e com denominador diferente de zero, pertence a quais conjuntos?
R: É um número racional, portanto, pertence ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

21 - A dízima periódica, além de pertencer ao conjunto dos números racionais, pertence a mais um conjunto, qual é esse conjunto?

R: Ao conjunto dos números reais.

22 - Escolha um colega para dizer um número qualquer. Esse número pertence a quais conjuntos numéricos?
R: A resposta depende do número que o aluno escolher.

23 - Um número que pode ser representado por uma razão entre números inteiros pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

24 - O quociente de dois números inteiros, com divisor diferente de zero, pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

25 - O número 0,33333... pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

26 - O número 1/9 pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

27 - O número 0,121212... pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

28 - O número 0,05 pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

29 - O número 2/11 pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

30 - O número 0,321321321... pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

31 - O número 0,1254 pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

32 - O número 7/9 pertence a quais conjuntos?
R: Ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números reais.

33 - Cite, um exemplo de raiz quadrada que seja um número irracional e pertença ao conjunto dos números Reais.
R: Qualquer raiz quadrada não exata.

34 -Todo número real que não é racional é....
R: Irracional.

35 – Alguns subconjuntos do conjunto dos números inteiros são:
R: Conjunto dos inteiros não negativos (os naturais), o dos inteiros não positivos, o dos inteiros positivos e o dos inteiros negativos.

36 - O conjunto dos números reais é formado pelos conjuntos dos números racionais e os irracionais, porém se um número real é decimal e irracional, posso dizer que é também racional?
R: Não, os racionais na forma decimal podem ser finitos ou infinitos periódicos e os irracionais são infinitos não periódicos.

37 - Há algum número irracional que não é possível localizar na reta real? Justifique
R: Não, a reta real contém todos os números irracionais.

38 – Como podemos representar os números irracionais?
R: Na forma de número com infinitas casas decimais não periódicas.

39 - O número 0,1356217... pertence a quais conjuntos?
R: Sendo um número com infinitas casas decimais não periódicas, é um número irracional e então pertence aos conjuntos dos números irracionais e ao conjunto dos números reais.

40 - Raiz quadrada de 2 pertence a quais conjuntos?
R: Raiz quadrada não exata pertence ao conjunto dos números irracionais e ao conjunto dos números reais.

41 - Raiz quadrada de 17 pertence a quais conjuntos?
R: Raiz quadrada não exata pertence ao conjunto dos números irracionais e ao conjunto dos números reais.

42 - O número 7,1569864... pertence a quais conjuntos?
R: Sendo um número com infinitas casas decimais não periódicas é um número irracional, pertence aos conjuntos dos números irracionais e ao conjunto dos números reais.

43 - O número 5,3678941... pertence a quais conjuntos?
R: Sendo um número com infinitas casas decimais não periódicas é um número irracional, pertence aos conjuntos dos números irracionais e ao conjunto dos números reais.

44 - Um número decimal com infinitas casas decimais não periódicas pertence a quais conjuntos?
R: Sendo um número com infinitas casas decimais não periódicas é um número irracional, pertence aos conjuntos dos números irracionais e ao conjunto dos números reais.

45 - Raiz quadrada de um número primo qualquer, pertence a quais conjuntos?
R: Raiz quadrada não exata pertence ao conjunto dos números irracionais e ao conjunto dos números reais.

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Celso Vieira Junior

Ano escolar: 1º ano do Ensino Médio

Ementa

Sequências numéricas, lógica matemática.

Objetivos

Essa aula tem como objetivo geral revisar conceitos de equações algébricas e através da resolução de problemas e sanar dúvidas pré-existentes. Como objetivo específico temos o desenvolvimento de interpretação e aplicação de equações algébricas utilizando, como metodologia de ensino, as atividades investigativas e resoluções de problemas.

Recursos empregados

Papel sulfite

Atividades

1. Introdução

Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento da aprendizagem.

Quando os alunos se deparam com uma atividade investigativa, se sentem como detetives, pois terão que seguir pistas e prosseguir sozinhos, escolhendo uma direção. Mesmo quando erram ou encontram dificuldades, aprendem com as decisões já tomadas e recomeçam novamente. As investigações levarão o investigador a pensar de forma muito mais criativa, pois as perguntas nem sempre levam a respostas, mas podem levar a novas perguntas e, por este motivo, instigam o investigador a saber quais as razões pelas quais as coisas acontecem.

Podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais (PONTE *et al*, 1999), sistematizados no quadro 1:

Quadro 1: Momentos da Investigação Matemática

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular uma conjectura
Testes e	• Realizar testes

reformulação	• Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: autoria própria

Uma atividade investigativa desenvolve-se normalmente em três fases: (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

Nesse sentido, esta aula tem como objetivo realizar uma revisão e consolidar conhecimentos em equações algébricas, conteúdos já trabalhados no 8° e 9° ano do Ensino Fundamental, através da Investigação Matemática e soluções de problemas.

2. Atividades desenvolvidas

A atividade se inicia com o professor propondo uma atividade em grupo de até 4 pessoas, sendo entregue uma ficha de Atividade 1 (anexo) para cada grupo. O professor ajuda os alunos a compreenderem a atividade a ser realizada e, após isso, ele passa a desempenhar um papel mais de retaguarda, procurando entender como o trabalho dos alunos vai se desenvolvendo e prestar o apoio que for necessário. Espera-se, então, neste momento, que os alunos gastem um tempo formulando questões e conjecturas. É nesta fase que vão se familiarizando com os dados e apropriando-se mais plenamente com o sentido da tarefa.

O professor, nesta etapa, tem um papel fundamental de acompanhar se os alunos estão anotando suas linhas de raciocínio e suas conjeturas, levando os alunos a compreender o caráter provisório das conjecturas. As conjecturas podem surgir de diversas formas para o problema proposto. É sempre importante verificar se os alunos estão testando as mesmas e questioná-los se os resultados que estão chegando têm coerência com o problema apresentado. Nessa etapa é muito importante solicitar que os alunos expliquem seu raciocínio e que justifiquem o mesmo. O professor precisa estar atento a todo esse processo para garantir que os alunos vão evoluindo durante a realização da atividade.

No final da investigação é chegada a hora dos grupos apresentarem suas conjecturas, para colocar em confronto as suas estratégias e justificações, cabendo sempre ao professor o papel de moderador. A discussão se faz importante para que os alunos entendam melhor o significado de investigar, desenvolvendo a capacidade de comunicação, de refletir sobre seu trabalho e entender o processo de argumentação.

Durante esse momento de discussão cabe ao professor sistematizar os raciocínios levantados por cada grupo e suas conjecturas, levando os alunos a perceberem se os resultados apresentados têm coerência com o problema proposto. Em seguida o professor, com ajuda dos alunos, encontrarem uma solução geral para o problema e formalizar o conceito de equações algébricas, a partir das soluções apresentadas, buscando, também, outros métodos de resolução e explicar os mesmos.

Após o término da primeira atividade, a Atividade 2 (anexo) será entregue para que os alunos a resolvam individualmente, como exercícios de fixação, possibilitando que o professor consiga atender as dúvidas que surgirem ainda individualmente.

Avaliação

A avaliação acontecerá na Atividade 2, trabalhando problemas históricos e desafiadores, estimulando os alunos e possibilitando ao professor verificar o desenvolvimento de cada aluno.

Referências

GELLI, O. **Contando a História da Matemática**, Vol. 02. São Paulo: Editora Ática, 1989.

IMENES, L.M; JAKUBO, J; LELLIS, M. **Álgebra.** São Paulo: Atual Editora, 2010.

MENDES, I. A. **Matemática e Investigação em sala de aula**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

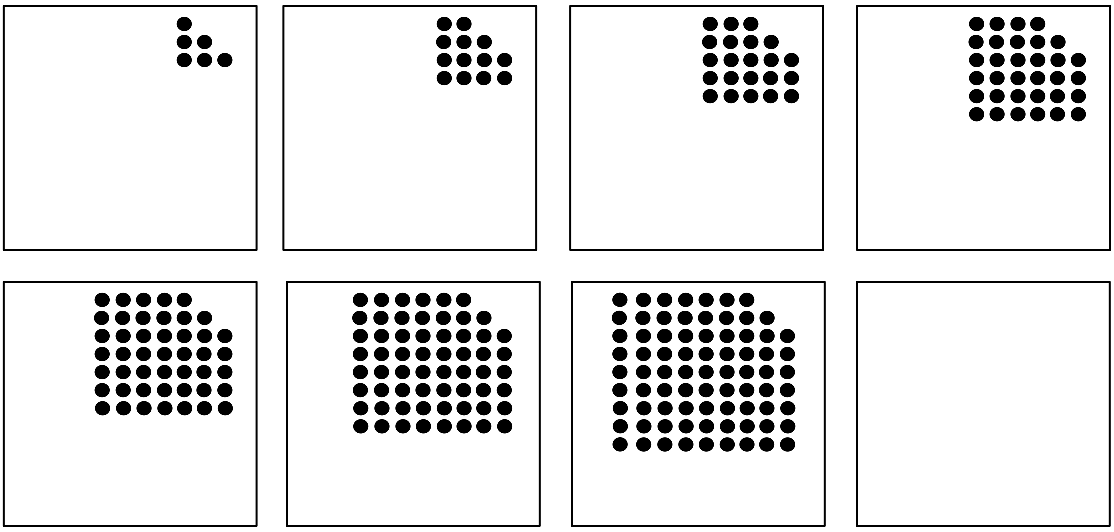
PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M., & FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante,** 7(2), 41-70, 1999.

PONTE, J. P; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

Anexos

Atividade 1

As figuras abaixo seguem um certo padrão. Observe bem:



a. Descubra o padrão dos desenhos e desenhe a figura 8.
b. Escreva uma equação que representa o número de ponto (n) em função do número da figura (f).

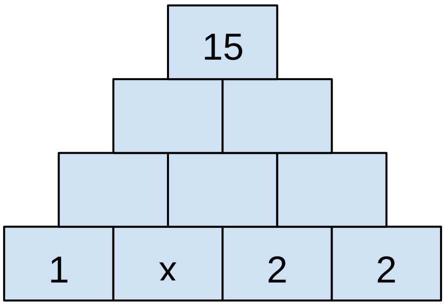
c. Quantos pontos teria a figura 250?
d. Com 1935 pontos é possível ter uma figura com os mesmos padrões das apresentadas?

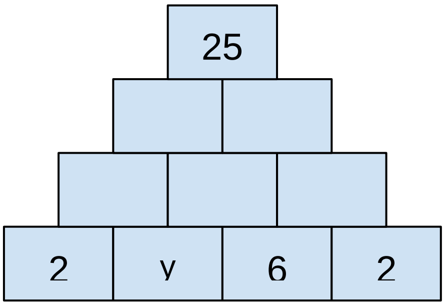
Atividade 2

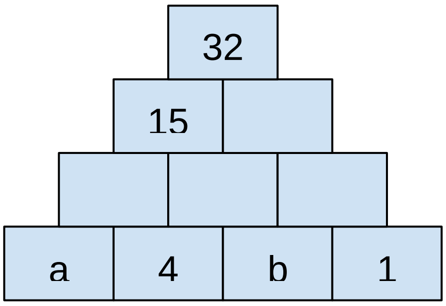
1) Nove lingotes de ouro pesam tanto quanto 12 lingotes de prata. Se trocarmos um lingote de ouro por um lingote de prata, então entre o peso do ouro e o da prata haverá uma diferença de 4 kg. Qual a soma do peso de um lingote de ouro mais um de lingote de prata?

2) Em um retângulo de largura (l) e comprimento (c), sabe-se que um quarto da largura mais o comprimento é igual a 7 m. O comprimento mais a largura somam 10 m. Qual é o comprimento e qual a largura do retângulo?

3) Calcule as incógnitas nas pirâmides numéricas abaixo, sabendo que o valor de cada tijolo corresponde à soma dos valores dos dois tijolos imediatamente abaixo deste:







PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Lorena Rodriguez Haase

Ano Escolar: 1° ano do Ensino Médio

Ementa

- Sequência e sucessão;
- Termo geral de uma PA;
- Classificação de uma PA;
- Propriedades de uma PA;
- Soma dos n termos de uma PA.

Objetivos

- Reconhecer, desenvolver cálculos e propor problemas envolvendo Progressão Aritmética;
- Compreender o conceito de sequências, observar sequências no cotidiano;
- Entender a origem, reconhecer e calcular o termo geral e soma de termos de uma PA;
- Entender as classificações e as propriedades de uma PA.

Recursos Empregados

Slides para projeção, fotos, lousa, giz, computador, folha de atividades, tesoura, régua.

Atividades

1. Introdução

A Progressão Aritmética (PA) está inserida no conteúdo de sequência e sucessão. Ela é utilizada para reconhecer padrões e regularidades e pode ter diversas aplicações como, por exemplo, o cálculo de juros simples. É um conteúdo de álgebra do primeiro ano do ensino médio, e trabalha habilidades como: perceber o que é uma sequência numérica, identificar regularidades em sequência, expressar e calcular o termo geral de uma progressão e a soma dos seus termos, representar graficamente progressões aritméticas e utilizar os conceitos de PA na resolução de problemas.

Além disso, trabalha a habilidade prevista na BNCC:

> **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (BRASIL, 2018).

2. Atividades Desenvolvidas

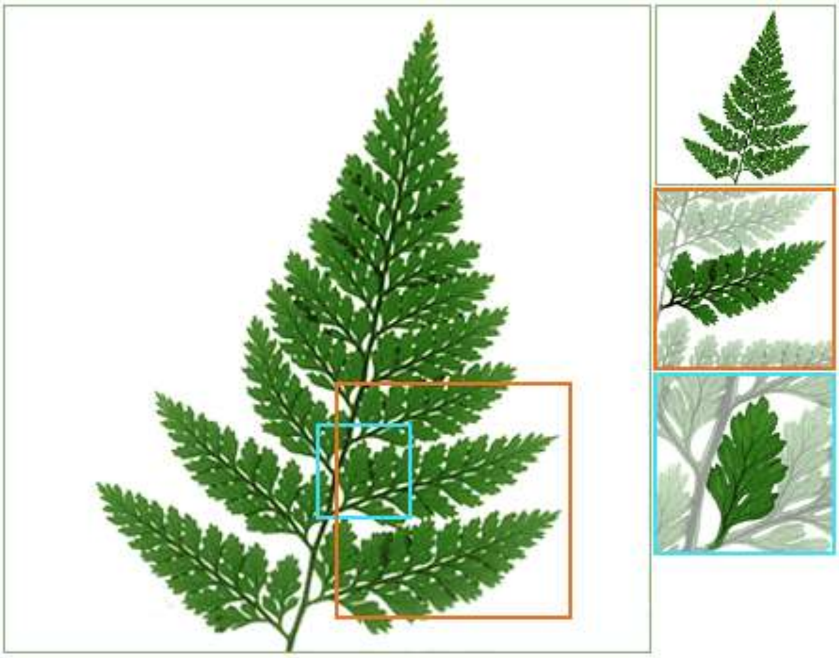
a) Sequências no cotidiano e a História de Fibonacci

Abordar o conceito de sequência através de exemplos e história de Fibonacci.

- Sequência e sucessão: Dar o significado de sequência. Mostrar que existem sequências finitas e infinitas, presentes na natureza e no cotidiano. Dar exemplos.

Alguns objetos da natureza, como montanhas, árvores e plantas têm propriedades fractais. O fractal não é uma PA, ele é apenas um exemplo de sequência. Um exemplo de fractal é o feto, uma planta que não tem tronco e a sua folhagem cresce de forma simétrica em volta do pedúnculo central. Na imagem que se segue, podemos observar em vários níveis de ampliação a complexidade de um feto.

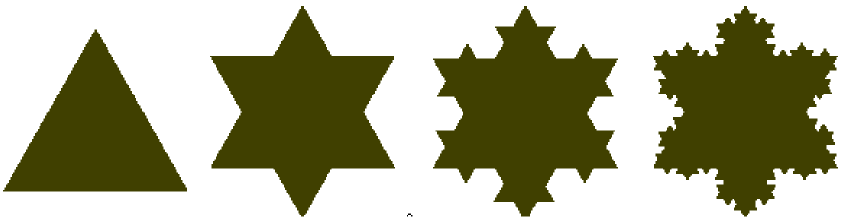
Figura 1: Um objeto da natureza fractal



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm

O floco de neve de Koch é um fractal que se obtém partindo de um triângulo equilátero. Ao meio de cada lado, adiciona-se um novo triângulo com um terço do tamanho do original; e assim por diante, como se pode verificar na figura seguinte.

Figura 2: Floco de Neve de Koch



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm

- História Fibonacci: Apresentar a história de Fibonacci e sua colaboração para a matemática, com a sequência que levou seu nome. (**Aplicar Atividade 1).**

Leonardo Fibonacci (1170 - 1250) nasceu na cidade de Pisa, localizada na região da Toscana, na Itália. Fibonacci ficou conhecido por ser um teórico dos números ao introduzir conceitos matemáticos tão abrangentes quanto o que hoje é conhecido como o sistema de numeração árabe, o conceito de raízes quadradas, sequenciamento de números e até mesmos problemas de matemática. Durante a infância de Fibonacci, seu pai, Guglielmo, um comerciante de Pisa, foi nomeado cônsul da comunidade de mercadores de Pisa no porto de Bugia, no norte da África. Fibonacci foi enviado para estudar cálculos com um mestre árabe. Mais tarde, ele foi para o Egito, Síria, Grécia, Sicília e Provença, onde estudou diferentes sistemas numéricos e métodos de cálculo. Ao retornar à sua cidade natal, publicou sua obra mais famosa, intitulada *Liber Abaci* (ou livro do Ábaco). Tal obra inicia-se com a ideia de que a aritmética e a geometria são interligadas e se auxiliam mutuamente. Nela, Fibonacci demonstra métodos de cálculos com inteiros e frações, cálculo de raízes quadradas e cúbicas, resolução de equações lineares e quadráticas. Além disso, há aplicações envolvendo permuta de mercadorias e sociedades, e uma ampla coleção de problemas, dentre os quais resultou a importante "Sequência de Fibonacci".

b) Generalização e Classificação

Durante a aula, trazer exemplos de Progressões Aritméticas e de não-PAs, dar significado à razão de uma PA. Garantir compreensão do conceito fundador e dos termos que compõem uma PA, com suas nomenclaturas. Formalizar o termo geral a_n. Através de exemplos, apresentar a classificação de uma PA (crescente, decrescente, constante). Aplicar exercícios.

Existem conjuntos com sequências regulares, ou seja, que seguem algum padrão, e conjuntos com sequências sem nenhum padrão. Por exemplo, os números pares formam uma sequência regular (2, 4, 6, 8, 10…). Já o conjunto das notas que uma turma tirou em uma disciplina não segue um padrão, por exemplo (6, 7, 5, 8, 8, 9, 10...). Portanto, já é possível perceber que a regularidade se trata de uma relação entre os termos da sequência, no caso uma constante. A Progressão Aritmética (PA) é uma sequência de números onde a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma. Essa diferença constante é chamada de razão r da PA.

Sabendo que generalização da PA se dá na seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots) \text{ P.A.}$$

Se escrevermos o significado da razão encontrado, temos:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1}$$

Onde a_né o enésimo termo e é acompanhado pelo índice *n* que representa a quantidade de termos no conjunto. Ou seja, a_1 é o primeiro termo e, caso a sequência seja finita, a_n é o último termo da sequência. Portanto, no exemplo acima, a_3 indica que esse termo está na terceira posição e, através do conceito de PA, sabemos que $a_2 + r = a_3$.

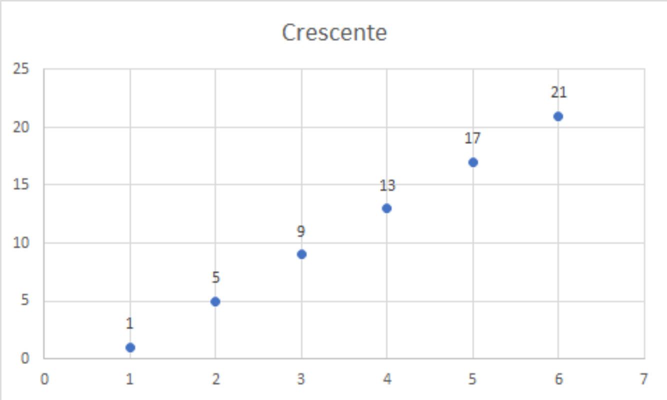
Se a razão for positiva (r > 0), temos o que chamamos de PA crescente. Se a razão igual a zero (r = 0), temos a PA constante. E se a razão for menor que zero (r < 0), temos a PA decrescente.

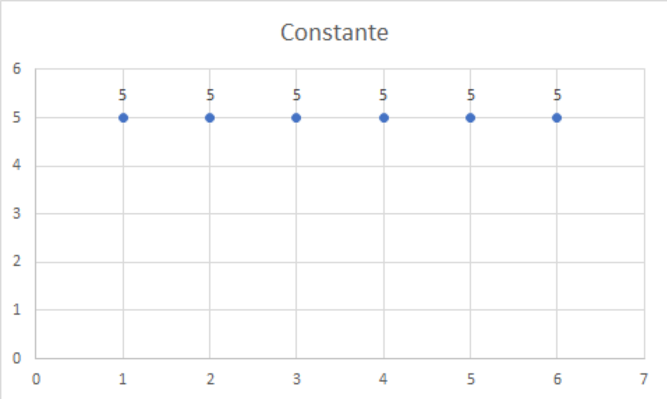
A = (1, 5, 9, 13, 17, 21, ...) RAZÃO = 4 (P. A. CRESCENTE)

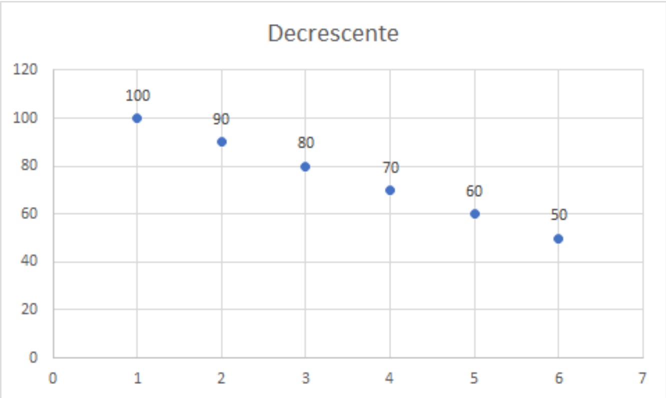
B = (3, 12, 21, 30, 39, 48, ...) RAZÃO = 9 (P. A. CRESCENTE)

C = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...) RAZÃO = 0 (P. A. CONSTANTE)

D = (100, 90, 80, 70, 60, 50, ...) = RAZÃO = -10 (P. A. DECRESCENTE)







c) Termo geral

Exercício: Em duplas, crie uma sequência para seu colega descobrir sua expressão geral.

Utilizar um dos exemplos para a elaboração do termo geral de uma PA, ou seja, sua lei de formação. Aplicar exercícios.

Conceito fundamental de uma PA é a razão, que também pode ser escrita como:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1}$$

Sendo assim:

$a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$

$a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r$ ou $a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r$ ou $a_4 = a_1 + 3r$

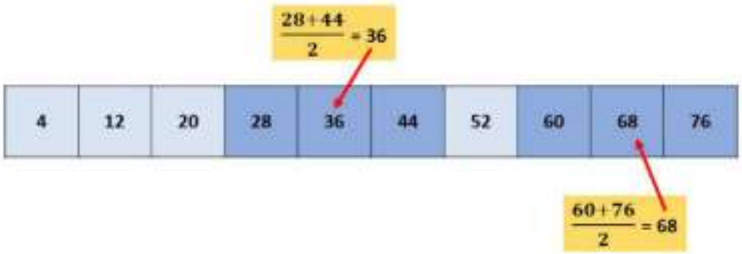
$\ldots$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

d) Propriedades

Propriedade de uma PA (soma dos termos equidistantes e média aritmética). **(Aplicação da Atividade 2).**

Um termo qualquer é a Média Aritmética entre dois termos equidistantes deste termo:



Exemplo de quadrado Mágico (Atividade 2):

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Soma dos termos equidistantes (usada para encontrar a constante mágica do Quadrado Mágico):

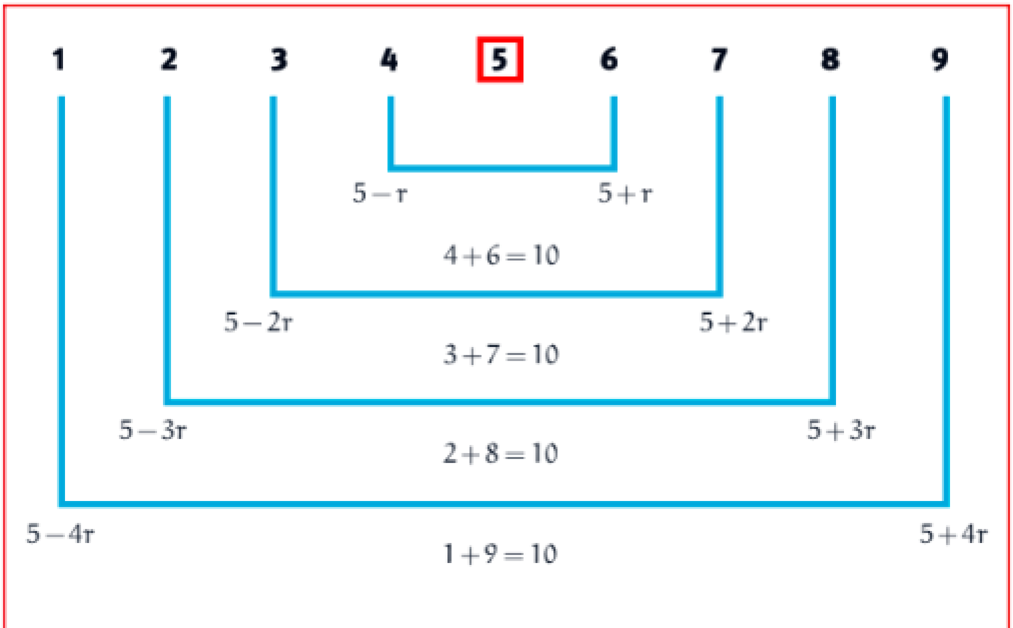


FIG. 11

A constante mágica será a soma de todos os números do quadrado mágico dividida por três, pois há três colunas e três linhas. Ou também a soma dos 3 termos centros da PA.

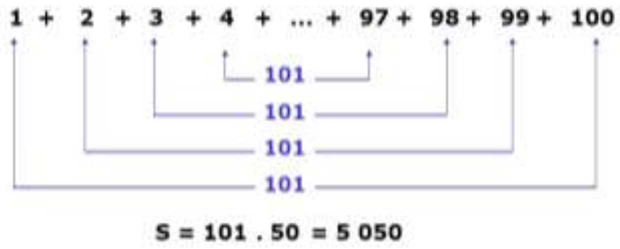
e) Soma dos n termos

Aprofundar propriedades e conceituar a soma de termos de uma PA. Elaborar exercícios de aplicação. Baseado na Atividade 2, o aluno irá conhecer uma das propriedades de PA. É a conexão que pode ser feita para a História de Gauss:

> Um professor, para manter seus alunos ocupados, mandou que somassem todos os números de um a cem. Esperava que eles passassem bastante tempo executando a tarefa. Para sua surpresa, em poucos instantes um aluno de sete ou oito anos chamado Gauss deu a resposta correta: 5.050. Como ele fez a conta tão rápido?

Os alunos podem pensar em como resolver isso (já tendo conhecimento prévio do conteúdo de PA) e depois a solução que ele utilizou pode ser demonstrada:

> Gauss observou que se somasse o primeiro número com o último, 1 + 100, obtinha 101. Se somasse o segundo com o penúltimo, 2 + 99, também obtinha 101. Somando o terceiro número com o antepenúltimo, 3 + 98, o resultado também era 101. Percebeu então que, na verdade, somar todos os números de 1 a 100 correspondia a somar 50 vezes o número 101, o que resulta em 5.050. E assim, ainda criança, Gauss inventou a fórmula da soma de progressões aritméticas. Gauss viveu entre 1777 e 1855 e foi sem dúvida um dos maiores matemáticos que já existiram. É por muitos considerado o maior gênio matemático de todos os tempos, razão pela qual também é conhecido como o Príncipe da Matemática.



Seguindo a lógica de Gauss, temos que a generalização para a soma dos n termos de uma PA seria:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

f) Conclusões

O aprendizado de Progressões Aritméticas é fundamental para diversos aprendizados. A percepção de padrões é uma das marcas que a álgebra no ensino básico carrega. Além disso, a PA faz um importante vínculo com a representação gráfica de funções lineares e matemática financeira. Ela envolve conceitos para demais conteúdos tanto de Matemática, Física, Química ou outros. A PA também aborda a História da Matemática, como Fibonacci e Gauss.

Avaliação

Entrega das 3 atividades (Anexo), participação dos exercícios em sala e tarefa de casa.
Atividade 1: Avaliação da resolução do problema de sequências.
Atividade 2: Avaliação do estudo de Progressões Aritméticas com o auxílio de quadrados mágicos.
Atividade 3: Avaliação da aplicação de todo conteúdo estudado de PA.

Referências

BARRETO, Benigno Filho e SILVA, Claudio Xavier. **Matemática Aula por Aula**, segunda Série, Editora FTD, São Paulo, 2005.

BARICHELLO. L. **Quadrado Mágico Aditivo**. Recursos educacionais. IME, UNICAMP, 2018. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/search:progress%C3%A3o+aritm%C3%A9tica. Acesso em: 29 out. 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curicular** – Ensino Médio. Brasília: ME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 24 nov. 2019.

RUSSELL, Deb. **Biography of Leonardo Pisano Fibonacci**, Noted Italian Mathematician. Disponível em: https://www.thoughtco.com/leonardo-pisano-fibonacci-biography-2312397. Acesso em: 29 out. 2019.

SALLUM. E. Fractais no Ensino Médio. IME-USP. **Revista do Professor de Matemática** n..57, 2005.

SOUZA, P; LIMA, A. **O contrato didático a partir da aplicação de uma sequência didática para o ensino de Progressão Aritmética.** UNICAMP, 2014. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646566/13466. Acesso em: 24 nov. 2019.

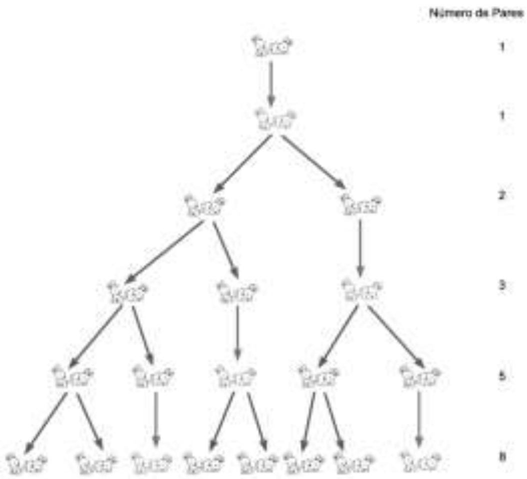
ANEXOS

Atividade 1: Sequência de Fibonacci

No livro de Líber Abacci, é apresentado no capítulo 12, o problema mais famoso, entre todos os tratados por Fibonacci:

> Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

Figura 3: problema dos coelhos



Fonte: https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos

Em duplas ou trios, responda:

1. Como podemos escrever uma regra para essa sequência? Tente escrever os próximos cinco números.
2. Tente construir um gráfico para esta sequência.
3. Discussão em plenária sobre as conclusões obtidas com a resolução dos exercícios.

Atividade 2: Quadrado Mágico Aditivo

Um Quadrado Mágico é uma tabela quadrada de lado n, **cuja soma dos termos de cada linha, coluna e diagonal (principal e secundária) é constante**. Esse valor é chamado de constante mágica. O quadrado mágico estudado inicialmente neste experimento é conhecido como quadrado mágico fundamental. Suas principais características são: lado 3 e valores de 1 a 9. Posteriormente, estudaremos variações do quadrado com constantes mágicas diferentes.

Etapa 1: Quadrado mágico e PA

Preencham o Quadrado Mágico abaixo com os números de 1 a 9:

Montem três quadrados mágicos com os seguintes números:

(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)   (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)   (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)

Quais foram as constantes mágicas encontradas nos quadrados feitos anteriormente?

O que os quatro conjuntos de números dados têm em comum: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17), (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18) e (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)?

Etapa 2: **Termos centrais e constantes mágicas**

Dado o conjunto de números (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 e 29), respondam:

- É possível utilizá-lo para preencher um Quadrado Mágico?
- Se sim, qual será o termo central?

Dada uma sequência qualquer de nove termos que preenche um quadrado mágico, respondam: qual será a constante mágica do quadrado mágico formado por eles? Responda essa questão sem resolver o quadrado mágico.

Fonte: BARICHELLO. L. **Quadrado Mágico Aditivo**. Recursos educacionais. IME, UNICAMP, 2018.

Atividade 3: Elaborando Questões de PA

Em grupos de 3 pessoas:

1. Construir uma questão/exercício autoral envolvendo PA. Essa questão pode abordar conceitos desde sequência a soma dos termos de uma PA. Qualquer material (livro didático, caderno, outra fonte) pode ser consultado, como inspiração. O mais importante é que seja uma questão criada por vocês, Sejam criativos! O grupo precisa ter conhecimento de sua resolução.

2. Entregar a questão para outro grupo resolver.

3. O grupo que elaborou a questão, deve corrigi-la. Apontar se o outro grupo que resolveu o exercício acertou ou não chegou à resposta esperada. Se houve algum erro, anotar no papel onde está o erro e como o grupo autor havia pensado a resolução daquele problema.

4. Discussão em plenária sobre as conclusões obtidas com a resolução dos exercícios.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Bianca Frusoni Rauseo

Ano escolar: 1º ano do Ensino Médio

Ementa

Análise Combinatória: problemas de contagem, princípio multiplicativo. História da matemática: Papiro de Rhind, *Stomachion* (jogo de análise combinatória).

Objetivos

Objetivo Geral:
Estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos usando processo investigativo e de construção de modelo, como define a base nacional comum curricular.
Objetivos específicos:
Mostrar ao aluno um problema clássico da história, estimular a análise crítica do problema e das condições de resolução. Compreender a análise combinatória como construção histórica para resolver problemas de contagem.

Recursos empregados

- Folhas quadriculadas, réguas e tesoura para a construção do Stomachion.
- Slides para apresentar a tabela, imagem a ser construída e o questionário.

Atividades

1. (Tempo estimado: 5 min) Será apresentado o objetivo da aula e a introdução será feita com o Problema 79 do Papiro de Rhind:

Há 7 casas, em cada casa temos 7 gatos, cada gato mata 7 ratos,
cada rato comeu 7 grãos de cevada, cada grão teria produzido
7 hekats de cevada. Qual a soma das coisas enumeradas?

O problema apresentado é o Problema 79 do Papiro de Rhind, uma das principais fontes históricas sobre a matemática do Egito antigo. Será proposto que o aluno tente resolver o problema de diversas maneiras e a ideia é que o aluno busque soluções além o princípio multiplicativo como técnica de contagem e intuir a ideia de fatorial.

Tabela 1. Resolução do Problema 79 pelo princípio multiplicativo

Elemento	Quantidade
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Grãos	2401
hekats	16807
Total	19607

2. (Tempo estimado: 10 min) Construir o quebra-cabeça *Stomachion:* 14 peças formando um quadrado, atribuído a Arquimedes como um problema histórico de contagem. O problema foi resolvido em 2003 e resultou em 17.152 formas diferentes, considerando 268 construções fundamentais, as demais foram obtidas por rotações, reflexões e simetrias.

Figura 1. Stomachion

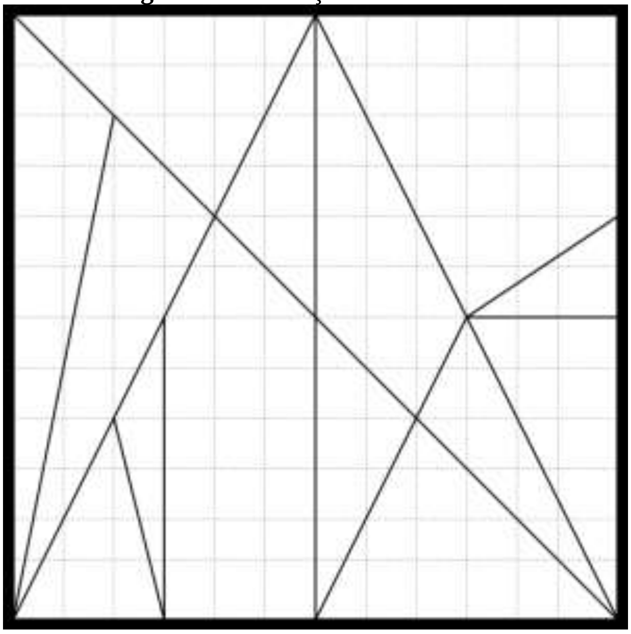
Fonte: http://matematicasentumundo.es/JUEGOS/stomachion.htm

Serão fornecidas folhas quadriculadas, os alunos deverão fazer um *Stomachion* a partir da tabela com coordenadas cartesianas abaixo.

Tabela 2. Coordenadas Cartesianas para Construção do *Stomachion*

PONTO	X	Y	(X,Y)
I	0	0	(0,0)
II	3	0	(3,0)
III	6	0	(6,0)
IV	12	0	(12,0)
V	12	6	(12,6)
VI	12	8	(12,8)
VII	12	12	(12,12)
VIII	6	12	(6,12)
IX	0	12	(0,12)
X	2	10	(2,10)
XI	2	4	(2,4)
XII	3	6	(3,6)
XIII	4	8	(4,8)
XIV	6	6	(6,6)
XV	8	4	(8,4)
XVI	9	6	(9,6)

Figura 2. Construção do *Stomachion*



Fonte: https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Ostomachion.svg

3. (Tempo estimado: 15 min) Após a construção do *Stomachion*, será proposto o problema "de quantas formas diferentes podemos ordenar o *Stomachion* formando um quadrado?"

É esperado que o aluno tente construir manualmente, depois que tente encontrar um padrão. O aluno poderá consultar a internet para buscar formas de resolver o problema.

4. (Tempo estimado: 10 min) Para auxiliar a análise crítica da construção do problema, será aplicado o seguinte questionário:

a) Quais as estratégias de resolução foram testadas no problema 1?

b) Quais as estratégias de resolução foram testadas no problema 2?

c) Foi possível encontrar resoluções para os problemas?

d) Quais recursos são necessários para a resolução de cada um dos problemas?

5. (Tempo estimado: 10 min) Discussão sobre os problemas, os resultados obtidos e as respostas do questionário.

Avaliação

A avaliação se dará pela participação na tentativa de resolução dos problemas propostos, pela participação na discussão e respostas do questionário.

Referências

BRASIL, MEC. **Base Nacional Curricular Comum**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf. Acesso em: 10 abr. 2019.

CAMPOS, Carlos Eduardo. **Análise Combinatória e Proposta Curricular Paulista: um estudo dos problemas de contagem.** 2011. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Dissertação de mestrado, SP, 2011.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Lopes. **Análise Combinatória: Raciocínio recursivo e processos de enumeração.** 2015. 104 p. Universidade Estadual do Norte Fluminense. Dissertação de mestrado, RJ, 2015.

REIS, Alex Marques. **A Matemática Egípcia – Solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind**. 2018. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia. Trabalho de Conclusão de Curso IFSP. SP: São Paulo, 2018

NÚMEROS COMPLEXOS

Caíque Thomas Rafael da Silva Nascimento

Ano escolar: 3º ano do Ensino Médio

Ementa

Equação do 2º Grau. Raízes de equações do 2º grau. Raízes não exatas. Introdução aos números complexos. Raízes imaginárias de equações.

Objetivos

Objetivo Geral:

Fazer com que o aluno compreenda a necessidade dos números complexos para a resolução de equações do 2º grau.

Objetivos Específicos:

- Verificar a necessidade de um conjunto numérico além dos reais;
- Entender as motivações que levam às descobertas;
- Estimular o interesse em compreender o conjunto dos números complexos.

Recursos empregados

- *Slides* de apoio para a conceituação do tema, preparado pelos próprios professores;
- Lousa e giz para anotações.

Atividades

1. Introdução

Os números complexos fazem parte de um conjunto mais abrangente que o dos Reais, que surgiu da necessidade de resolver equações do 2º grau com discriminante menor do que zero e, mais importante do que mencionado, surgiu da necessidade de resolver certas equações do 3º grau.

De acordo com o Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), uma das competências específicas de matemática que o aluno precisa desenvolver no ensino médio é:

> utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018)

Fundamentando-se na BNCC, propõe-se que após a conclusão desta aula o aluno seja capaz de buscar estratégias para criar modelos e interpretar resultados, sejam eles diversos ou não, já que isso é fundamental para o desenvolvimento matemático do aluno nos anos finais do ensino médio e em cursos superiores de diversas áreas.

2. Atividades desenvolvidas

a) Relembrando Soma e Produto das raízes de uma equação do 2º grau

De modo introdutório, o professor apresentará para os alunos 3 enigmas numéricos para eles resolverem de forma bem simples, até por meio de discussão. A ideia é que os alunos resolvam isso de cabeça sem, por exemplo, recorrer a uma equação do 2º grau.

I. Quais dois números quando somo resultam em 5 e quando multiplico encontro 6?
II. Quais outros dois números que somados resultam em 10 e multiplicados em 24?
III. Quais outros dois números que a soma resulta em 4 e a multiplicação em -1?

Após a resolução dos probleminhas, o professor iniciará uma discussão perguntando se já viram problemas desta natureza e o que lembram sobre isso. Então o professor pedirá que usem a equações do 2º grau, lançando um outro probleminha: dois números somados dão 10 e multiplicados também dão 10.

Os alunos devem formular a questão numa equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, e na forma $x^2 - Sx + P = 0$, onde S representa a soma das duas raízes e P o produto. Desta maneira, a ideia, nesta primeira parte da aula, é que os alunos relembrem métodos de resolver equações do 2º grau.

b) Motivação

Após os alunos relembrarem de todo o processo é a hora de resolver um problema proposto na obra Cardano, publicada em 1545, *Ars Magna*:

Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40.

Após tentarem pelo método de Báskara, os alunos se depararam com o discriminante da equação menor do que zero. Então o professor pede questionar: a equação não tem solução? Não existem ferramentas adequadas para resolver?

c) Mão na massa

A partir da História da Matemática, o professor vai apresentar aos alunos a resolução de equações do terceiro grau, obtida por Cardano e Tartáglia – matemáticos italianos do século XVI.

Seja a equação ao lado, com m e n inteiros. $x^3 + mx = n$

Fórmula de Cardano - Tartáglia: $\mathbf{x = a - b,}$ onde

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \qquad e \qquad b = \sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Demonstração:

$$Considere \quad (a-b)^3 + 3ab.(a-b) = a^3 - b^3$$

$$Seja \quad a - b = x; \quad 3ab = m; \quad a^3 - b^3 = n. \quad Então \quad temos \quad x^3 + mx = n.$$

$$Re solvendo \quad o \quad sistema \quad \begin{cases} 3ab = m \\ a^3 - b^3 = n \end{cases} \quad de \quad incognitas \quad a \quad e \quad b, \quad temos:$$

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \qquad e \qquad b = \sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Problema: resolva a equação $\mathbf{x^3 - 15x = 4}$ pelo método de Cardano - Tartáglia.

(Resp. x = 4, porém, não é possível resolver a equação pelo método)

Nesta hora, após os alunos concluírem que a equação tem solução, o professor pedirá para os alunos discutam e formulem hipóteses, sobre o que está ocorrendo. Por exemplo: Por que não tem solução? O que está atrapalhando a raiz? E se pudéssemos calcular a raiz quadrada de um número negativo?

A ideia é os alunos percebam a necessidade de um novo tipo de número. Então, o professor mostrará para os alunos que para resolver certas equações é necessário introduzir um novo tipo de conjunto numérico, mais amplo que o conjunto dos números reais no qual é possível calcular raízes pares de números negativos. Este conjunto será chamado de Números Complexos. Daí o professor já poderá introduzir o conceito de número imaginário *i*.

Avaliação

Os alunos serão avaliados pela sua participação em sala de aula.

Referências

ANA, C. et al. **Números Complexos**. Campinas: IME UNICAMP, 2014.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Ensino Médio - Matemática. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** BNCC. Brasília: MEC, 2018.

CARDOSO, V.C. **Notas de Aula de Evolução dos Conceitos Matemáticos** – UFABC. 2018.

JULIANO, P. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região oeste do Paraná**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017.

EQUAÇÕES E FUNÇÕES

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 1° GRAU

Yasmin Gama
Victória Raíssa Arantes
Giovanni Gonçales Melcore
Lucas Passarell,
Giovanni Castro Cergol

Ano escolar: 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio

Ementa

Linguagem algébrica: variável e incógnita. Equações polinomiais de primeiro grau. Equivalência de expressões algébricas.

Objetivos

- Compreender a ideia de incógnita, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de variável.
- Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
- Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de primeiro grau, fazendo uso das propriedades da igualdade.
- Introduzir a ideia de equação por meio do equilíbrio das balanças, passando pelos tópicos de igualdade, desigualdade (podendo fazer um breve comentário sobre inequações) e o que é preciso para manter a igualdade da balança ao manipular os pesos.

Recursos empregados

- Lápis, borracha e papel;
- 300 bolas de gude ou 50 chumbinhos de pesca;
- Balança de pratos (16 copos de isopor, 8 cabides, rolo de barbante).

Atividades

Preparação para as Atividades

Esse plano surgiu de uma discussão em grupo sobre maneiras de ensinar equações do primeiro grau usando o recurso à modelagem matemática e atividades investigativas (BARBOSA, 2009; PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2013). Decidiu-se pelo uso do recurso à balança de dois braços como analogia à ideia de equação.

As balanças de braços são montadas utilizando copos de isopor fixados com barbantes presos em cabides pendurados em calhas presas ao teto do Laboratório. Cada balança é disposta no centro de cada mesa ocupada pelos alunos de cada grupo. As mesas são dispostas de maneira a formar grupos de mesma quantidade de alunos em torno das balanças. Aos alunos são distribuídos “pesinhos” constituídos por bolinhas de gude ou chumbinhos de pesca, para realização das diversas atividades propostas. Ao final de cada atividade serão anotados os valores das medidas obtidos por cada grupo de alunos.

Figura 2: Experiência com balanças realizada com estudantes do PIBID

Fonte: acervo próprio

Atividade 1 **-** Pedir para que cada grupo pese algum objeto próximo utilizando pesinhos como unidade de medida.

- Quais são as operações feitas em cada etapa e como elas mantém a igualdade?
- Registrem.

Atividade 2 **-** Passar pelos grupos e acrescentar um número aleatório de pesinhos no copo do objeto escolhido por eles e vedar a boca do copo para que os alunos não saibam a quantidade colocada.

- Como equilibrar a balança? Ou seja, quantos pesinhos devem ser colocados no outro copo?
- Formalizem o que foi feito. Registrem.

Atividade 3 **-** Pesar o objeto equilibrado com os pesinhos e aferir o peso de um pesinho. O que é unidade? O que é incógnita?

Atividade 4 **-** Explicar formalmente na lousa o conceito de equação do primeiro grau e realizar um exercício em conjunto com os alunos na lousa (SILVA, 2014).

Atividade 5 – Propor três exercícios simples de equação para identificar possíveis dificuldades dos alunos, para que ao final da aula seja exposto um problema em que eles possam utilizar equações como ferramenta para solucioná-lo e discutir as resoluções (SILVA, 2014).

Atividade 6 **-** Como tarefa, os alunos devem formular um problema do dia a dia em que pode ser utilizado uma equação para ser solucionado.

Avaliação

A participação dos alunos será avaliada através de relatos escritos que deverão ser entregues, produzidos no decorrer da atividade e das discussões com a sala. Análise das respostas de acordo com a investigação realizada.

Referências

BARBOSA, J.C. Integrando Modelagem Matemática nas Práticas Pedagógicas. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, v. 14, n. 26, p. 17-25, março de 2009. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/5/5. Acesso em: 17 abr. 2019.

PONTE, J. P. BROCADO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de aula.** 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

SILVA, J. A. da. **O Ensino das Equações do 1º Grau no Ensino Fundamental com o uso de Balanças**. 2014. Universidade Federal da Paraíba, Universidade Aberta do Brasil, Araruna, PB. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/1371/1/JAS04102016.pdf . Acesso em: 24 abr. 2019.

TEIXEIRA, B.R.; SANTOS, E.R. Resolução de Problemas e Investigações Matemáticas: Algumas Considerações. **Educação Matemática em Revista**. Brasília, v. 22, n. 53, p. 7-16, jan./mar. 2017. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/549/pdf. Acesso em: 17 abr. 2019.

EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

Paulo Henrique Souza Nakamura

Ano escolar: 9º ano do Ensino Fundamental

Ementa

Fatoração de expressões algébricas. Completamento de quadrado. Resolução de equações do segundo grau. Fórmula de Bháskara.

Objetivos

- Definir equação do segundo grau.
- Apresentar a resolução de equações do segundo grau por fatoração e por completamento de quadrado.
- Apresentar a fórmula resolutiva de equações do segundo grau e oferecer uma demonstração dela

Recursos empregados

Computadores para realização das atividades.

Atividades

Descrição de situação 1:

Objetivos: Introduzir o estudo das equações do segundo grau. Apresentar a resolução por fatoração.
Metodologia: Atividade realizada no computador.
Desenvolvimento: Equações do segundo grau são um assunto de importância prática e que devem fazer parte da bagagem de qualquer estudante do Ensino Fundamental. A BNCC coloca como habilidade desejável nesse nível de ensino

> Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau. (BRASIL, 2018, p. 317)

Tendo isso em vista, a situação 1 busca introduzir os estudantes às equações do segundo grau, capacitando-os a identificar esse tipo de equação e a resolver alguns casos particulares via fatoração.

Essa primeira situação baseia-se no aplicativo “Introdução às equações do segundo grau”, que deverá ser acessada por todos os estudantes através do link <https://www.geogebra.org/m/kavfe38c>.

A primeira parte da aula será dedicada a apresentar a definição de equação do segundo grau. Na realidade, essas equações inserem-se numa família mais ampla, que são as chamadas equações polinomiais, que são da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde os a_i são constantes chamadas de coeficientes e n é um natural não-nulo.

O grau de uma equação polinomial é determinado em função de n. Nas equações do segundo grau, tem-se $n = 2$.

Em seguida, são dados alguns exemplos e contraexemplos de equações do segundo grau, seguidos por alguns exercícios de fixação. Nesse momento é importante que os estudantes compreendam algumas sutilezas presentes na definição dessas equações: que as constantes b e c podem ser nulas; que não podem comparecer, na equação, a incógnita elevada a um expoente maior do que 2 e também que a incógnita não pode aparecer no denominador de uma fração. O professor deve salientar cada um desses pontos.

Após a definição, segue-se a apresentação de técnicas que permitem a resolução de alguns casos particulares. A intenção é cobrir os seguintes casos:

- A equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $c = 0$;
- A equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $b = 0$;
- A equação $(ax)^2 + 2acx + c^2 = 0$.

O primeiro caso pode ser resolvido colocando-se o fator ax em evidência, obtendo assim um produto igual a zero e lembrando-se de que para um produto ser zero basta que um de seus fatores seja zero.

No segundo caso, basta isolar o termo $x^2 = -(c/a)$ e, então calcular a raiz quadrada deste termo, que terá solução real no caso de c ou de a ser negativo.

Já no terceiro caso, pelo produto notável do trinômio quadrado perfeito, tem-se que a equação dada é equivalente a $(ax + c)^2 = 0$ e, como um número ao quadrado é igual a zero se e somente se o próprio número for zero, pode-se concluir que

$$ax + c = 0$$

ou seja, a equação do segundo grau original reduz-se a uma equação do primeiro grau. Segue-se que $x = - c/a$. A dificuldade nesse caso é o de reconhecer o trinômio quadrado perfeito, o que requer domínio da fatoração de expressões algébricas.

Descrição de situação 2:

Objetivos: Apresentar um pouco da história sobre as equações do segundo grau. Apresentar a resolução por completamento de quadrado. Introduzir a fórmula de Bháskara e oferecer uma demonstração elementar dela.
Metodologias: Atividade realizada no computador.
Desenvolvimento: Os métodos de resolução vistos na situação 1 não abrangem todas as equações do segundo grau possíveis. Os outros casos em que existem soluções reais podem ser resolvidos por uma técnica conhecida como completamento de quadrado, ou através de uma fórmula, conhecida popularmente no Brasil como fórmula de Bháskara.

Para apresentar o completamento de quadrado e a fórmula de Bháskara, será utilizado o aplicativo "Completamento de quadrado e a fórmula de Bháskara", que pode ser acessado através do link <https://www.geogebra.org/m/te8f2sde>.

No começo da aula, propõe-se ao professor apresentar alguns aspectos históricos envolvidos na descoberta do completamento de quadrado e da fórmula de Bháskara, salientando-se os nomes de Bháskara (1114 - 1185) e Al-Khowarizmi (c. 780 - c. 850), que fizeram importantes contribuições nesse sentido. Porém, é importante deixar claro que não foi Bháskara, o matemático indiano, o pioneiro no estudo desses métodos, mas sim o árabe Al-Khowarizmi.

Sendo assim, o aplicativo inicia-se mostrando um problema de álgebra que foi resolvido por Al-Khowarizmi com o uso de geometria - aliás, isso era um expediente comum na época, em que ainda não se utilizavam letras para representar as incógnitas. Eis o enunciado do problema:

Qual é o número que, elevado ao quadrado e somado ao seu décuplo, resulta em 39?

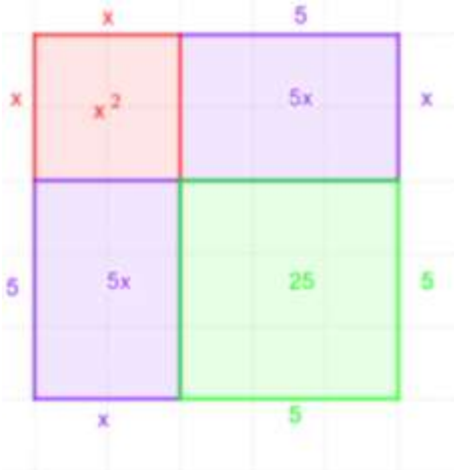
Para resolver o problema, Al-Khowarizmi considerou o quadrado do número desconhecido como sendo a área de um quadrado, e o décuplo do número desconhecido como sendo a soma das áreas de dois retângulos, o que o possibilitou montar a seguinte figura:

Figura 1: Resolução de Al-Khowarizmi

Fonte: própria (2019)

A área dessa figura poligonal vale 39, por hipótese. Em seguida Al-Khowarizmi notou que, acrescentando um quadrado de lado 5 à figura, surgiria um quadrado cuja área seria 39 (área original) mais 25 (área acrescentada), o que dá 64, conforme ilustra a figura abaixo.

Figura 2: Completamento de quadrado



Fonte: própria (2019)

Mas, se a área do quadrado vale 64, então o seu lado vale 8, ou seja: $x + 5 = 8$. Daí, segue-se que $x = 3$, e essa é a solução do problema. Convém salientar que existe outra solução para o problema, a saber, -13. Porém, Al-Khowarizmi não considerava a possibilidade de soluções negativas.

Em seguida, o aplicativo inicia a demonstração da fórmula resolutiva de equações do segundo grau. A demonstração oferecida é totalmente acessível a estudantes que já dominem a fatoração de expressões algébricas e o significado da extração de raízes.

Como o objetivo é isolar a incógnita x, o primeiro passo consiste em subtrair c nos dois membros de $ax^2 + bx + c = 0$, obtendo $ax^2 + bx = -c$. Em seguida, deve-se dividir os dois membros da equação por a, para que o x^2 fique com coeficiente 1:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

A ideia agora é fazer o completamento de quadrado no membro esquerdo da equação; isso é feito comparando $x^2 + (b/a)x$ com a expressão $p^2 + 2pq + q^2$ e encontrando o valor de q^2. Deve-se notar que o x faz o papel de p e (b/a)x faz o papel de 2pq = 2xq, donde q = (b/2a) e consequentemente $q^2 = b^2/4a^2$.

Voltando para a equação $x^2 + (b/a)x = -c/a$, somando $b^2/4a^2$ aos dois membros e fatorando o membro esquerdo, obtém-se

$$x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad \rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

e, supondo que os dois membros da equação sejam não-negativos e tomando a raiz quadrada,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$$

Nesse instante é importante que o professor esclareça o significado da notação $\pm$; em particular, deve-se assegurar que os estudantes não confundam esse símbolo com o símbolo de “aproximadamente igual”, $\approx$.

E finalmente isolando o x,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$$

que é a famosa fórmula de Bháskara.

Essa demonstração tende a ser a parte mais difícil da aula, portanto, recomenda-se ao professor que explique cada passagem da demonstração com calma, mostrando a validade matemática e dando ênfase ao “porquê” de cada uma delas.

Finda a demonstração, são propostos alguns exercícios.

Avaliação

A avaliação será feita levando-se em consideração a participação e o esforço de cada estudante durante a realização da atividade.

Referências

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular - Ensino Fundamental.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 25 ago. 2018.

CARVALHO, S. A; RIPOLL, C. C. Relato de experiência: O pensamento genérico na escola básica. **Zetetiké**. Campinas, v. 21, n. 40, p. 149-161, jul./dez. 2013.

IMENES, L. M; LELLIS, M. **Matemática.** v. 4, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2014.

SILVA, L. P. M. **Demonstração da Fórmula de Bhaskara.** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/demonstracao-formula-bhaskara.htm. Acesso em: 25 ago. 2019.

FUNÇÕES E ANÁLISE DE PADRÕES

Giovanni Castro Cergol

Ano escolar: 9º ano do Ensino Fundamental

Ementa

Tabelas a valores reais; Plano Cartesiano; Equações de Primeiro Grau; Padrões numéricos e não numéricos

Objetivos

- Promover a capacidade de usar tabelas para expressar relações funcionais e descrever padrões numéricos ou não.
- Entender propriedades fundamentais de funções.
- Compreender que elemento do domínio tem uma imagem.
- Traduzir tabelas em pontos no plano cartesiano e vice-versa.
- Usar a leitura de gráficos em barra como ponte entre tabela e gráfico de linha no plano cartesiano.
- Aplicar conhecimento da álgebra para identificar padrões (conexão com estatística.

Recursos empregados

Lousa e giz para tirar dúvidas, escrever detalhes e acompanhar nas dinâmicas. Slides para apresentar gráficos. Papel para os alunos produzirem os gráficos.

Atividades

Descrição de situação 1:

Sugerir montagem de tabelas e tradução em gráfico de barra.

Objetivos:

- Relembrar o funcionamento de tabelas
- Promover ideias fundamentais de função através do conhecimento prévio de tabelas.

Metodologia:

O professor faz uma ou as duas sugestões*. Os dados obtidos serão organizados em tabelas tanto no caderno do aluno quanto na lousa. Enquanto os dados são organizados o professor realça as características funcionais das tabelas de forma implícita.

Desenvolvimento:

*As sugestões serão: quantos alunos assistiram aos filmes de um dado conjunto que, novamente, pode ser proposto pelos alunos ou pelo professor escolhidos no momento pela internet. Este tema serve para exemplificar um domínio de função que não seja numérico. A segunda sugestão aplicável é ordenar os alunos e tomar a distância deles até a porta em passos. Este exemplo vem com o propósito de indicar que algumas funções tem a capacidade de descrever um certo espaço de maneira abstrata, dando abertura também ao tópico de padrões e generalização.

Durante a apresentação das tabelas é importante realçar que há um conjunto a ser avaliado (no caso seriam os nomes dos filmes e os alunos) que será implicitamente o domínio. Também convém questionar se poderíamos fazer essas tabelas para todo o "espaço" (todos os filmes que existem ou todos os alunos). Com isto pode-se diferenciar o Domínio do Contradomínio na linguagem aplicada sem, necessariamente, usar esses termos. Por exemplo, o Contradomínio possui os "valores" ou as "qualidades" dos "objetos" ou "membros" ou "carinhas" do Domínio.

Descrição de situação 2:

Objetivos:

- Integrar o uso dos celulares ou tecnologias na aula.
- Realçar que os gráficos de barras são apenas pontos no plano cartesiano.

Metodologia:

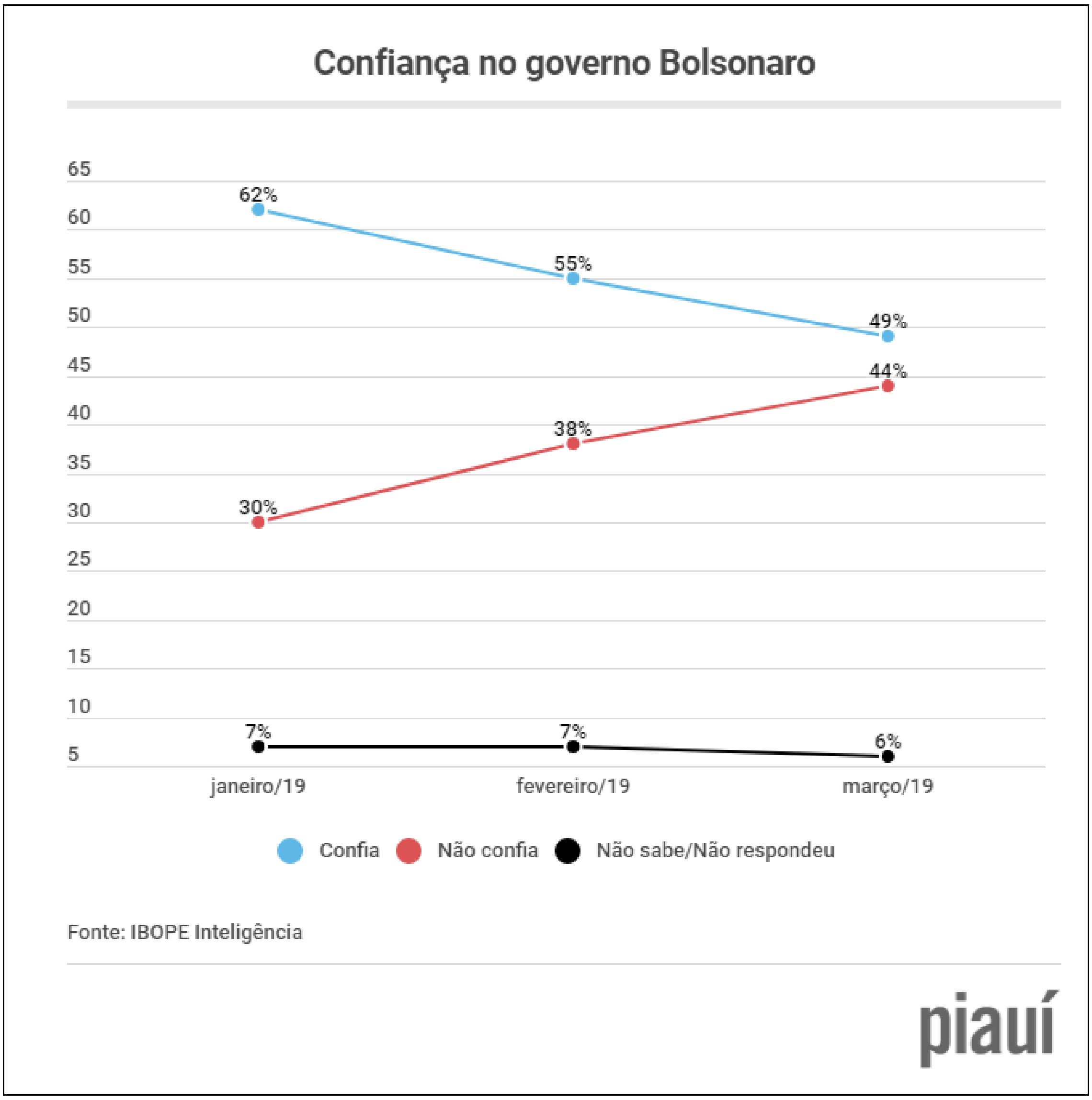
O professor pedirá aos alunos que busquem gráficos de barra na internet ou dados que possam ser expostos desta forma. Com os gráficos encontrados o professor fará a ponte entre uma representação e outra. O professor pode usar os dados coletados em sala para reforçar as estratégias apresentadas. A ideia é relembrar do plano cartesiano e que é com isto que estão trabalhando.

Desenvolvimento:

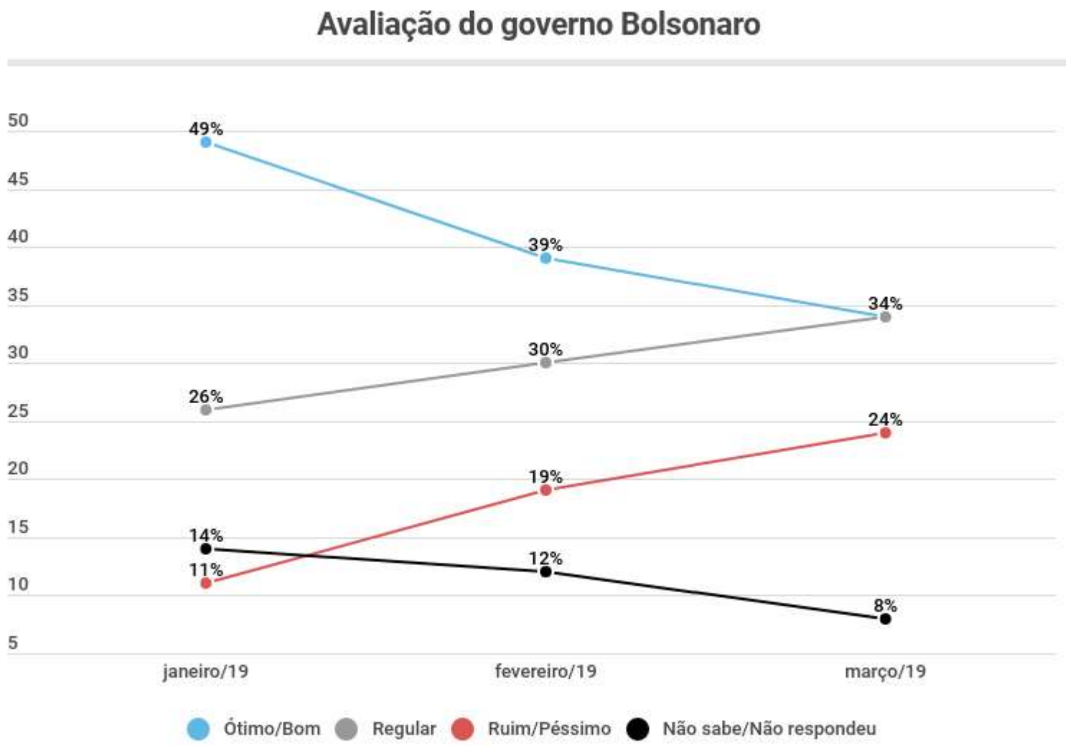
Será pedido aos alunos acharem pesquisas ou gráficos de barra ou de linha para promover uma discussão do que eles entendem por esses termos. Reproduzindo os gráficos na lousa e fornecendo aos alunos cópias impressas dos gráficos abaixo, o professor pedirá que os alunos troquem os gráficos de modalidade (de barra para linha ou para pontos no plano) da forma que quiserem. Avaliando essas técnicas empregadas, o professor apresentará, na lousa, os procedimentos e promoverá comentários sobre qual modalidade é adequada para cada forma de informação.

De maneira análoga, o professor irá pedir que os alunos troquem os eixos, isto é, troque tanto as informações dispostas na horizontal com as da vertical, a orientação e posição dos eixos do gráfico. O objetivo é notar que de qualquer maneira esses são fatores que interferem na apresentação e visualização das informações. Essas trocas servem, tanto para possibilitar a capacidade de permitir que o aluno consiga abstrair a informação presente, como que a maneira como se dispõe os dados é criativa e analítica, não é um modelo muito estrito. Cabe a quem produz o gráfico julgar e compreender como se deseja que a leitura seja feita.

Apresentaremos os seguintes gráficos que apresentam dados relevantes sobre a realidade brasileira no projetor para reforçar que as escolhas de coordenadas foram feitas com cuidado, de forma a ajudar na leitura.



Confiança no governo Bolsonaro
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
62%
55%
49%
44%
38%
30%
7%
7%
6%
janeiro/19
fevereiro/19
março/19
Confia
Não confia
Não sabe/Não respondeu
Fonte: IBOPE Inteligência
piauí



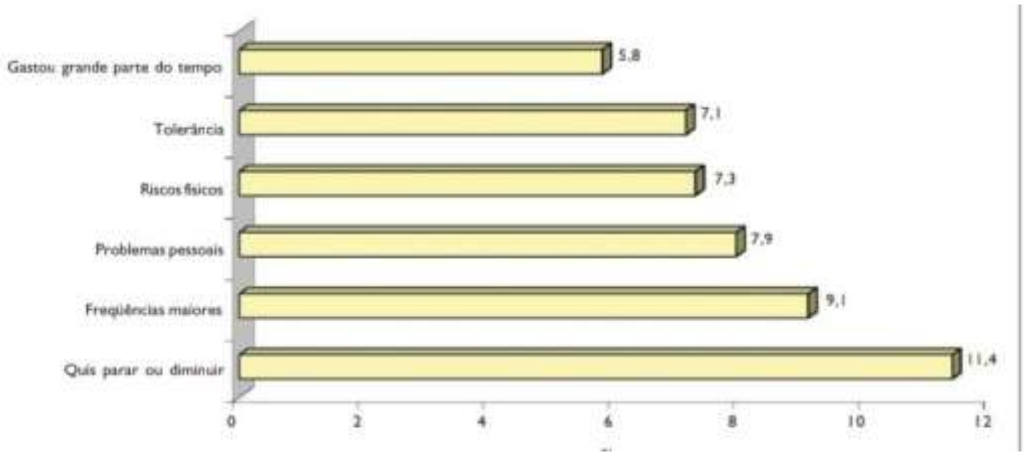
Fonte: IBOPE Inteligência

Tabela 18: Síntese das prevalências sobre as respostas quanto à presença dos diferentes componentes da dependência (sinais/sintomas) no último ano, atribuídos ao uso de Álcool nas 108 cidades do Brasil, com mais de 200 mil habitantes.

PROBLEMAS ATRIBUÍDOS AO USO DE ÁLCOOL* (último ano)	FAIXAS ETÁRIAS (ANOS EM %)				TOTAL
	12 a 17	18 a 24	25 a 34	≥35	
1.Gastou grande parte do tempo	2,6	8,0	6,0	5,7	**5,8**
2.Freqüências maiores	4,3	12,9	11,9	7,6	**9,1**
3.Tolerância	4,2	13,0	8,9	5,4	**7,1**
4.Riscos físicos	3,5	12,4	9,5	5,5	**7,3**
5.Problemas pessoais	5,7	12,0	10,5	6,1	**7,9**
6.Quis parar ou diminuir	7,8	12,1	14,0	10,8	**11,4**

* **Problemas decorrentes ao uso de álcool:**

1. Gastou grande parte do tempo para conseguir álcool, usar ou se recobrar dos efeitos?
2. Usou quantidades ou freqüências maiores do que pretendia?
3. Tolerância (maior quantidade para produzir os mesmos efeitos)?
4. Riscos físicos sob efeito ou logo após o efeito de álcool?
5. Problemas pessoais (familiares, amigos, trabalho, polícia, emocionais)?
6. Quis diminuir ou parar o uso de álcool?



Descrição de situação 3:
Expor padrões e sugerir que os alunos ponham os pontos e lembrem do gráfico linear

Objetivos:

- Realçar o fator analítico das funções, ou seja, a capacidade que elas têm de explicar ou realçar características do domínio.
- Relembrar a utilidade da álgebra no estudo de funções

Metodologia:

Reusar o exemplo de distância da porta e ir registrando valores para encontrar os padrões numéricos. Traçar sobre o padrão obtido (forçosamente linear).

Expor o conceito de Variáveis Dependentes do conteúdo de funções.

Desenvolvimento:

O professor ficará a uma distância da porta (medida em centímetros). Ele dá um passo para trás e mede a distância que está da porta. Repete-se esse processo e os alunos registram a distância do professor da porta num plano cartesiano que o professor reproduzirá na lousa. Após essa reprodução na lousa, o professor pontua que há uma reta a ser desenhada, fazendo uma associação com inferência e estatística.

O professor pergunta qual ferramenta da matemática que descreve esse comportamento. Se os alunos não sugerirem a equação da reta, o professor plota o gráfico deste tipo de equação (usando o *site* Desmos) e aponta que ele é compatível com o comportamento descrito na atividade.

Usando a medição do passo do professor se expõe que a distância da porta é um valor controlado pelos passos que o professor dá. Para se encontrar a reta que descreve a função se usará o processo de ir adicionando mais pontos ao gráfico plotando pontos para valores fracionados de passos.

Nesse momento o professor afirma que vai supor que os seus passos são todos regulares para simplificar a análise (considero valioso deixar explícito o processo matemático e científico de usar hipóteses para realizar uma modelagem) e usa uma função afim para obter os coeficientes sem, em nenhum momento, usar o formato “f(x)=ax+b”.

Avaliação

Conferir se as traduções entre as diferentes realizações/representações dos dados em suas relações funcionais estão corretas. Participação dos alunos na atividade (se produziu ou não as atividades sugeridas).

Referências

DOMINGUEZ, G. L. BARBOSA, J. C. Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, p. 315-338, 2017.

MOREIRA, M. A. O que é afinal aprendizagem significativa**?** UFMT, 2012. Disponível em: http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf. Acesso em: 20 abr. 2019

PIAUÍ. Disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/bolsonaro-desce-ladeira/ Acesso em: 20 abr. 2019.

FUNÇÃO MODULAR

Leonardo Araujo Ferreira

Ano escolar: 1º Ano do Ensino Médio

Ementa

Valor absoluto, reta numérica, equações, funções, funções definidas por duas sentenças, função modular.

Objetivos

Compreender o significado de módulo de um número real; associar o gráfico de uma função modular como uma função definida por duas sentenças.

Recursos empregados

Recurso expositivo, seja ele digital ou giz e lousa; Atividades impressas (anexos); materiais para anotação (alunos).

Atividades

O tema função modular envolve assuntos variados que juntos culminam no tópico principal. Este plano de aula leva tal evolução em consideração, de modo que seu progresso também passará pelos diferentes conteúdos envolvidos. Revisar conteúdos anteriores contribui para a total apreensão e segurança do aluno quanto ao conteúdo. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. (BRASIL, 1999).

Ao pensar em uma sequência didática ideal para a função modular, consideramos que o assunto introdutório seja o conceito de valor absoluto. Este tema nos remete à reta numérica e utiliza habilidades já conhecidas pelos estudantes, desde o 6º ano, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> (EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.
> (EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. (BRASIL, 2018).

A distância entre os pontos na reta tende a ser de fácil e rápida compreensão, visto que é um assunto trabalhado anteriormente, mas ainda assim é um ponto relevante, pois ao ser revisado equipara o nível de conhecimento prévio necessário.

Neste momento, algumas questões devem ser corretamente respondidas pelos alunos para que se possa avançar para o próximo conteúdo. As questões não têm caráter avaliativo, mas sim diagnóstico, cujo objetivo é verificar a distância entre pontos foi bem compreendida e se são capazes de perceber que este valor não pode ser negativo, independentemente de quais sejam estes pontos. Passada esta etapa, o professor pode, por fim, estabelecer o conceito de valor absoluto como a distância entre o valor determinado e o 0.

A próxima etapa é a passagem do termo ‘valor absoluto’ para ‘módulo’. Esta passagem fica caracterizada pela notação do módulo como duas barras paralelas, por exemplo:

|a| é o símbolo para o módulo de a.

Com isto, o professor consegue, em conjunto com a turma, levantar questionamentos sobre equações modulares. Neste momento, o ponto principal é conduzir os alunos através de questionamentos para que concluam que podem existir mais de uma solução e que algumas equações envolvem condições, como:

$$|x-3|+4x=8$$

Evidenciar que $|x-3|=8-4x$, ou seja, $8-4x$ deve ser positivo ou nulo, o que levaria à inequação $8-4x\geq 0$, e, consequentemente, $x\leq 2$ é uma condição.

A partir daí, basta conduzir os alunos às duas soluções e verificar quais delas se enquadram na condição determinada anteriormente.

$$|x-3|=8-4x \qquad \text{ou} \qquad |x-3|=-(8-4x)$$

Neste momento, exercitar tal conteúdo parece interessante para uma melhor compreensão, além de favorecer a fixação. Por isto, há uma sugestão de atividade em anexo.

Prosseguindo com a sequência didática, há uma boa oportunidade de relacionar equações com funções modulares (bom momento para evidenciar as diferenças entre estes dois conteúdos). Para este momento, há uma segunda atividade que instrui o aluno, nos moldes de um relatório procedimental, a perceber as características gráficas de uma função de duas sentenças e, mais especificamente, de uma função modular.

Por fim, apresenta-se a definição de função modular como uma função definida por duas sentenças.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

As funções de duas sentenças têm fundamental importância neste plano, pois faz parte do currículo descrito na BNCC, segundo a habilidade descrita a seguir:

> (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças, em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018)

Avaliação

Será avaliada a participação dos alunos em classe.

Referências

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** – matemática. Brasília: MEC, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 12 jul. 2018.

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio.** Brasília: ME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf. Acesso em: 27 nov. 2019.

ANEXO

Equações Modulares

1. Determine as soluções para as equações abaixo, levando em consideração as condições existentes.

   a) $|2x-1| = x-1$

   b) $|x| - 9 = 2$

   c) $\frac{|2x+1|}{2} = 4$

2. Encontre o conjunto solução para a equação $|x|^2 - 2|x| - 3$.

3. Represente, graficamente na reta numérica, o conjunto solução das seguintes inequações:

   a) $|x+1| \geq 4$

   b) $|x+1| < 4$

Função definida por duas sentenças

4. Complete as tabelas a seguir.

x	$f(x) = -x$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	

x	$f(x) = x^2$
0	
1	
2	
3	
4	
5	

5. Na malha quadriculada abaixo, esboce os gráficos das funções do exercício anterior mesmo plano cartesiano.

6. Considere agora a função $f(x) = -x$ apenas para $x < 0$. Considere também a função $f(x) = x^2$ apenas para $x \geq 0$. Como podemos descrever esta função? Esboce o gráfico.

7. Complete as tabelas a seguir.

x	$f(x) = -x$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	

x	$f(x) = \lvert -x \rvert$
1	
2	
3	
4	
5	

8. Na malha quadriculada abaixo, esboce o gráfico da função do exercício anterior no plano cartesiano.

9. Utilizando a definição de módulo, como podemos representar a função do exercício anterior utilizando duas sentenças? Esboce no mesmo plano cartesiano o gráfico das duas sentenças.

GEOMETRIA ANALÍTICA

DISTÂNCIA ENTRE PONTOS

Felipe H. Minhoso

Ano escolar: 3º ano do Ensino Médio

Ementa

Teorema de Pitágoras, distância entre pontos no plano cartesiano

Objetivos

Este plano tem por objetivo oferecer subsídios para que os alunos possam compreender o conceito de distância entre pontos que é a base inicial para diversos conceitos e aplicações da Geometria Analítica.

Recursos Empregados

Software *GeoGebra*, malha quadriculada, projetor

Atividades

1. Introdução

De acordo com a Base Nacional Curricular Comum (BNCC):

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2018)

Desta forma, esta proposta de trabalho permite, em concordância com a BNCC, um enfoque na investigação, auxiliada por recursos tecnológicos para que os alunos construam o conceito e a compreensão da distância entre dois pontos no plano cartesiano e com isso, atender ao exposto na competência 3 da BNCC:

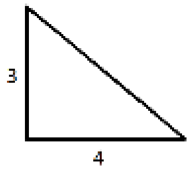
> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018)

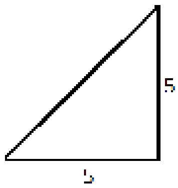
A geometria analítica cria conexões entre a geometria e álgebra e os estudos iniciais deste tema estão ligados ao matemático René Descartes (1596 – 1650), criador do sistema de coordenadas cartesianas. Uma característica da geometria analítica é a capacidade de propiciar a algebrização de problemas geométricos, desta forma, transforma a matemática numa ciência mais dinâmica que permite relações entre suas áreas. Logo, o conceito central deste plano propicia um conhecimento interpretativo da distância entre pontos que é primordial para toda construção da geometria analítica vista no ensino médio.

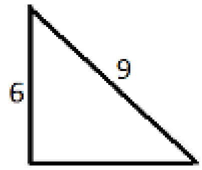
2. Atividades desenvolvidas

1. A aula será iniciada com a discussão sobre o conhecimento prévio dos alunos acerca do Teorema de Pitágoras, discutindo em sala alguns exemplos para revisar o assunto, que servirá de subsídio para as atividades relativas ao conteúdo deste plano de aula.

Os exemplos serão estes:







2. Em seguida, será apresentada, no projetor, a imagem abaixo para que os alunos discutam quais são os pares ordenados dos pontos destacados. Essa discussão é essencial para que todos os alunos tenham a oportunidade de esclarecer suas dúvidas acerca da categorização de pares ordenados a partir do plano cartesiano, o que se faz fundamental para as próximas atividades.

Figura 1: Coordenadas Cartesianas

Fonte: http://profeeli7.blogspot.com/2017/02/

3. Neste momento, os alunos, em duplas, utilizarão o software *GeoGebra* e receberão instruções de como utilizar o programa para construir algumas imagens e verificar resultados apresentados.

4. Após as orientações, as duplas receberão o seguinte enunciado aberto:
   - ATIVIDADE 1: No *GeoGebra*, marque os seguintes pontos: A = (0,0); B = (4,0) e C = (4,3) e descubra qual o valor das distâncias entre os pontos A e B, B e C, A e C.

- ATIVIDADE 2: Agora, marque os pontos D = (-5,-3); E = (-11,-3) e F = (-11,-11) e encontre também a distância entre os pontos D e E, E e F, D e F.
- ATIVIDADE 3: Por fim, marque os pontos G = (2,-6) e H = (-1,-2) e descubra a distância entre estes dois pontos.

<u>Importante salientar que os alunos deverão ser acompanhados neste processo, sendo talvez necessário fazer intervenções em cada dupla ou até mesmo com toda a turma para que sejam direcionados, através de questionamentos que os façam pensar em caminhos pra encontrar as respostas solicitadas.</u>

5. Ao fim da atividade, os alunos serão orientados a utilizar o recurso de Distância, Comprimento do *GeoGebra* para que possam comparar com seus resultados. Neste momento, os alunos serão motivados, nos casos em que houver divergência entre o valor encontrado e o valor mostrado pelo programa, a voltar em suas anotações para que discutam os possíveis erros em seus raciocínios e a busca por novos caminhos para chegar ao valor apresentado pelo programa.

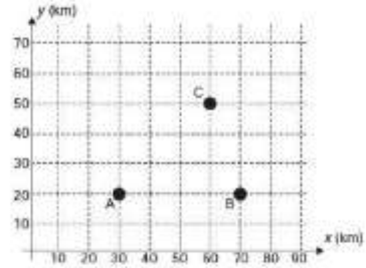
6. Posteriormente, será aberto um momento de diálogo com toda a turma, para discutir as dificuldades, erros e acertos. Este momento deve ser utilizado para que conjecturas de possíveis caminhos para a solução sejam lançadas e discutidas por toda a sala. Deve-se estar aberto para todos os possíveis direcionamentos encontrados pelos alunos e o professor lançará perguntas para que os próprios alunos façam a reflexão acerca da validação das conjecturas que fizeram. Como a intenção é que numa atividade posterior, os alunos façam a dedução da fórmula utilizada para calcular a distância entre dois pontos, caso não sejam levantadas conjecturas relacionadas com o Teorema de Pitágoras e a construção de um triângulo retângulo para calcular as distâncias, o professor deverá levantar questionamentos que levem os alunos nesta direção, para que assim tenham subsídios para as próximas atividades.

7. Neste momento, os alunos receberão uma atividade que consiste em um estudo dirigido, que deve ser feito em dupla para que possam discutir os resultados. A atividade está descrita no anexo.

8. Após a conclusão da atividade, os alunos terão deduzido a fórmula da distância entre dois pontos e com isso poderão praticar sua aplicação com o exercício proposto abaixo:

a) Encontre a distância entre os pares de pontos:
A = (1,2) e B = (2,-3), C = (-1,-3) e D = (-2,-5), E = (2,-4) e F = (-3,-1).
b) Calcule o valor da coordenada x do ponto A = (x,2), sabendo que a distância entre A e B = (4,8) é 10.
c) (UFRGS – adaptado) Se um ponto P do eixo das abscissas é equidistante dos pontos A(1,4) e B(-6,3), qual valor da abscissa de P?
d) (ENEM – 2013) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão

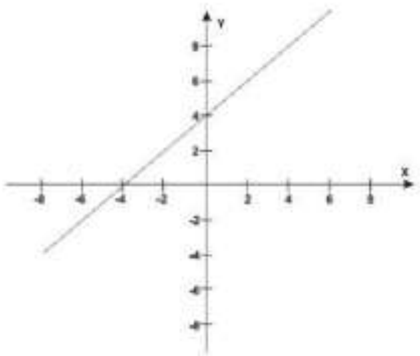
representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

A) (65; 35) B) (53;30) C) (45;35) D) (50;20) E) (50;30)

e) (ENEM – 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta da equação y = x+4 representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P = (-5,5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação de metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

A) (-5,0) B) (-3,1) C) (-2,1) D) (0,4) E) (2,6)

Estes exercícios de fixação serão propostos como atividade a ser entregue ao docente, para que possa ser feita avaliação da compreensão dos alunos acerca do conceito de distância entre dois pontos e sua utilização como ferramenta para resolver problemas, tendo em vista que este conceito será importante subsídio para outros conceitos na matéria de geometria analítica.

3. Conclusões

O conceito de distância entre pontos, apesar de simples, tem grande importância para diversos outros resultados na geometria analítica e este plano de aula busca dar ferramentas suficientes para que os alunos possam desenvolver as atividades, revisitando alguns conceitos para no final conseguir deduzir a fórmula utilizada para encontrar a distância entre dois pontos.

Com isso, a intenção deste direcionamento das aulas é dar autonomia e motivação para a exploração e descoberta de conceitos matemáticos pelos alunos, de modo que estimular o raciocínio matemático e a desenvoltura dos mesmos. Alguns exercícios de fixação foram postos para que os estudantes, após a descoberta da fórmula, possam aplicá-la com propriedade, sabendo as razões pelas quais estão utilizando-a.

Avaliação

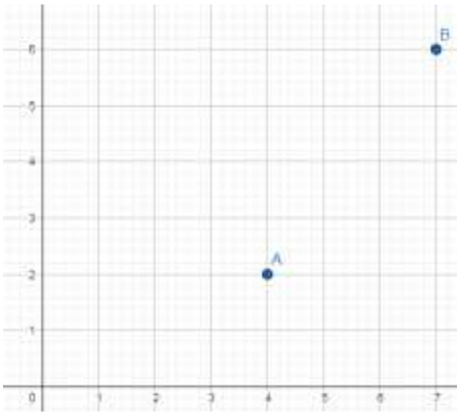
O conteúdo não se encerra em si, devendo servir de base a construção de outros conhecimentos. A avaliação deverá ser no sentido de verificar a compreensão e domínio da fórmula da distância entre pontos, para que, com isso, os próximos conteúdos de geometria analítica sejam também compreendidos. O avanço das atividades propostas por este plano deve acontecer na medida em que o docente perceber que os alunos compreenderam as etapas anteriores.

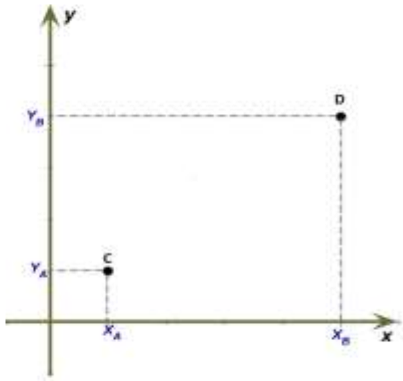
Referências

BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica – um tratamento vetorial.** 3. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2005.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** – Ensino Médio. Brasília: ME, 2018. Disponível em: http://bit.ly/2RmNUTT. Acesso em: 25 nov. 2019.

SILVA, S.F. **Geometria Analítica: caminhos para aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

<table>
<tr><th colspan="2">ANEXO: ATIVIDADE</th></tr>
<tr><td>Encontrar a distância entre os pontos A e B


Quais são as coordenadas dos pontos A e B?
______________________________</td><td>Encontrar a distância entre os pontos C e D


Quais são as coordenadas dos pontos C e D?
______________________________</td></tr>
<tr><td>Qual a coordenada de um ponto P qualquer para que o triângulo ABP seja retângulo e AB seja hipotenusa?

Qual a distância entre os pontos A e P?
______________________________</td><td>Qual a coordenada de um ponto Q qualquer para que o triângulo DCQ seja retângulo e CD seja hipotenusa?

Qual a distância entre os pontos C e Q?
______________________________</td></tr>
<tr><td>Qual a distância entre os pontos B e P?
______________________________</td><td>Qual a distância entre os pontos D e Q?
______________________________</td></tr>
<tr><td>Qual a distância entre os pontos A e B?
______________________________</td><td>Qual a distância entre os pontos C e D?
______________________________</td></tr>
</table>

DETERMINANTES E ÁREAS

Yasmin Gama

Ano escolar: 2º ano do Ensino Médio

Ementa

Determinantes; Área de Polígonos.

Objetivos

Objetivo Geral: identificar a relação entre determinantes e área de polígonos;

Objetivos Específicos:

1. Ensinar como calcular áreas usando determinantes;
2. Mostrar uma aplicação de determinantes de matrizes 2×2;
3. Reforçar a interpretação geométrica de determinantes.

Recursos empregados

- Computadores com o software *GeoGebra*;
- Lápis, borracha e papel.

Atividades

1ª aula - Familiarização com o software *GeoGebra*

Nessa aula, os alunos serão levados para o laboratório de informática, para se familiarizar com o *software GeoGebra*. Devem aprender a construir: ponto, segmento, polígono, além de aprender os comandos para calcular a área do polígono.

2ª aula - Calculando área de polígonos com determinantes

Nessa aula, depois dos alunos já terem contato com o *software GeoGebra*, eles terão que realizar uma atividade investigativa para relacionar determinantes e áreas de polígonos. Serão divididos em duplas, mas em computadores diferentes, para possibilitar a investigação de ambos. Na medida em que realizam a atividade é interessante o professor reservar uma parte do tempo para discussão das conclusões obtidas pelas duplas com a turma inteira.

Atividade 1:

Existe um método de calcular área de polígonos por determinante de matriz.
Por exemplo:
A área do paralelogramo formado por estes quatros pontos…

- *A origem (0,0)*
- *O ponto* (a_{11}, a_{21})
- *O Ponto* $(a_{12,}a_{22})$
- *O Ponto* $(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$

... Coincide com o valor absoluto do determinante

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\|$$

Verifique essa relação criando, no GeoGebra, diferentes quadriláteros, calculando sua área e o determinante indicado acima.
O que você percebeu?
Se não tiver nenhum vértice na origem, o valor da determinante coincide com a área do paralelogramo? Se sim, por quê? Se não, como você encontraria a área deste paralelogramo?

Observação: Para calcular determinantes no GeoGebra, utilize o comando determinante ({{1,2}, {3,4}}), neste caso é uma matriz 2x2, com termos consecutivos.

Atividade 2:
1- Como você utilizaria o método anterior para calcular a área de um triângulo com um dos vértices na origem?

2- Como você calcularia a área de um triângulo qualquer (sem nenhum vértice na origem?

Para reflexão:
Teria como utilizar o método anterior para cálculo de volume de poliedros? Como seria?

3° aula - Fechamento da atividade com levantamento geral das discussões

Nessa aula o professor fará um apanhado do que foi discutido na aula anterior (ou finalizar a atividade, caso não tenha dado tempo), levantando as hipóteses dos alunos e pedindo para que verifiquem com todos os alunos, até chegarem há um consenso das “fórmulas” para o cálculo da área de polígonos através de determinantes.

Abaixo segue um roteiro (FIRER, 2018) disponibilizado no site Matemática e Multimídia UNICAMP, com as demonstrações das atividades anteriores. Neste site também se encontram dois *softwares* que podem ser levados para a sala de aula, para trabalhar os conceitos de área e determinantes.

1 Área de triângulos

ATIVIDADE

Nesta atividade verificamos experimentalmente como podemos determinar a área de um triângulo com um vértice na origem como sendo metade do (valor absoluto) do determinante da matriz 2×2 cujas entradas são coordenadas dos vértices não nulos. Esta fórmula pode ser verificada com o auxílio da geometria analítica, mas existem métodos mais elegantes para fazer a demonstração.

Considere $\triangle_{OAB}$ o triângulo com vértices

$$O=(0,0),\ A=(a_1,a_2) \text{ e } B=(b_1,b_2)$$

e seja $\square_{OXYZ}$ o menor retângulo contendo $\triangle_{OAB}$, com duas arestas nos eixos coordenados. Esse retângulo tem vértices $O=(0,0)$, $X=(a_1,0)$, $Y=(a_1,b_2)$ e $Z=(0,b_2)$.

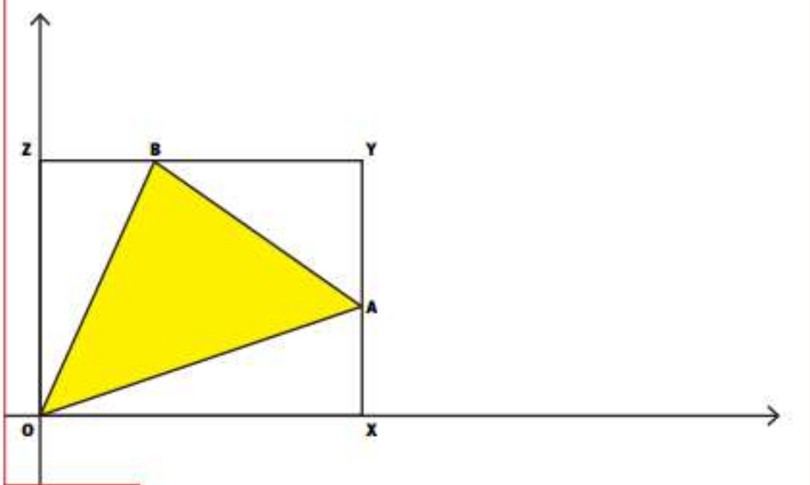


FIG. 1

Temos que :

$$\begin{aligned}\text{Área}(\square_{OXYZ}) = \text{Área}(\triangle_{OAB}) + \text{Área}(\triangle_{OXA}) + \\ \text{Área}(\triangle_{ABY}) + \text{Área}(\triangle_{OZB})\end{aligned}$$

Temos então, além do triângulo no qual estamos interessados (triângulo $\triangle_{OAB}$), um retângulo e três triângulos retângulos, cujas áreas são:

$$\text{Área}(\square_{OXYZ}) = a_1 b_2,\ \text{Área}(\triangle_{OXA}) = \frac{a_1 a_2}{2}$$
$$\text{Área}(\triangle_{ABY}) = \frac{(b_2-a_2)(a_1-b_1)}{2},\ \text{Área}(\triangle_{OZB}) = \frac{b_1 b_2}{2}$$

Isolando $\text{Área}(\triangle_{OAB})$ na primeira equação e substituindo os valores conhecidos obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\triangle_{OAB}) &= \\
&= \text{Área}(\square_{OXYZ}) - \text{Área}(\triangle_{OXA}) - \text{Área}(\triangle_{ABY}) - \text{Área}(\triangle_{OZB}) \\
&= a_1b_2 - \frac{a_1a_2}{2} - \frac{(b_2-a_2)(a_1-b_1)}{2} - \frac{b_1b_2}{2} \\
&= a_1b_2 - \frac{a_1a_2}{2} + \frac{b_1b_2}{2} + \frac{a_1a_2}{2} - \frac{a_1b_2}{2} - \frac{a_2b_1}{2} - \frac{b_1b_2}{2} \\
&= a_1b_2 - \frac{a_1b_2}{2} - \frac{a_2b_1}{2} \\
&= \frac{a_1b_2}{2} - \frac{a_2b_1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sugerimos que, caso os alunos tenham dificuldade com o conteúdo desta atividade, eles sejam convidados a resolver primeiro o software Determinantes e Áreas, no qual esse conteúdo é tratado com maior detalhamento.

ATIVIDADE

2 Área de um triângulo qualquer

Nesta atividade vemos como calcular a área de um triângulo qualquer utilizando determinantes. Se na primeira atividade o método foi apresentado acompanhado de evidências meramente circunstanciais (exemplos que o aluno pode trabalhar), nesta, utilizando o resultado obtido para triângulos com um vértice na origem, desenvolvemos um método para triângulos quaisquer, apresentando todos os passos de uma verdadeira demonstração. Apresentamos a área de um triângulo qualquer como soma e diferença de áreas de três triângulos que têm um vértice na origem e, a partir disso, obtemos a área como soma de determinantes.

É necessário realçar a necessidade de orientar os vértices do triângulo em sentido anti-horário, não importando qual o vértice inicial.

Destacamos ainda que o resultado obtido é conhecido no Ensino Médio através de uma fórmula mnemônica: Se os vértices do triângulo têm coordenadas $A=(x_a,y_a)$, $B=(x_b,y_b)$ e $C=(x_c,y_c)$, então

$$\text{Área}(\triangle_{ABC}) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{pmatrix}$$

Essa fórmula é equivalente àquela que apresentamos, bastando desenvolver o determinante acima para obter

$$\text{Área}(\triangle_{ABC}) = \frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{pmatrix}\right).$$

Avaliação
Participação dos alunos no desenvolvimento da atividade e discussão com a turma. Verificar se ficou clara a intenção das aulas, com o recolhimento das folhas, nas quais os alunos fizeram o rascunho das conjecturas.
Referências FERREIRA, Fábio Marson; SPINELLI, Walter. **Propriedades dos determinantes e o cálculo da área de triângulos: exemplos significativos.** [*S. l.*], 2017. Disponível em: http://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/RPM%2077%20-%20Propriedades%20dos%20determinantes%20e%20o%20clculo%20da%20rea%20dos%20tringulos.pdf. Acesso em: 7 abr. 2019. FIRER, Marcelo. **Determinantes e Polígonos.** [*S. l.*], 2018. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1227. Acesso em: 7 abr. 2019. FIRER, Marcelo. **Determinantes e Áreas**. [*S. l.*], 2018. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1226. Acesso em: 7 abr. 2019.

TEMA INTERDISCIPLINAR

GRAVITAÇÃO: TERRA PLANA
MÉTODO CIENTÍFICO

Giovanni Castro Cergol
Katarina Duarte Fernandes
Paulo Henrique Souza Nakamura
Rodrigo Vinicius Lunardi

Ano escolar: 1º ano do Ensino Médio

Ementa

- Matemática: Conversão de unidades e notação científica;
- Física: Simetria da gravitação;
- Português: Escrita científica;
- História: Evolução dos conceitos sobre gravitação.
- Em termos da tipologia de conteúdos, segundo Zabala (2002):
    - *Conteúdos Conceituais:* Física. Mecânica. Gravitação. Geometria. Óptica. Conversão de Unidades. Notação Científica.
    - *Conteúdos Procedimentais*: pesquisa com uso de tecnologias móveis. Registros escritos. Uso de matemática na resolução de problemas de Física.
    - *Conteúdos Atitudinais:* coordenação em grupos. Disposição para debater e argumentar.

Objetivos

- Familiarizar os estudantes com o método científico e com a construção do conhecimento científico.
- Compreender implicações e questionar a consistência de modelos físicos.
- Competências e habilidades da matriz de referência do ENEM (BRASIL, 2012):

Matemática
C3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
H10: Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11: Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13: Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
Ciências da Natureza
C1: Compreender as ciências naturais e as tecnologias a elas associadas como construções humanas, percebendo seus papéis nos processos de produção e no desenvolvimento econômico e social da humanidade.
H3: Confrontar interpretações científicas com interpretações baseadas no senso comum, ao longo do tempo ou em diferentes culturas.
C6: Apropriar-se de conhecimentos da Física para, em situações-problema, interpretar, avaliar ou planejar intervenções científico-tecnológicas.
H20: Caracterizar causas ou efeitos dos movimentos de partículas, substâncias, objetos ou corpos celestes.

Recursos empregados

- Objetos para ilustração das discussões em sala (modelos da Terra, objetos de diferentes pesos, dentre outros);

- Equipamento de Telefonia Móvel (Celular);
- Instrumentos de cálculo;
- Folhas para registros.

Atividades

As atividades são apresentadas em momentos e, quando necessário algum detalhamento, são apresentados em quadros.

1º Momento da aula

Breve revisão dos conteúdos: aceleração (queda de objetos no vácuo), leis de Newton e o modelo de terra esférica. Esta revisão tem o propósito de verificarmos os conhecimentos prévios dos alunos, saber quais conteúdos podem ser tratados como familiares a eles, ou não, e para relembrar assuntos que podem ser importantes no decorrer da atividade proposta. O Quadro 1 apresenta uma sugestão de roteiro para essa abordagem.

Quadro 1 – Roteiro sugerido para a avaliação de conhecimentos prévios dos alunos

Revendo conceitos importantes com a sala de aula

(Os professores devem deixar que os alunos falem o que lembram)

Aceleração: variação de velocidade/intervalo de tempo

Experimento de queda de corpos de Galileu: Dois corpos com massas diferentes em queda livre no vácuo, a partir da mesma altura, chegam ao mesmo tempo no chão.

Aceleração da gravidade: 9,8 m/s²

Barcos no horizonte.

Leis de Newton.

O que é método científico?

Teorias de gravitação: consideram um modelo de Terra com simetria esférica.

Fonte: elaborado pelos autores

2º Momento da aula

Pedir para que os alunos se organizem em grupos de até 6 pessoas. Propor que os grupos reflitam, pesquisem e opinem sobre a seguinte questão:

A hipótese da Terra plana é consistente ou não com os eventos físicos que observamos?

Exemplos de observáveis que podem ser avaliados nessa visão:

- *Queda de objetos no vácuo ou não*: objetos em queda livre com mesma aceleração, pena e martelo caindo na mesma velocidade.

- *Curvatura do horizonte*: relacionar com aproximações por retas.
- *Alcance da visão em distância*: navios que parecem "sumir" no horizonte.

Pedir que os grupos registrem as fontes usadas e as conclusões das discussões.

3º Momento da aula

Após alguns minutos de discussão entre os grupos, mediada e observada pelo docente, deve ser proposto que cada grupo exponha para a turma o que encontrou sobre a pergunta e possíveis conclusões. Em seguida, a partir do que os alunos trouxerem nas discussões, aborda-se algumas consequências sobre o funcionamento das leis de gravitação em uma Terra plana em forma de disco (ELER; VERSIGNASSI, 2017). O Quadro 2 traz orientações para essa discussão.

Quadro 2 - Experimento Mental: E se a Terra fosse plana?

Após a exposição das respostas dos grupos, levantar as hipóteses defendidas pelos terraplanistas propondo que analisem a consistência (ou a falta dela) com o que é observado.

Consequências físicas

Centro de gravidade na Terra plana é o centro do disco. Se a lei da gravitação valesse nesse modelo faria com que os corpos fossem atraídos para a região central do planeta, e que para compensar isso, quanto mais perto das bordas, mais inclinadas seriam as construções. Um exemplo pode ser encontrado em Eler e Versignassi (2017).

1. O formato de disco faria a gravidade atuar de maneira não uniforme. Em uma Terra plana, quanto mais você andasse em direção às bordas, mais a gravidade puxaria você de volta ao centro.

2. Caminhar até as bordas, então, seria como escalar uma montanha que vai ficando mais íngreme.

3. Os prédios teriam de ser cada vez mais inclinados para ir compensando essa influência. Perto da borda, você teria de se segurar para não entrar em queda livre.

4. Ufa! Se você atravessasse a borda, seus problemas acabariam. Na "lateral" da Terra plana, o puxão gravitacional voltaria a ser o de sempre: no sentido do solo.

Explicações alternativas para a existência da gravidade:

- A queda de corpos dependeria da densidade dos corpos (maçã cai por ser mais densa que o ar). Como objetos com densidades diferentes caem com a mesma aceleração?

- A força que age sobre a Terra a 9,8m/s² aconteceria porque a Terra está sendo impulsionada verticalmente com essa aceleração (analogia com um elevador)

Supondo que esse modelo físico alternativo seja verdadeiro e que a Terra esteja nessa aceleração, qual seria a atual velocidade do Planeta?

a. Já teríamos atingido a velocidade da luz?

b. Quais seriam as possíveis consequências de estarmos viajando pelo espaço nessa velocidade? Condizem com a nossa realidade?

Fonte: elaborado pelos autores e extraído de Eler e Versignassi (2017)

4º Momento da aula

Propor para os grupos um exercício que aborda o conceito da velocidade da luz e sob a suposição de que a terra é plana, tem em torno de 10.000 anos e está em constante aceleração vertical. Essa é uma explicação alternativa à existência da aceleração da gravidade, defendida por algumas teorias de Terra Plana (ELER; VERSIGNASSI, 2017).

Dadas essas hipóteses, o exercício pedirá que os alunos calculem qual seria a velocidade atual da Terra e, em seguida, em que momento ela terá alcançado a velocidade da luz. Caso se perceba a necessidade, revisa-se brevemente a conversão de unidade de anos para segundos. O Quadro 3 traz orientações sobre esse desenvolvimento. E o Quadro 4 apresenta respostas por dois modelos da Terra (ELER; VERSIGNASSI, 2017).

Após isso, pede-se uma reflexão sobre as possíveis consequências dessa velocidade da Terra no espaço já acima da velocidade da luz.

Quadro 3 – Cálculo da velocidade da Terra na visão da Terra Plana

Os dados necessários para a realização do cálculo proposto da velocidade da Terra são Velocidade da Luz, Aceleração da Gravidade, conversões de Unidades de Medida.

Considere aceleração da gravidade 9,8m/s² e que a Terra tenha começado esse movimento a 10.000 anos (vamos "chutar" uma estimativa baixa).

Velocidade da luz: ~300.000.000 m/s = 3×10^8 m/s

Converter anos em segundos: 1 ano = 365 x 24 x 60 x 60 = 31.536.000 s

Tempo de Movimento da Terra

T = 10.000 x 31.536.000= $3{,}1536 \times 10^{11}$ s

Nesse tempo, a velocidade que a Terra atinge é:

V = $9{,}8 \times 3{,}1536 \times 10^{11}$ s = $3{,}09 \times 10^{12}$ m/s !!!!!!!!!!

Fonte: elaborado pelos autores

5º Momento da aula

No encerramento da aula, pede-se que os grupos exponham para a sala suas impressões e conclusões sobre a tarefa realizada, qual o resultado que obtiveram e como fizeram seus registros. Observando a utilização ou não de notação científica ao lidar com números muito grandes.

Ao longo dessas atividades será pedido que os alunos façam registros e anotações sobre as suas reflexões, pesquisas e respostas para que se possa, por meio dessas produções textuais, indicar a importância de uma escrita científica (argumentos, estrutura, uso de notação científica, etc.).

Quadro 4 - A "ciência" da Terra plana em contraposição à Terra "real"

A ideia de que não vivemos em uma esfera está cada vez mais popular. Entenda aqui por que os terraplanistas estão redondamente enganados!

TERRA CHATA

Para os terraplanistas, o Sol e a Lua são bolas do tamanho de cidades, o planeta é cercado por uma muralha de gelo e a gravidade… Bom, a gravidade não existe. Considere:
TP = Modelo terraplanista
VR = Vida real

1. ANTÁRTIDA
TP Para quem acredita que a Terra é plana, a Antártida é um paredão de gelo que serve de moldura para a superfície terrestre, segurando a água dos oceanos. Eles dizem que o Tratado da Antártida, de 1959, existe para esconder esse "fato".
VR Tem quase o dobro da área do Brasil (14 milhões de m²). E o Tratado, assinado por 52 países, estabeleceu-a como território neutro, dedicado à ciência.

2. HORIZONTE
TP Se a Terra é plana, por que a nossa visão não ultrapassa o horizonte? A desculpa aí envolve a neblina e uma suposta limitação da visão humana – o que não faz sentido, já que vemos estrelas a olho nu, e a mais próxima está a 40 trilhões de km (4,3 anos-luz).
VR Alguém com 1,80 m no nível do mar só consegue enxergar a uma distância de 5 km. Dá para comprovar a curvatura da Terra pela sequência de desaparecimento de uma embarcação no horizonte: a parte que some primeiro é a popa, depois a vela.

3. GRAVIDADE
TP Não existe. Só estaríamos presos ao chão por conta de uma força misteriosa que puxa a Terra para cima a uma aceleração constante de 9,8 m/s² – a mesma da gravidade. Seria como se estivéssemos dentro de um elevador gigante, presos ao chão.
VR Existe, claro. E mais: corpos celestes são redondos justamente por causa da gravidade. A massa gera um campo que suga tudo para o centro, moldando-os como esferas.

4. LUA
TP Tem 51, 5 km e descreve sua órbita a 5 mil km do chão.
VR A Lua é só quatro vezes menor que a Terra (com 3.476 km de diâmetro) e está a 384.400 km de distância.

ECLIPSES LUNARES
TP Uma Terra plana não faria sombra. Como explicar os eclipses lunares, então? Uma hipótese diz que o céu tem um "objeto de sombra". A Lua se esconderia quando esse objeto cortasse seu caminho.
VR São fruto da sombra da Terra projetada na Lua, claro.

5. SOL
TP Tem 51,5 km de diâmetro e fica a 5 mil km de altitude. Funciona como se fosse uma lanterna: ilumina cada porção do planeta em momentos determinados. Ou seja: quando o Sol brilha sobre sua cabeça, é dia. Quando ele está longe, é noite. Simples assim.

VR O Sol tem 1,3 milhão de km de diâmetro (108 vezes mais do que a Terra), e está 149,6 milhões de km distante.

6. ESTAÇÕES DO ANO

TP Em diferentes momentos do ano, o Sol terraplanista assume órbitas diferentes – se aproximando ou se afastando de cada trópico. E isso estabelece as estações do ano. O raio da trajetória é maior quando o Sol está no "anel norte" e menor quanto está no "anel sul" (veja lá embaixo).

VR Você sabe: por conta do movimento de translação e do eixo de rotação da Terra (inclinado a 23,5 graus), cada hemisfério recebe mais luz solar em determinados períodos do ano. Quando é inverno na parte do sul, é verão no Hemisfério Norte, e vice-versa.

7. MAGNETISMO

TP Alguns terraplanistas defendem que o centro da Terra plana (o Polo Norte) abriga uma montanha magnética que seria a responsável por atrair as agulhas das bússolas. E mais do que isso: para manter o Sol, a Lua e as estrelas em volta do "disco planetário".

VR Os polos magnéticos estão próximos aos polos geográficos. No centro da Terra, onde as temperaturas podem chegar a 6.000 ºC, existe ferro e níquel em estado líquido. Esse fluido, em constante movimento, gera as correntes elétricas responsáveis pelo campo magnético.

8. ATMOSFERA

TP Os terraplanistas a chamam de atmosplana ou atmocamada – note que "atmosfera" faz referência a um formato esférico, coisa que eles abominam.

VR A camada de gases que envolve nosso planeta fica presa aqui por conta da gravidade, outro conceito que os terraplanistas não curtem.

9. DOMO

TP É o que nos isola do resto do Universo (seja lá o que exista além da Terra plana).

VR Não existe.

Fonte: Eler e Versignassi (2017)

Avaliação

Através de fotografia dos registros feitos em grupos durante as discussões e da resolução do cálculo proposto pode-se dar um *feedback* individualizado para a produção feita em cada grupo.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Matriz de Referência ENEM**. 2012. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 07 abr. 2019

ELER, G.; VERSIGNASSI, A. A "ciência" da Terra plana. **Super Interessante**. São

Paulo: Editora Abril, 23 out. 2017. Disponível em: https://super.abril.com.br/ciencia/a-ciencia-da-terra-plana/. Acesso em: 07 abr. 2019

ZABALA, A. A função social do ensino e as concepções sobre os processos de aprendizagem: instrumentos de análise. In: **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000. p. 5-21.