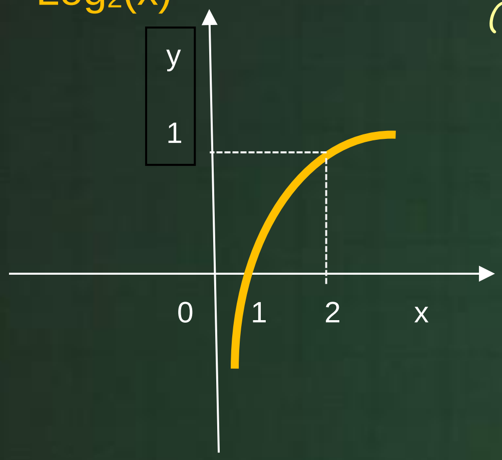
$$b^2 + c^2 = a^2$$

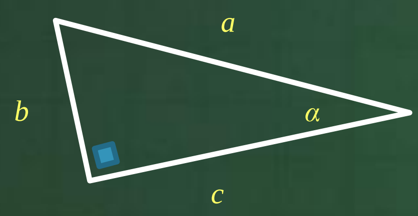
$$(b^2 + c^2)/ a^2 = a^2 / a^2 \rightarrow sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$(b^2 + c^2)/ b^2 = a^2 / b^2 \rightarrow 1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha$$

$$(b^2 + c^2)/ c^2 = a^2 / c^2 \rightarrow tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$$

$f(x) = Log_2(x)$





CADERNOS DE PRÁTICAS DE ENSINO DE MATEMÁTICA DA UFABC - Vol. 1

PLANOS DE AULAS PARA O ENSINO MÉDIO

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x' = \frac{1+5}{2} = 3 \quad e \quad x'' = \frac{1-5}{2} = -2$$

Organização
Virgínia Cardia Cardoso
Vinícius Pazuch

Universidade Federal do ABC
2019

Curso de Licenciatura em Matemática
Universidade Federal do ABC

CADERNOS DE PRÁTICAS DE ENSINO DE MATEMÁTICA DA UFABC - Vol. 1

PLANOS DE AULAS PARA O ENSINO MÉDIO

Organização
Virgínia Cardia Cardoso
Vinícius Pazuch

Santo André
2019
1ª edição

CATALOGAÇÃO NA FONTE
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

C122 Cadernos de práticas de ensino de matemática da UFABC [recurso eletrônico] - vol. 1 : planos de aulas para o ensino médio / Organizado por Virgínia Cardia Cardoso, Vinícius Pazuch — Santo André, SP : Universidade Federal do ABC, 2019.

114 p. : il.

E-book
ISBN: 978-85-65212-96-0

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Ensino Médio. 3. Prática de Ensino. I. Cardoso, Virgínia Cardia, org. II. Pazuch, Vinícius, org.

CDD 22 ed. – 510.7

Elaborado por Marciléia Aparecida de Paula – CRB-8/8530

Capa: Virgínia Cardia Cardoso

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Os *Cadernos de Práticas de Ensino de Matemática da UFABC* são publicações organizadas por docentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do ABC (UFABC), que apresenta o registro dos resultados finais elaborados e apresentados por graduandos em disciplinas do curso que tematizam a formação do professor que ensina Matemática na educação básica e também nos estágios supervisionados. Pretende-se que a presente publicação seja a primeira de uma série com conteúdo e formato variados, mas que tenha como finalidade apresentar propostas e provocar discussões sobre a formação inicial do professor que ensina Matemática, em diferentes perspectivas. Neste primeiro volume, apresentamos planos de aulas elaborados pelos alunos da disciplina Práticas de Ensino de Matemática I – Ensino Médio, nas turmas oferecidas no 2º quadrimestre de 2018, sob a responsabilidade dos Prof. Dr. Vinícius Pazuch (turma do matutino) e Prof.ª Dr.ª Virgínia Cardia Cardoso (turma do noturno).

O currículo do Curso de Licenciatura em Matemática da UFABC articula diversas disciplinas para a formação profissional do professor, dentre as quais estão as Práticas de Ensino de Matemática. Ao todo, o curso apresenta cinco disciplinas de Prática de Ensino que discutem o ensino da matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio. A disciplina Práticas de Ensino de Matemática I – Ensino Médio, referente ao projeto pedagógico do curso de 2009[1], traz, em sua ementa, temas como: documentos curriculares para o ensino médio; currículo de matemática no ensino médio; tecnologias aliadas ao ensino; planejamento e avaliação associados aos conteúdos: Conjuntos; Números Naturais e Números Reais; Funções Afins, Quadráticas e Polinomiais; Funções Exponenciais e Logarítmicas; e Funções Trigonométricas. Acrescentamos o tema Geometria Plana e Espacial, que também foi discutido na turma do noturno, no período letivo citado.

Apresentamos aqui os resultados dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos das turmas citadas ao longo do período letivo. São planos de aulas elaborados para os conteúdos matemáticos elencados na ementa da disciplina e pertinentes ao Ensino Médio. Os alunos foram solicitados a desenvolver um plano de uma aula e também apresentar a aula preparada em classe, com uma hora de duração. A partir disso, os alunos elaboraram uma pesquisa e organizaram o seu plano e a apresentação da aula. As aulas preparadas foram apresentadas e discutidas em sala, e então os alunos puderam corrigir alguns pontos de seu plano de aula. Após a avaliação da disciplina, por parte dos professores, os alunos autorizaram a publicação do seu plano com as devidas correções.

[1] A disciplina em questão equivale, no Projeto Pedagógico atual (vigente a partir de 2018), à disciplina Práticas de Ensino de Matemática II.

Destacamos que, dentre os graduandos temos pessoas que já lecionam nas redes pública e privada do ensino básico e puderam trazer sua experiência docente para os planos elaborados. Também temos pessoas que nunca lecionaram e contaram apenas com as suas vivências como alunos ao escreverem seus planos.

Temos duas intenções ao publicar o resultado dos trabalhos da disciplina. A primeira é deixar o registro das pesquisas realizadas pelos nossos alunos para elaboração dos planos de aulas, para estas possam servir de sugestão e como fonte de consulta para as futuras turmas de Práticas de Ensino. A segunda é que os planos sirvam de apoio aos próprios alunos, ao se tornarem docentes profissionais. Esta experiência mostra a importância da preparação de aulas, registro, reflexão coletiva, discussão e uma nova preparação. Não temos, neste momento, a intenção de tecer considerações teóricas a respeito da formação de professores, uma vez que estas já foram discutidas em aula e incorporadas, pelos próprios alunos, nos planos apresentados.

Organizamos os planos de aula de acordo com os temas apresentados, em três grandes grupos: Geometria, Conjuntos e Conjuntos Numéricos e Funções. Ao elaborarem as aulas e os planos de aulas, os alunos lançaram mão de vários recursos metodológicos: uso de Tecnologias Digitais, Materiais Manipuláveis, Jogos, História da Matemática, Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas. Os planos foram apresentados com as seguintes informações: tema matemático, nome dos autores, ano escolar, ementa, objetivos (geral e específicos), recursos empregados, atividades elaboradas a serem apresentadas na aula, formas previstas de avaliação e referências bibliográficas.

Para finalizar, queremos agradecer à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática – Prof. Dr. Francisco José Brabo Bezerra e Prof.ª Dr.ª Vivilí Maria Silva Gomes – pelo apoio à publicação.

Os organizadores
Virgínia e Vinícius

GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

TEOREMA DE TALES

Anderson da Silva Campos
Wesley Cunha de Jesus

Ano escolar: 1º do ensino médio

Ementa

Paralelismo, razão, proporção, Teorema de Tales e semelhança de triângulos.

Objetivos

Obter o domínio do Teorema de Tales com intuito de aprofundar seus conhecimentos na área da geometria plana através de materiais manipulativos, o uso de aplicativo para celulares e da História da Matemática.

Recursos empregados

Slides para projeção, fotos, lousa, caneta esferográfica, régua, E.V.A, tesoura, cola, papel sulfite e palitos. Os materiais têm por objetivo mostrar, na prática, a comprovação e aplicação do Teorema de Tales, bem como semelhança de triângulos.

Atividades

1. Introdução

Proporção e razão são expressões comuns no cotidiano da matemática e o Teorema de Tales estabelece a aplicação prática para razões e proporção. Pretende-se apresentar ao aluno, nas suas primeiras atividades, o uso tanto teórico, quanto prático do Teorema de Tales e, fazendo isto, achar soluções para muitas atividades práticas, contribuindo para a formação de cidadãos e propiciando que o aluno saiba aplicar seus conhecimentos. Com isto, almeja-se alcançar o aprendizado suficiente e despertar competências e habilidades através da aplicação do Teorema de Tales em problemas, como descrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (BRASIL, 1999, p. 42)

Além disso, a proposta é também desenvolver competências como descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos

> (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BRASIL, 2018, p. 530)

2. Atividades desenvolvidas

a) A História de Tales de Mileto

Propõe-se o uso de slides para apresentar o Teorema de Tales e sua história. A História da Matemática é vista aqui como instrumento de ensino e como embasamento para o conteúdo proposto, de forma a despertar a curiosidade sobre o ensino de Matemática.

Tales viveu em Mileto, Turquia (624 - 548 a.C). Foi filósofo e matemático e apontado como um dos sete sábios da Grécia antiga. Os filósofos pré-socráticos estavam em busca de uma unidade em todas as coisas. E Tales, em sua busca pela coisa primordial, considerava a água como sendo a origem para os seres vivos. Ele explicou o eclipse solar e previu um, em 585 a.C. Aristóteles marca este evento como a origem da filosofia.

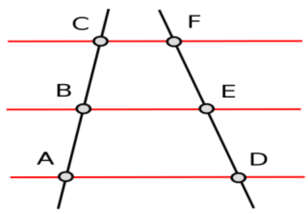
b) Teorema de Tales

A primeira atividade é apresentar o Teorema de Tales com materiais manipuláveis: palitos, cola e EVA. Através dos materiais disponíveis, os alunos devem testar possibilidades ou maneiras de representar o Teorema de Tales. Em seguida apresenta-se uma demonstração na lousa para complementar o conhecimento inicial sobre o Teorema de Tales.

Neste aspecto, o professor será o mediador do conteúdo teórico e prático para a compreensão dos alunos, trazendo argumentos sólidos que provam o teorema. Além disso, a demonstração e os exercícios práticos terão também papel essencial para a fixação do conhecimento adquirido. O enunciado do teorema de Tales é:

Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

Figura 1: Teorema de Tales



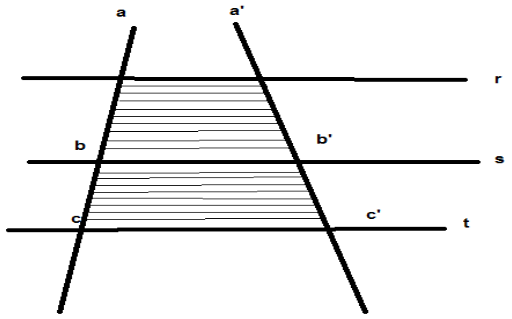
Fonte: Própria (2018)

Pelo enunciado, quer-se mostrar que $\frac{CB}{BA} = \frac{FE}{ED}$

Prova:

- Sejam duas retas transversais **a** e **a'**, cortadas pelo feixe de retas paralelas **r, s** e **t.**

Figura 2: feixe de retas paralelas e duas transversais

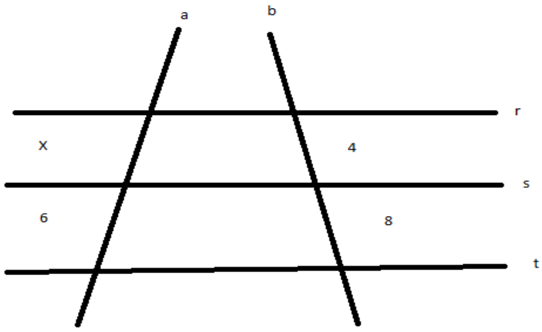


Fonte: Própria (2018)

- Desenhar *p* retas paralelas cortando os segmentos AB, espaçadas a uma distância *x* uma das outras, de modo que o segmento *AB = p.x*.
- Fazer o mesmo para o segmento *BC*: desenhar *q* retas paralelas cortando o segmento *BC*, espaçadas por uma distância *x* uma das outras, de modo que o segmento *BC = q.x*.
- A razão entre os segmentos *AB* e *BC* é $\frac{AB}{BC} = \frac{px}{qx} = \frac{p}{q}$.
- O segmento *A'B'* tem a mesma quantidade de retas paralelas cortando-as, porém, a distância entre elas é *x'*. Assim a reta *A'B' = p.x'*.
- O segmento *B'C'* tem a mesma quantidade *q* de retas cortando-o de modo que *B'C' = q.x'*.
- Logo a razão entre os segmentos é: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{p}{q}$.
- Comparando as razões, temos: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$, como queríamos provar.

Exemplo 1: Seja as retas paralelas **r, s e t** e as transversais **a e b.** Calcule a medida x.

Figura 3: ilustração do Exemplo 1.

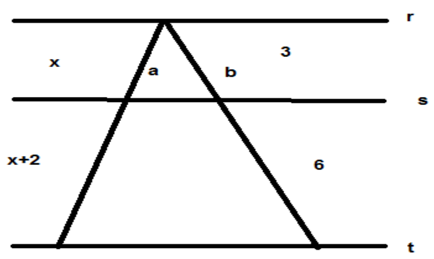


Fonte: Própria (2018)

Segundo o enunciado, tem-se $\frac{x}{6} = \frac{4}{8} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 3$.

Exemplo 2: Idem para a figura baixo.

Figura 4: Ilustração do Exemplo 2.



Fonte: Própria (2018)

As razões entre os segmentos das transversais são $\frac{3}{6} = \frac{x}{x+2} \rightarrow x + 2 = 2x \quad x = 2$

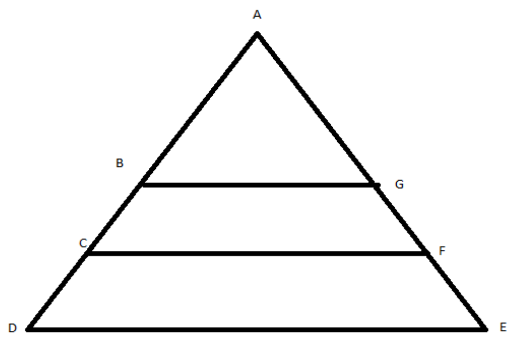
c) O Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos

A atividade é mostrar a Semelhança de triângulos com palitos, cola e EVA. Da mesma forma que a atividade anterior, o professor deverá atuar como mediador, para que os alunos entendam o que é semelhança de triângulos. No caso de triângulos, vale a definição:

Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são congruentes.

E como consequência desta definição, os lados correspondentes são proporcionais**.** Como resultado direto do Teorema de Tales, as razões entre os segmentos dos lados de um triângulo conservam a igualdade. Portanto, é importante entender o Teorema de Tales suas aplicações para progredir o entendimento da semelhança dos triângulos.

Figura 5: Representação da razão entre os segmentos dos lados de um triângulo.



Fonte: Própria (2018)

Os triângulos semelhantes conservam a igualdade da razão de proporcionalidade dos seus lados correspondentes. Assim, pode-se estabelecer a relação:

Se ΔABG ~ ΔADE, então $\frac{AB}{AD} = \frac{AG}{AE}$.

(Obs. neste texto, o símbolo para semelhança será ~).

Para triângulos semelhantes, vale a propriedade de que os seus lados correspondentes são proporcionais. Essa propriedade pode ser demonstrada como segue.

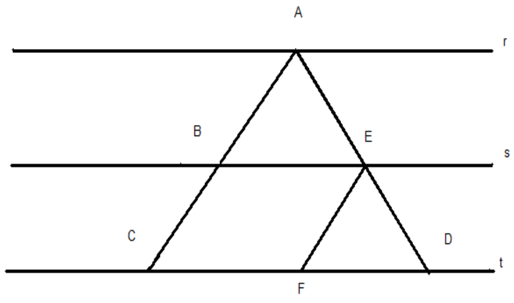
Prova:

Considere os triângulos ΔADC e ΔAEB semelhantes, isto é, ΔADC ~ΔAEB.

Considere as retas **r**, **s** e **t** paralelas, isto é: **r//s//t**.

Vamos demonstrar que os lados correspondentes dos dois triângulos são proporcionais, conforme a figura 6.

Figura 6: demonstração de que Triângulos Semelhantes têm lados proporcionais.



Fonte: Própria (2018)

Construir o segmento EF paralelo ao segmento BC; e o segmento CF paralelo a BE. A figura BCFE é um paralelogramo, então CF = BE.

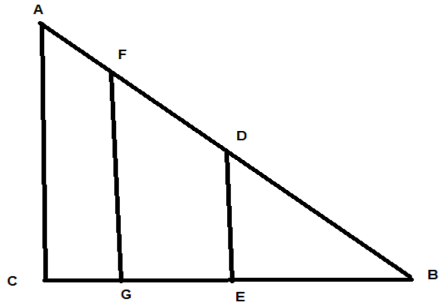
Temos um feixe de retas paralelas **r, s** e **t** cortado por transversais.

Como consequência direta da aplicação do Teorema de Tales aos segmentos transversais, temos: $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{CF}$; $CF = BE\ \ e\ \ \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$.

Logo, $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} = \frac{AD}{AE}$, isto é, os lados correspondentes são proporcionais.

Veja um exemplo: o ΔABC ~ ΔDBE. Assim, temos: $\frac{CB}{AC} = \frac{EB}{DE}$

Figura 7: Representação por triângulos**.**



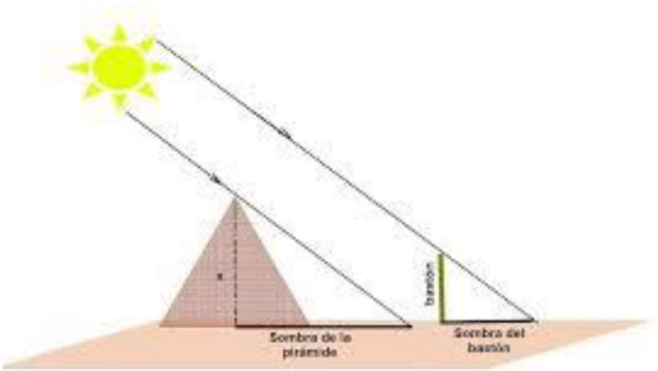
Fonte: Própria (2018)

Uma maneira interessante de apresentar uma aplicação do Teorema de Tales é usar vídeos disponíveis na internet sobre a história de como Tales calculou a altura de uma pirâmide. O professor poderá apresentar ou indicar vídeos que possibilitem aos alunos uma melhor compreensão do conteúdo e de suas aplicações práticas.

Tales era um próspero comerciante e, em uma de suas viagens ao Egito, foi desafiado a resolver o seguinte problema: como calcular a altura de uma pirâmide já construída. Engenhosamente, Tales imaginou a seguinte estratégia: fincou seu cajado na areia e comparou as sombras da pirâmide e a do cajado, que o sol projetava em determinado horário.

Supondo que os raios de sol que incidem no topo da pirâmide e no topo do cajado sejam paralelos, temos dois triângulos semelhantes: um deles é formado pela altura do cajado, sua sombra e o raio de sol. O outro é formado pela altura da pirâmide, a sombra da pirâmide e o outro raio de sol, conforme a figura 8.

Figura 8: a medida da altura da pirâmide.



Fonte: SILVA (2015)

Para exemplificar, suponha que a altura do cajado seja de 2m e a sombra projetada é de 5m. Sendo a sombra da pirâmide 200m, qual será a sua altura?

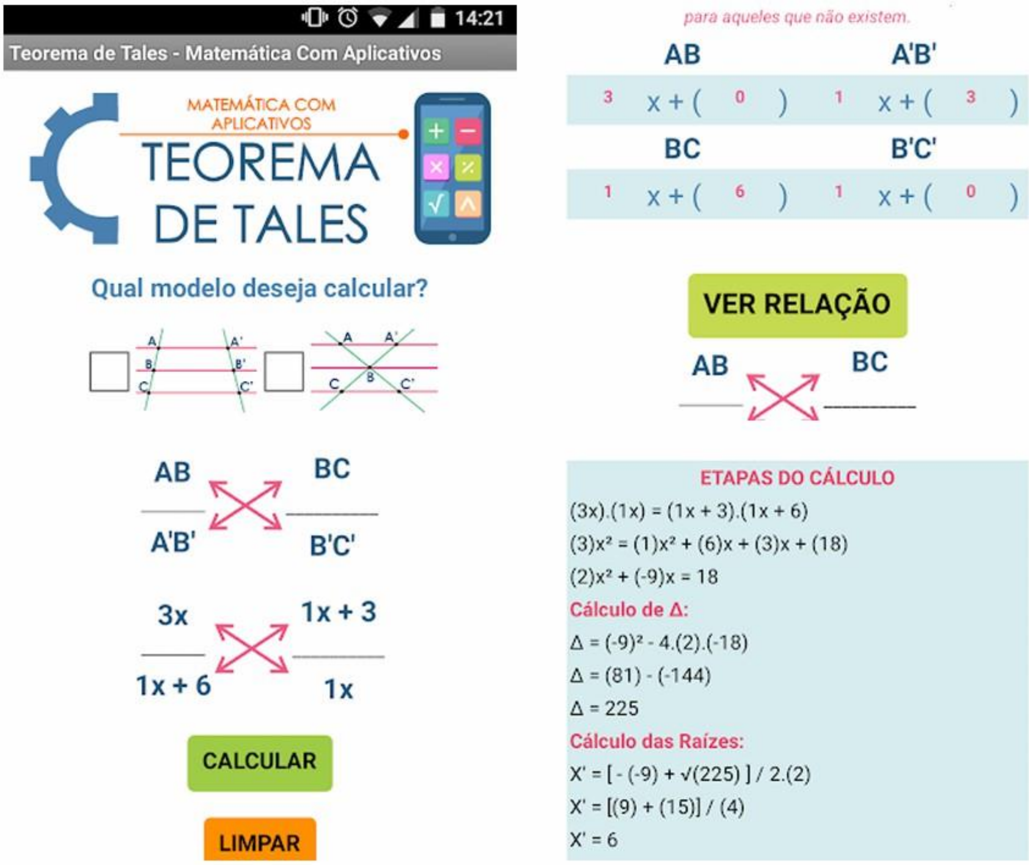
Resposta: chamamos de h a altura da pirâmide. Aplicando o Teorema de Tales aos triângulos semelhantes: $\frac{h}{200} = \frac{2}{5}$. Ou seja, h = 80m.

d) O uso de *softwares* e/ou aplicativos

O uso de *softwares* e aplicativos são formas diferentes e inovadoras de ensino a serem exploradas. A tecnologia empregada em aparelhos celulares vem difundindo formas rápidas de receber e repassar informações de formas eficazes e seguras. Além disso, a tecnologia dos celulares, aliada à internet, vem difundindo novos hábitos e atitudes nas novas gerações.

Pensando assim, optou-se por utilizar, nesta proposta de aula, um aplicativo chamado "Teorema de Tales", disponível gratuitamente na Google Play Store para Android ou na Apple Stores no caso do IOS. O aplicativo tem como objetivo apresentar conteúdos teóricos, resolver e demonstrar problemas que envolvam o Teorema de Tales de forma simples.

Figura 9: Interface do aplicativo móvel Teorema de Tales



Fonte: Loja de aplicativos Google Play Store.

Acredita-se que o uso do aplicativo em sala de aula poderá elevar a capacidade de aprendizado, assimilação e fixação do conteúdo de forma eficaz e dinâmica, fugindo um pouco do método expositivo de ensino. Contudo, o uso do aplicativo não tem como função o papel de substituir ou de tirar a autonomia do professor, e sim como um material de apoio, onde o professor será o mediador do conhecimento. Além disso, os alunos poderão compartilhar e discutir suas respostas com os demais alunos, gerando um ambiente de aprendizagem coletivo.

3. Conclusões

O Teorema de Tales tem muita importância por ser um assunto básico para o aprofundamento em outros tópicos da Matemática como: paralelismo, proporção, semelhança de triângulos e razão. As atividades tiveram, como o intuito, o domínio do teorema e da semelhança de triângulos. Além disso, foram abordados tópicos da História da Matemática. O teorema é um assunto essencial para a área da geometria e básico para o domínio da mesma. O seu ensino é essencial para a compreensão de conceitos matemáticos entre razão e proporção e, mais tarde, das relações trigonométricas e suas aplicações.

Formas previstas de avaliação

Participação das atividades e questionário contendo exercícios práticos de fixação.

Referências

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** – matemática. Brasília: MEC, 1999. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em 12 de julho de 2018.

____________. **Base Nacional Comum Curicular** – Ensino Médio. Brasília: ME, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf. Acesso em 12 de julho de 2018.

HARUNA, N. C. A. **Teorema de Thales: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem**. 2000. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo: PUC/SP, 2000.

LIMA, E. L. **A matemática do ensino médio.** volume 2 6ª edição: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.

MASSUQUETTO, A.; ZANLORENZI, M. A. **Os desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE** - Aprendendo em sala de aula o teorema de Tales, através da história da matemática. Curitiba: UFPR, 2014.

SANTOS, M. N.; VIANA, M. C. V. **Teorema de Tales com atividades investigatórias e história da matemática**. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Ouro Preto: UFOP, 2013.

SILVA, V. N. **Teorema de Tales e suas Aplicações**. Dissertação de Mestrado – PROFMAT. Natal: UFRN, 2015.

Tales a Pirâmide e o Teorema. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=cu9jJa7SCEw>. Acesso em: 12 de Julho 2018.

ÁREAS E PERÍMETROS DE FIGURAS CIRCULARES

Caique Thomas Nascimento
Vanderlei Vicente de Sousa Júnior

Ano escolar: 1º ano do Ensino Médio

Ementa

Área e perímetro figuras circulares.

Objetivos

O presente trabalho tem por objetivo trabalhar os conceitos de área e perímetro da circunferência e as partes que a compõem como setor e coroa circular dando uma abordagem mais interpretativa, realizando experimentos e deduções para o ensino fazer mais sentido aos alunos.

Recursos empregados

Papel quadriculado, discos de materiais e tamanhos variados, fita métrica, régua e barbante.

Atividades

1. Introdução

A presente proposta de plano de aula está embasada em um referencial teórico, mas também em experimentos práticos realizados pelos autores em sala de aula. Os autores ministram aulas de matemática nas redes estadual e particular de educação básica. Algumas dúvidas com relação a área e perímetro são comuns à maioria dos alunos e outras mais recorrentes em determinados contextos. Os alunos, ao chegarem no ensino médio, carregam consigo, muitas vezes, dificuldades em compreender certos resultados, entender a ideia por trás de alguns assuntos e interpretar as fórmulas que são dadas em diversos assuntos.

Na sala de aula é necessário contextualizações e demonstrações das fórmulas conhecidas da geometria. Todavia, como a grande parte dos alunos já compreendem, algumas demonstrações e comprovações matemáticas, só decorrem da própria matemática. Não se pode demonstrar com exatidão a contagem e a existência do infinito, por exemplo. No entanto, os estudantes do ensino básico sentem a necessidade de contextualização a fim de familiarizá-los com a linguagem matemática e conhecer algumas interpretações algébricas diretas e indiretas, que são fomentadas com os exemplos.

A importância de se trabalhar em matemática, e em específico a geometria, de forma construtiva, mostrando os significados, faz com que o aluno se veja como personagem principal da sua aprendizagem. Fugindo do comum e do metódico, o aluno consegue ver-se como um colaborador do ensino, visto que construiu/descobriu o que está por trás das fórmulas matemáticas. De acordo com os Parâmetros Comum Curriculares- PCN (BRASIL, 1997), o ideal é que o aluno desenvolva o raciocínio lógico, utilizando os conhecimentos matemáticos para a resolução de problemas do dia a dia, que aplique estes conhecimentos em outras áreas e recorra aos saberes geométricos para analisar e compreender o universo. Especificamente para a geometria, os PCN recomendam que o aluno deve dominar os conhecimentos geométricos de forma que consiga utilizá-los para interpretação e representação da realidade.

> A atividade matemática está cotidianamente presente no dia a dia das crianças, fazendo com que elas desenvolvam algumas habilidades que são estão relacionadas diretamente à matemática. Mas o que percebemos é que a matemática tem sido ensinada apenas pela reprodução de formulas, com ações engessadas que não permitem que a criança evolua, tendo um rendimento apenas dentro de um padrão pequeno. Muitos professores, além de desestimularem a aprendizagem, superestimam as crianças, impedindo que ela construa o seu conhecimento de forma mais ampla, permitindo que o aluno compreenda a ligação direta que a matemática tem com o seu cotidiano (BRASIL, 1997, p. 51).

2. Atividades desenvolvidas

a) A aula é iniciada com a recordação dos conceitos que os alunos, supostamente, já conhecem: raio e diâmetro de uma circunferência, perímetro e área de figuras planas. Também se recorda as fórmulas de área de um quadrado, retângulo e triângulo. Após essa introdução, distribui-se aos alunos fita métrica, régua, papel quadriculado e inúmeros discos, para que eles meçam tanto o comprimento destes círculos como o seu diâmetro. Após isso, os alunos calculam a razão entre o comprimento e o diâmetro de cada disco em questão, e chegam a um número próximo de 3. Conclui-se, então, que esse número é uma constante chamada de pi e representada pela letra grega π.

b) Os alunos, tendo observado que o comprimento dividido pelo diâmetro gera uma constante, constroem uma expressão algébrica com as grandezas perímetro e diâmetro e, com isso, concluindo que o perímetro de toda circunferência é dado pelo produto da constante π com o diâmetro da circunferência, e que este nada mais é duas vezes o raio. Chegando, assim, na fórmula $P = 2.\pi.r$.

c) Para o cálculo da área, pede-se para os alunos construam um quadrado no papel quadriculado e, inscrito neste, uma circunferência. Após, pede-se para que eles calculem a área das duas figuras. Neste caso, principalmente para a circunferência, os alunos devem contar os quadradinhos presentes dentro da mesma, e aproximar o valor da área. Com os cálculos feitos, eles calculam a razão entre a área da circunferência pela área do quadrado e chegaram também numa constante.

d) Com a figura desenhada, discute-se que a área do quadrado é maior que a da circunferência como era visto no desenho. Com a razão calculada se usa o mesmo processo anterior para construir uma expressão algébrica para o cálculo da área do círculo. Antes da manipulação matemática, os alunos observam que o lado do quadrado é o diâmetro daquela figura inscrita e, a partir daí o manuseio algébrico chegou à fórmula tão esperada $A = \pi.\ r^2$.

3. Conclusões

Concluindo, a experiência desenvolvida em sala de aula mostrou que é possível chegar a "pi" e às fórmulas de perímetro e área do círculo. Assim, induziu-se um caráter investigativo e argumentativo no aluno. Nesta atividade buscou-se dosar duas metodologias – uma que prioriza as demonstrações teóricas em sala de aula e outra que prioriza as demonstrações empíricas – fazendo com que uma complementasse a outra. O objetivo maior da tarefa, foi viabilizar ferramentas cognitivas que façam o aluno deduzir fórmulas. Assim sendo, a atividade aguça o senso demonstrativo do aluno, fazendo que ele chegue por si só, em fórmulas de perímetro e área de figuras circulares planas. Para isso, atribuiu-se um significado ao "pi", visto que ele sempre estará presente nas tais fórmulas.

Formas previstas de avaliação

Verificar se o aluno consegue calcular a área e o perímetro de círculos de maneira empírica, ainda que isso seja aproximado, e de modo teórico, com o uso das fórmulas deduzidas.

Referências

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática.** Brasília: MEC, 1997. disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 02/08/2018.

Círculo, Circunferência e Outros Bichos. Disponível em: https://Midiasstoragesec.Blob.Core.Windows.Net/001/2017/02/Crculo-E-Outrosef-Em.Pdf. Acesso em: 02/08/2018.

LAMAS, R.C.P. **A Área do Círculo: Atividades Experimentais.** Disponível em: http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/a-area-do-circulo-atividades-experimentais---prof-rita.pdf. Acesso em 02/08/2018.

REGINATTO, A. D. Projeto : Trabalhando circunferência e círculo em sala de aula. In: **Matemática Divertida "Profª Andréia".** Disponível em: http://ousodotangram.blogspot.com/. Acesso em 02/08/2018.

SANTOS, M. **Geometria Plana: Curiosidade e Exercícios Práticos.** Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96528/Mauricio_dos_Santos.pdf;jsessionid=FA073AA2A8A1B407393E65C606276789?sequence=1. Acesso em: 02/08/2018

http://www.colegioglauciacosta.com.br/moodle/file.php/1/Ensinando_matematica_atraves_de_atividades_ludicas.PDF

ÁREAS E VOLUMES DE FIGURAS ESPACIAIS

Lukas Valongo Kunieda
Paloma Wietky Garcia

Ano escolar: 2º ano do ensino médio

Ementa

Introdução a Geometria Espacial. Definição de área. Definição de volume. Exemplos de polígonos e sólidos geométricos.

Objetivos

Objetivo Geral

Desenvolver a observação e representação bidimensional e tridimensional de sólidos geométricos, as habilidades do aluno que permitam a resolução de problemas colocados no cotidiano ou em outras disciplinas e proporcionar a formação de uma postura de investigação e formulação de hipóteses frente a problemas de geometria espacial.

Objetivos Específicos

- Estimular a visualização espacial do aluno, identificando a presença da Geometria Espacial no dia a dia (arquitetura, objeto, etc.)
- Compreender os conceitos de área e volume, buscando uma definição.
- Explorar os conceitos de área e volume em atividades com recursos manipulativos.
- Resolver problemas, tanto matemáticos, como cotidianos, justificando as respostas com base no raciocínio desenvolvido em sala de aula.

Recursos empregados

- Apresentação em PowerPoint com o conteúdo matemático e com figuras para apresentação em sala de aula.
- Geoplano e Tangram: para explorar figuras poligonais através da construção e visualização das mesmas.
- Malha quadricular**:** será proposto pelo professor figuras impressas na malha para obter a área através da contagem dos quadrados.
- Material Dourado: será utilizado para introduzir o conceito de volume através da construção de um cubo com cubinhos unitários.
- Geoespaço: será utilizado para levar os alunos a explorar os sólidos geométricos através da construção e visualização.
- Embalagens de variados formatos coletadas pelo professor e pelos alunos, para resolução de problemas relacionados ao cotidiano do aluno.

Atividades

1. Introdução

A geometria tem um papel fundamental para a vida dos alunos no meio social em que estão inseridos. O ensino da geometria desenvolve o raciocínio visual permitindo que os alunos resolvam as diferentes situações da vida que são geometrizadas; utilizar os fundamentos de Geometria para compreender e resolver questões de outras áreas de conhecimento (interdisciplinaridade).

A Geometria torna a leitura interpretativa do mundo mais completa, a comunicação das ideias se ampliam e a visão de Matemática torna-se fácil de se entender. Além disso, o estudo do desenho geométrico proporciona ao aluno o desenvolvimento lógico – dedutivo e também favorece o crescimento da criatividade.

Ao trabalhar com Geometria Espacial, é fundamental que se tenha em mente a visualização. A capacidade de visualização é uma habilidade básica nesse campo de conhecimento. Uma pessoa que tem dificuldades em visualização terá problemas em entender contextos gráficos apresentados nos livros e apresentará dificuldades em expressar suas próprias ideias. A partir desses argumentos vemos a necessidade de que o docente não fique preso ao livro, mas que também busque uma ligação entre seus arredores e a geometria espacial para dar embasamento e aplicar a teoria estudada em sala de aula em algo significativo.

Uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos ao aprender Geometria Espacial é a visualização dos sólidos no espaço, uma vez que os exemplos utilizados em classe são, geralmente, em duas dimensões (por exemplo, a lousa, um livro, uma folha de cartolina). Portanto, iniciaremos a explicação sobre os sólidos identificando as diferenças quanto ao formato e às características de seus elementos. Além disso, é importante desenvolver o raciocínio lógico dos alunos para que saibam utilizar das propriedades geométricas para calcularem as áreas e volumes dos sólidos geométricos sem que memorizarem as fórmulas. Isto pode ser feito com o auxílio de fotos dos livros, embalagens e *softwares* específicos. Através desses exemplos, o aluno também será capaz de relacionar os conceitos da matemática com outras áreas do conhecimento, como a física, a engenharia, a computação, etc.

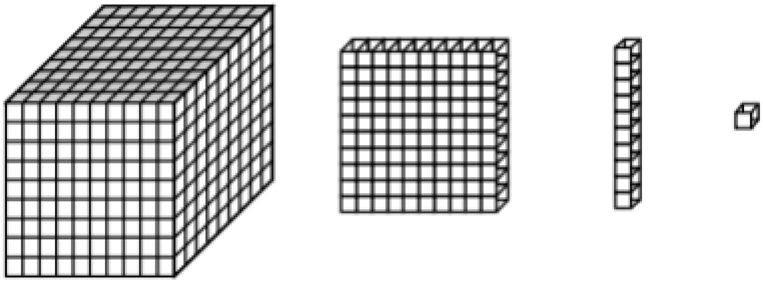
Primeiramente serão abordados conceitos de retas e planos, de forma a dar uma base teórica mínima para aprofundarmos os conceitos de figuras geométricas e os conceitos de áreas e volumes. A cada assunto serão propostos exercícios durante a aula, de forma a facilitar a fixação do conteúdo e ter uma ideia das dificuldades apresentadas pelos alunos. Os exercícios propostos terão o intuito de desenvolver o raciocínio lógico do aluno, além de trazer exemplos práticos que poderão ser relacionados com o seu cotidiano, de forma a motivá-los a estudar tal tema. A seguir, uma breve descrição dos recursos que serão utilizados ao longo das aulas.

2. Os conceitos de área e volume

Primeiramente, é importante introduzir o conceito de área. Uma maneira de facilitar o entendimento do aluno é chegar à definição do conceito de área utilizando papel quadriculado, Tangram, entre outras ferramentas familiares aos alunos. Pois, uma vez que o aluno possui maior familiaridade, será capaz de relacionar o conceito de área com o seu cotidiano.

Ao explicar o conceito do volume de um sólido, pode-se citar que é a "quantidade de espaço" por ele ocupado. Uma alternativa para encontrar essa quantidade de espaço, é comparando o espaço ocupado pelo sólido com determinada unidade de medição. O resultado desta comparação será o número desejado, a saber, o volume do sólido, como mostra a figura abaixo. De maneira simplificada, pode-se pensar que ao calcular o volume, deve-se perguntar: quantos cubos unitários podemos colocar dentro do sólido? Ou seja, a soma desses cubos, ou a fração dele seria o volume do sólido.

Figura 1: Material Dourado para a noção de volume



Fonte: http://portais.univasf.edu.br/profmat/thiago-lopes-nascimento-santiago_turma_2015.pdf

3. Atividades desenvolvidas

Os materiais e métodos utilizados para apresentar os conceitos de área e volume são apresentados a seguir:

a) Avaliação Diagnóstica

Iniciamos com uma avaliação prévia de conhecimento dos alunos, o que envolve a verificação da aprendizagem dos conceitos de área e de volume, através de um problema que consiste em saber quantas latas de tinta são necessárias para pintar uma parede. Neste problema, será questionado qual é o formato da parede e como poderia ser calculado a área. Para isso os alunos devem desenhar em papel a parede levando em conta as janelas e portas anotando as medidas e por fim, elaborar uma solução para o cálculo da área e promover a discussão em sala. Assim, o aluno coloca em prática o seu raciocínio lógico.

b) Atividade com o Geoplano e Tangram

O Geoplano e o Tangram são utilizados para explorar figuras poligonais através da construção e visualização, facilitando o desenvolvimento das habilidades de exploração plana. A sala será dividida em grupos, metade dos grupos recebem jogos de Tangram e a outra metade receberá o tabuleiro de Geoplano.

Figuras 2a e 2b: Atividades com Tangram e Geoplano

Fonte: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfwHYAE/trabalho-sobre-geoplano

Esta atividade tem como função recordar os polígonos; perceber as formas, ângulos, segmentos; promover o raciocínio do aluno e introduzir o conceito de área.

c) Atividade com malha quadricular

Apresenta-se ao aluno figuras desenhadas sobre um papel quadriculado (malha quadricular) para que ele possa encontrar a área através da contagem dos quadrados do papel, por exemplo, os desenhos abaixo (figuras 3a e 3b). Através da figura 3a, os alunos devem calcular a área dentro do contorno utilizando um quadradinho como unidade de medida. Pode-se perguntar, na figura 3b, se a superfície preenchida pela cor cinza ocupa maior área em relação a superfície não preenchida.

Figura 3a: polígono para cálculo de área

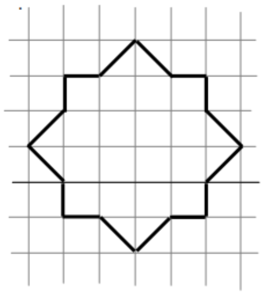
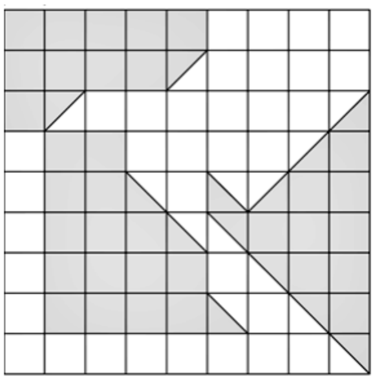


Figura 3b: cálculo de área da superfície cinza

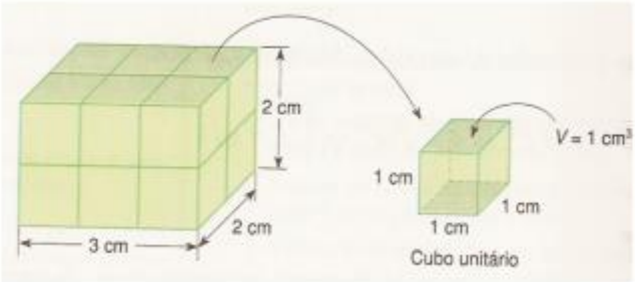


Fonte:http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo2/rocha_et_al_area%20e%20perimetro_minicurso.pdf

d) Atividade com o Material Dourado

Esse material será usado para introduzir o conceito de volume através da construção de um cubo com cubinhos unitários. Primeiramente é feita a seguinte pergunta aos alunos: Quantos cubos há na figura 4 abaixo?

Figura 4: Comparação do volume do paralelepípedo com o cubo unitário.

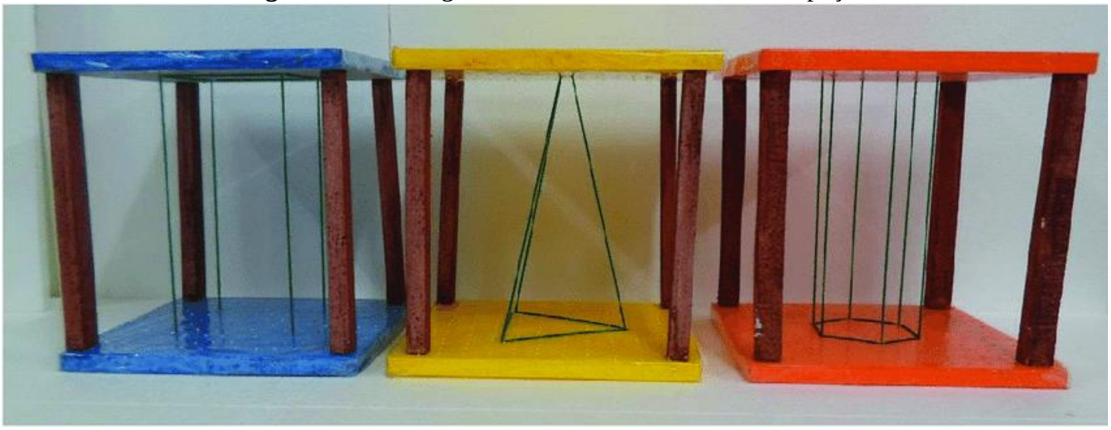


Fonte: http://tede2.pucgoias.edu.br:8080/bitstream/tede/1035/1/THALITTA%20FERNANDES%20DE% 20CARVALHO%20PERES.pdf

Em seguida, será apresentando o Material Dourado (figura 1) para que os alunos possam entender o conceito de volume através de um material concreto.

e) Atividade com o Geoespaço
Após a introdução do conceito de volume, a sala é dividida em grupos, novamente, e são distribuídos Geoespaços para que os grupos criem sólidos geométricos, para então abordarmos exemplos de sólidos geométricos: prismas e pirâmides.

Figura 5: Sólidos geométricos construídos no Geoespaço.



Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Figura-12-Geoespaco-construido-artesanalmente_fig3_325370266

f) Atividade com Embalagens
Será proposto aos alunos que para a aula seguinte tragam embalagens encontradas em casa para que seja trabalhado a classificação de sólidos geométricos e o cálculo de volume destes. Tanto o professor quanto os alunos podem trazê-las. Os alunos podem se dividir em grupos para realizar a tarefa de coletar as embalagens que serão utilizadas na sala de aula. Através desse recurso, pode-se perceber a ligação do estudo de Geometria Espacial com seu cotidiano.

4. Conclusões

Espera-se conseguir despertar a curiosidade sobre o assunto Geometria dos sólidos de maneira agradável aos alunos. Além disso, a proposta busca salientar diferentes abordagens do conteúdo, não somente a aula expositiva, sem interação dos alunos. Pelo contrário, pretende-se que o aluno esteja engajado e protagonista de ensino.

A avaliação buscará entender as dificuldades dos alunos para que se trabalhe a partir delas. Com a consolidação dos conceitos, através das atividades, o aluno estará apto a buscar soluções e relacionar o conteúdo, não somente com a matemática, mas com outras áreas, desenvolvendo seu raciocínio lógico e tendo um ponto de vista crítico. Com isso, a habilidade de memorização não será a única a ser desenvolvida, mas também a da construção de uma competência para solução de problemas.

Formas previstas de avaliação

Os alunos serão avaliados pela participação em aula em atividades de grupo, observando-se os seus desenvolvimentos do raciocínio lógico ao longo das atividades.

Referências

GIOVANNI J. R., BONJORNO J. R. – **Matemática “Uma nova abordagem”.** Volume 2 para o ensino médio. São Paulo: Editora FTD S.A., 2000.

MARTINATTO, M. A. **Geometria espacial no ensino médio: sugestões de atividades e avaliações para o conteúdo de prismas e pirâmides.** Dissertação FURG, 2013. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/6320>. Acesso em: 1 jul. 2018.

YOUSSEF A. N., SOARES E., FERNANDEZ V. P. – **Matemática de olho no mundo do trabalho.** Volume Único para o Ensino Médio. São Paulo: Editora Scipione, 2004.

ZÚNIGA L. **A história da Geometria**. Disponível em: <http://tudo-matematica. blogspot .com /2011/02/historia-da-geometria.html>. Acesso em: 1 jul. 2018.

CÔNICAS

Camila Nascimento de Almeida
Celso Vieira Junior

Ano escolar: 3º ano do ensino médio

Ementa

Cônicas: elipse, hipérbole e parábola; representações geométricas, principais características, algumas propriedades matemáticas.

Objetivos

Objetivo Geral: levar o aluno a compreender os conceitos introdutórios sobre cônicas (elipse, hipérbole e parábola)

Objetivos Específicos:

- Identificar as cônicas (elipse, hipérbole e parábola);
- Comparar e diferenciar as cônicas e suas representações gráficas;
- Compreender as principais propriedades de cada uma das cônicas, sabendo algumas aplicações em que são utilizadas

Recursos empregados

- Material manipulável "Bilhar Matemático": trata-se de uma placa de madeira ou papelão duro, cortado nos formatos das curvas cônicas e com uma borda de 2cm de altura em toda a sua volta. As placas devem ser de tamanho a permitir um jogo de mini-bilhar. Elas devem ter buracos nos focos das curvas. O jogo ainda é composto de um pequeno taco de madeira e de bolinhas;
- Material manipulável "Cone com cortes": um cone de parafina com os cortes para mostrar as cônicas a partir da secção do cone;
- Apresentação em PowerPoint com slides das imagens sobre as curvas;
- *Software* GeoGebra para apresentar figuras animadas (GIFS) com as propriedades das cônicas.
- Computadores para apresentar slides, uso do GeoGebra e para realizar questionário *online*.

Atividades

1. Introdução

De acordo com os de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999), a Matemática deve ser vista pelo estudante como um instrumento composta por estratégias e técnicas que podem ser aplicadas ao cotidiano e à outras ciências. Já de acordo com Base Nacional Comum Curricular: "Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história" (BRASIL, 2017, pg. 522).

O tema "Cônicas", pertinente ao 3° ano do Ensino Médio, mostrou - se muito intrigante pelas próprias experiências pessoais dos estudantes de graduação, que revelaram que o tema não foi contemplado devidamente durante o ensino médio, fazendo com que seu potencial não fosse explorado de maneira adequada.

O objetivo maior das atividades aqui propostas é possibilitar que o tema "Cônicas" não seja reduzido a um conjunto de equações, mas sim mostrar que é um tema conhecido há muito tempo e muito utilizado no cotidiano. Para tanto, foram empregados: materiais manipuláveis (cone feito com parafina, Bilhar Matemático), um questionário *online* e o *software* GeoGebra, para facilitar a compreensão do estudante, proporcionando a visualização e a manipulação dos objetos geométricos, e até mesmo das propriedades e relações matemáticas. As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos (BRASIL, 1999, p. 43-4).

As cônicas correspondem às curvas elipse, hipérbole e parábola. O nome "cônicas" deve-se à forma como essas curvas foram descobertas por Menaecmus (matemático grego, 380-320 a. C.), a partir de cortes de um cone por um plano não paralelo à base. A partir de trabalhos anteriores, o grande geômetra grego Apolônio de Perga (262-190 a. C.) sistematizou os conhecimentos sobre essas curvas em sua famosa obra "As Cônicas", onde apresenta a definição de secções cônicas como curvas formadas pela intersecção de um plano com a superfície de um cone e introduz ainda os termos parábola, hipérbole e elipse pela primeira vez.

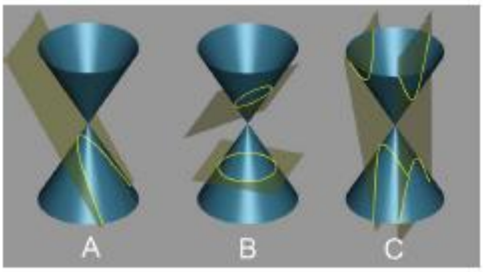
2. Atividades desenvolvidas

a) Introdução às figuras cônicas

O professor iniciará o tema apresentando suas construções a partir de cortes feitos num cone. Será auxiliado por slides com imagens e um cone de parafina, cujo objetivo é facilitar o entendimento das figuras e as diferenças entre elas.

- A elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice e que corta apenas uma das folhas da superfície.
- A hipérbole é uma curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo ao eixo que não passa pelo vértice.
- A parábola é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma reta geratriz do cone (reta que gira em torno do eixo do cone de forma a gerá-lo).

Figura 1: cônicas obtidas a partir das secções no cone

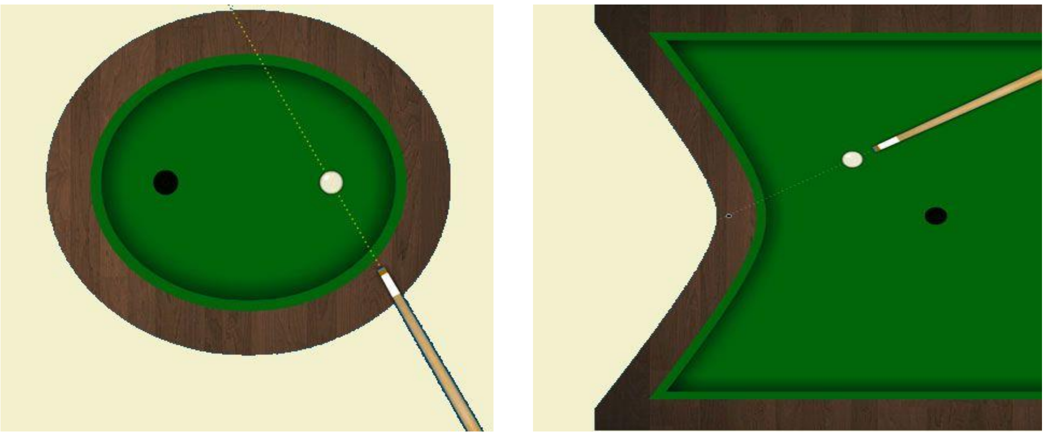


Fonte: SANTOS, 2014, pg. 17.

b) Bilhar Matemático

Será realizada uma atividade com mesas de bilhar no formato das figuras cônicas. O Bilhar Matemático é um jogo de bilhar cuja mesa foi construída no formato de uma curva fechada e que é jogado apenas com uma bola. Matematicamente, a bola representa um ponto e sua trajetória é um segmento de reta que ao atingir a borda da mesa, é refletido num ângulo. As mesas possuem buracos nos focos das curvas, de maneira a mostrar algumas propriedades interessantes das figuras cônicas.

Figuras 2 e 3: mesas de bilhar matemático nos formatos de elipse e hipérbole, respectivamente.



Fonte: http://www.atractor.pt/mat/BilharesConicos/

Os estudantes serão divididos em três grupos e cada grupo terá: 1 bola, 1 mesa, 1 taco e 1 folha de atividades. Cada grupo terá um tempo para cada etapa da atividade.

Primeiro desafio proposto: o professor deve explicar que o objetivo é acertar a bolinha no buraco, jogando-a com o taco de maneira que a bola bata na barreira da mesa no formato de cônica. Os estudantes deverão utilizar pontos aleatórios da mesa. Os estudantes podem e deverão fazer essa análise exploratória em outras mesas, trocando de lugar com os outros estudantes.

Segundo desafio proposto: o professor deve informar que os estudantes devem posicionar as bolinhas nos três pontos (A, B e C) marcados nas mesas. O objetivo e o esquema de troca dos estudantes permanecem como o desafio anterior.

Terceiro desafio proposto: para cada mesa, professor deve informar o seguinte:

- Elipse: o buraco e o ponto C da elipse são justamente os dois focos desta, o que implica que, não importa a direção da bola, sempre cairá no buraco quando lançada do ponto C;
- Hipérbole: a mesa possui o foco marcado em B. Professor deve informar aos estudantes que, não importa o ponto de lançamento da bolinha, se for direcionada para o foco, sempre cairá no buraco (que é o outro foco);

- Parábola: estudantes devem lançar a bola de um ponto A, de maneira que ela percorra uma trajetória paralela ao eixo de simetria. Dessa forma a bola sempre cairá no buraco, que é o foco da parábola.

De mesma forma que os desafios anteriores, os estudantes devem trocar de lugar para jogarem em todas as mesas e perceberem as particularidades de cada uma das cônicas.

Observações:

1ª) Pode ocorrer de não funcionar completamente de acordo com a teoria, por conta do formato da mesa ou efeitos da bola e do taco durante a trajetória até o buraco. É interessante informar aos estudantes essas possíveis divergências entre a atividade prática e o esperado teoricamente.

2ª) No site http://www.atractor.pt/mat/BilharesConicos/ está disponível um simulador *online* das mesas em formato de elipse e hipérbole.

c) Tratamento analítico das cônicas

Primeiro, é necessário revisar as definições de plano cartesiano e distância entre dois pontos. Depois, é proposto que o professor mostre a definição formal de cada uma das cônicas, os seus elementos principais (eixo de simetria, focos, centro, eixos), equação geral e exemplos de aplicação no cotidiano (antena parabólica, espelho, arquitetura, etc).

d) Questionário *online*

Foram colocadas questões sobre o tema cônicas no site “Kahoot!” de maneira a estimular uma competição saudável entre os alunos. O site foi previamente preenchido com algumas questões. Será necessário que cada estudante tenha acesso a um computador, conseguindo acessar ao site ao mesmo tempo.

Para cada questão proposta, os estudantes terão um tempo fixo para responder e, consequentemente, o maior número de pontos proposto pelo jogo consiste em responder de maneira rápida e correta. Para cada questão o professor consegue consolidar as informações de quais questões foram mais acertadas.

3. Conclusões

O uso do material manipulável para a obtenção das cônicas, através das secções no cone de parafina, o jogo do Bilhar matemático e a utilização do *software* para a criação das figuras facilita a abordagem dos conceitos, pois apenas a apresentação expositiva na lousa ou mostrando imagens, não é suficiente para a total exploração das formas geométricas e de suas propriedades. Além disso, possibilita ao docente apresentar o mesmo conteúdo de várias maneiras diferentes, fazendo com que mais estudantes consigam entender o conteúdo proposto ou explorar novas ideias. Desta forma, o docente consegue atrair o interesse do aluno e desenvolver competências matemáticas, fazendo com que este tema não seja uma barreira para o aprendizado do estudante e não seja visto apenas como um conjunto de fórmulas a ser decorado.

Formas previstas de avaliação

Os estudantes serão avaliados das seguintes formas:

- Participação na atividade em grupo do Bilhar Matemático;
- Questionário *online* com questões de vestibulares sobre representação gráfica das cônicas (Parte d).

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio.** Brasília: Ministério da Educação, 1999.

__________ **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Ensino médio. Documento homologado pela Portaria n° 1570, pub. no D.O.U. 21 dez. 2017. Brasília – DF.

GUERRA, E. D. M.; COSTA, M. L. C. DA. **O ensino de secções cônicas: uma abordagem utilizando investigações matemáticas mediadas pelo *software* GeoGebra**. In: EPBEM, 8, 2014, Campina Grande. Anais... Campina Grande: [s.n.], 2014.

SANTOS, M. H. **Cônicas para o Ensino Médio, da Contextualização à Álgebra.** Dissertação PROFMAT) – IME –UFG. Goiânia. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/3197/5/MARCELO%20HONORIO-%20MESTRADO%20tcc_conicas.pdf

CONJUNTOS E CONJUNTOS NUMÉRICOS

PROBLEMAS DE LÓGICA ENVOLVENDO CONJUNTOS

Amanda Braga
Gustavo Del Mercato de Angelo

Ano escolar: 1º ano do ensino médio

Ementa

Operações com conjuntos (união, intersecção, diferença e complementar), Resolução de situações problemas, Representação tabular, Diagramas de Venn.

Objetivos

Aplicar os Diagramas de Venn na resolução de problemas e exercícios de lógica que envolvem conjuntos.

Recursos empregados

Lousa e computador com projetor, para expor as questões e as resoluções.

Atividades

1. Introdução

Problemas de lógica, envolvendo teoria de conjuntos, é um assunto que se justifica pelo o que é apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1999). De acordo com os PCN, algumas das habilidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos são:

- transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa;
- identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc);
- procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- selecionar estratégias de resolução de problemas.

(BRASIL, 1999, p. 47)

Esse é um conteúdo complexo, que exige diversas competências dos alunos, dentre as quais a abstração matemática, pois a resolução de tais problemas requer capacidade de interpretar e representar informações graficamente, por meio de diagramas. A metodologia de ensino por Resolução de Problemas se mostra uma boa alternativa a esse fim, pois trabalha o raciocínio necessário aos alunos para a resolução de exercícios desse tipo, fornecendo ferramentas para resolver essas questões (REITZ; CONTRERAS, 2012).

2. Atividades desenvolvidas

Serão apresentadas duas situações problemas que permitem ao aluno soluções mais intuitivas (que não exigem conhecimento do assunto). A intenção é que o aluno perceba que alguns problemas do seu cotidiano podem ser resolvidos com conjuntos. Após essas situações problemas, serão apresentadas as resoluções de três exercícios, para os quais será incentivada a participação do aluno na solução. Em seguida, será solicitada a resolução de um exercício para avaliar o aprendizado dos alunos.

a) Resolução de problemas

Primeiramente, apresentar o seguinte problema, que permitirá o levantamento dos conhecimentos dos alunos com relação às operações de conjuntos (união e intersecção):

> *O professor de Educação Física marcou dois treinos: para o primeiro foram convocadas as alunas que jogam voleibol ou basquetebol e, para o segundo, foram convocadas as alunas que jogam voleibol e basquetebol. Três alunas do colégio, Regina, Cristina e Rita são jogadoras. Regina joga apenas voleibol, Cristina joga apenas Basquetebol, e Rita joga voleibol e basquetebol. Quem dentre elas deve comparecer ao primeiro treino? E quem deve comparecer ao segundo? (Paiva, 2002, p. 5)*

Os alunos devem expor oralmente suas ideias de resolução e o professor deve estimular que os alunos pensem em diferentes formas de resolvê-lo. Espera-se que três respostas apareceram. Uma resolução direta (sem argumentação formal), uma que utilize representação tabular e uma por Diagrama de Venn. Caso os alunos não atendam essa expectativa, o professor deve apresentar essas três resoluções, além de discutir as que foram apresentadas pelos alunos.

A seguir, outro problema será apresentado para discutir as operações de Diferença e Complemento:

> *Um aluno do ensino médio vai para a escola todos os dias úteis da semana? Se ele não vai, quais são esses dias?*

Espera-se que os alunos percebam que a semana pode ser considerada um conjunto de dias e separada em dois subconjuntos – "Dias Úteis" e "Fins de Semana" – e que esses conjuntos são complementares com relação ao conjunto Universo (semana).

b) Exercícios

Serão propostos três exercícios para serem resolvidos pelos alunos em aula, seguidos de uma discussão sobre a resolução. Após o término destes, os alunos devem resolver em uma folha separada o quarto exercício para entregar.

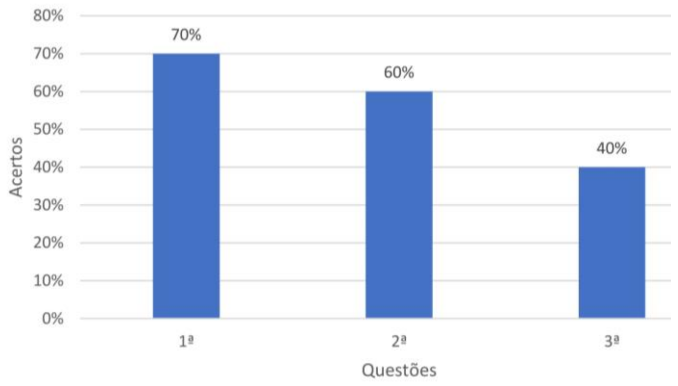
1. Foram entrevistadas cinquenta pessoas sobre suas preferências em relação a duas marcas A e B de um produto. Os resultados da pesquisa foram, precisamente:
    - 21 pessoas responderam que preferem a marca A;
    - dez pessoas responderam que usam tanto a marca A quanto a B;
    - cinco pessoas responderam que não usam nenhuma das duas marcas.

    De acordo com esses dados, quantas pessoas usam somente a marca B?

2. O departamento de seleção de pessoal de uma indústria automobilística, analisando o currículo de 47 candidatos, concluiu que apenas três dos candidatos nunca trabalharam em montagem ou pintura; e que precisamente 32 candidatos já trabalharam em montagem e 29 trabalharam em pintura. Quantos desses candidatos já trabalharam nos dois setores?

3. (UFT-TO) Foi aplicado um teste contendo três questões para um grupo de 80 alunos. O gráfico abaixo representa a porcentagem de acerto dos alunos por questão.

Gráfico



Fonte: https://www.stoodi.com.br/exercicios/uft/outros/questao/

Suponha que 52 alunos acertaram pelo menos duas questões e 8 alunos não acertaram nenhuma. O número de alunos que acertaram as três questões é:

a) 44 b) 40 c) 12 d) 20 e) 30

4. Em uma comunidade constituída de 1800 pessoas há três programas de TV favoritos: esportes (E), novela (N) e humorismo (H). A tabela a seguir indica quantas pessoas assistem a estes programas:

Programas	E	N	H	E e N	N e H	E e H	E, N e H
Número de telespectadores	400	1220	1080	202	800	180	100

Por meios desses dados, verifica-se que o número de pessoas da comunidade que não assistem a qualquer dos três programas é:

a) 102 b) 282 c) 900 d)1518 e) n.d.a

3. Conclusões

As atividades mostram que é possível estabelecer uma relação forte do conteúdo com o cotidiano do aluno. E de acordo com os PCN (BRASIL, 1999), é muito importante que se estabeleça essa relação, pois promove um maior interesse do aluno e possibilita que o aluno aplique os conhecimentos adquiridos em sala no seu cotidiano com maior facilidade.

Formas previstas de avaliação

Os alunos serão avaliados pela sua participação em sala de aula e pela entrega de um exercício no final da aula.

Referências

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC, 1999.

PAIVA, M. **Matemática: conceitos, linguagem e aplicações.** Vol 1. 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2002.

REITZ, M. D. C.; CONTRERAS, H. S. H. Resolução de problemas matemáticos: desafio na aprendizagem. **Revista Chão da Escola**. Outubro de 2012, pg. 49 - 57.

NÚMEROS NEGATIVOS E OPERAÇÕES

Jonathan dos Santos Costa
Lucas Vinicius Terassi

Ano escolar: 1º ano do Ensino Médio

Ementa

Números inteiros. Operações com os números inteiros. Vetores unidimensionais. Regras de sinais.

Objetivos

De modo geral, a aula deve verificar qual o conhecimento que o aluno tem sobre as operações com os números negativos. Além disso, de maneira mais específica, o objetivo é responder a possíveis dúvidas sobre regras de sinais, trazendo uma abordagem mais compreensível para que os alunos possam desenvolver um senso numérico mais aguçado.

Recursos empregados

- Slides de apoio para a conceituação do tema, preparado pelos próprios professores;
- O ábaco dos números negativos, resgatando a ideia de números menores do que zero, e algumas operações básicas (soma e subtração) com números inteiros;
- Vídeo "Menor que Zero" - Cyberchase: O vídeo apresenta de maneira simples o conceito dos números negativos, trazendo que a partir de um "eixo de simetria", seria capaz de captar a ideia dos números acima e abaixo deste eixo;
- Lousa do tipo quadro branco, para resolução de dúvidas que surgirem entre os alunos.

Atividades

1. Introdução

Analisando a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e conversando com alguns alunos do ensino médio, encontra-se a dificuldade de compreensão das operações que envolvam os números negativos. Sendo assim, a presente proposta visa contemplar o tema das operações aritméticas e as regras de sinais para adição, subtração e multiplicação de números inteiros.

Além disso, é crucial trazer para os alunos a perspectiva de onde é possível encontrar os números negativos no cotidiano. Por isso, apresenta-se exemplos simples, mas que evidenciam a importância de conhecer e dominar este conteúdo, para que os estudantes desenvolvam a capacidade de resolução dos problemas casuais de suas vidas, desenvolvendo um senso numérico, capaz de avaliar quando usar este conhecimento.

A aula é desenvolvida utilizando uma mescla das abordagens de ensino e das tendências em Educação Matemática. A abordagem cognitivista (ou construtivista) de Piaget se baseia no conflito cognitivo para que, através dele, desenvolva-se a capacidade de assimilação do estudante, onde o professor deve intermediar este processo trazendo situações-problema desafiadoras para os alunos. Visando esta abordagem de ensino, para que seja possível causar esse conflito cognitivo, deve-se conhecer o ponto onde o aluno está para, a partir disto, avançar nos conteúdos específicos do planejamento escolar. Para saber o ponto de partida neste planejamento, optou-se por uma atividade diagnóstica simples e rápida no início da aula. Assim é possível avaliar quais são os conhecimentos prévios de cada aluno e como usar isso em favor do desenvolvimento da aula, para o ensino do conteúdo. O erro, na perspectiva construtivista, tem a capacidade de direcionar a aula.

Também é empregada a abordagem de ensino expositiva, em alguns poucos momentos da aula, na apresentação do conteúdo em slides de PowerPoint. A ideia é que essa abordagem seja utilizada em poucos momentos no decorrer da aula, pois quer-se focar na atividade com material manipulável, para que a partir desta seja possível construir os conceitos a serem abordados.

Por se tratar de uma aula introdutória do tema, além de ser, em certa medida, uma revisão específica do tema, a ideia é desenvolver atividades em pequenos grupos, para que os alunos cooperem entre si, relembrando conceitos já conhecidos, sendo que o professor deve intervir e explicar quando for necessário.

Desta maneira, a aula está fundamentada nos princípios cognitivistas (interação, cooperação, equilibração, etc), além de fazer uso em determinados momentos da aula uma perspectiva um pouco mais parecida com a tradicional (principalmente, no momento da explanação dos conteúdos, utilizando os slides, a lousa, entres outros).

Das tendências em Educação Matemática, a aula aborda a Interdisciplinaridade, a Resolução de Problemas, a Modelagem e a História da Matemática. A BNCC enfatiza a contextualização e a interdisciplinaridade dos conteúdos a serem trabalhados. Desta maneira, foi trazido estes enfoques para a aula, buscando exemplos que possam ser relacionados a outras áreas do conhecimento. Apesar de focar a interdisciplinaridade nesta aula introdutória, é importante não banalizar a Matemática como apenas uma ferramenta de aplicação nas outras áreas.

Será apresentado um breve comentário dos diversos símbolos utilizados ao longo da história da Matemática para representar os números negativos, com o objetivo de explicitar que nem sempre o sinal de "menos" (-) indicou uma subtração a ser realizada, mas pode ser apenas um símbolo para identificar um número menor que zero (negativo).

A aula também proporciona a resolução de problemas, por isso a importância em explicar o raciocínio lógico desenvolvido na resolução dos exercícios. A resolução em grupo reforça, novamente, a atitude de cooperação. Na resolução de problemas o importante não é apenas a resposta final, mas sim o raciocínio elaborado, tornando os alunos capazes de analisar o erro qualitativamente.

2. Atividades desenvolvidas

a) Realização de atividade avaliativa: após a apresentação breve do roteiro de aula, inicia-se uma atividade rápida com cinco exercícios que envolvam conceitos do ensino fundamental, a título de revisão.

Os exercícios propostos são:

$\{[17 + (5.3) - 52] + 5^2\}.2 = \qquad (Resp. 10);$

$\left[\frac{(3^3 - 2^3)}{19} + 3\right] - \sqrt{8^2 + 6^2} = \qquad (Resp. -6);$

Resolver a equação em Z: $2x + 5.(13 - 4^2) = -18 \quad (Resp.\ \ S = \{\ \})$ Neste caso, x não pertence a Z;

$\left(\dfrac{\dfrac{5.7.8}{\sqrt{2^2.2^2}}}{-5}\right).(-3) =$ $\qquad (Resp. 42);$

Desenvolver o produto: $(3x^2 - 5x + 2).(-x + 2) =$ $\qquad (Resp. -3x^3 + 11x^2 - 12x + 4, \forall x \in Z)$

Enquanto os alunos realizam os exercícios, os professores devem circular pela sala, visualizando as principais dificuldades. Após o tempo pré-determinado para a realização da atividade, o professor deve corrigi-los na lousa. Caso os alunos encontrem muita dificuldade, o ideal é uma resolução passo a passo, de cada exercício. Para finalizar este primeiro momento, questiona-se quais foram as principais dificuldades que os alunos sentiram ao resolver os exercícios.

b) Origem (histórica) dos sinais: a seguir, o professor apresenta um episódio da História da Matemática, buscando explanar, de maneira sucinta, como surgiram os sinais de adição e subtração, até serem introduzidos tal como conhecemos nos dias atuais.

Figura 1: mudanças do sinal de adição

et → t → t → † → ✝ → +

Fonte: CAVALCANTE (2013b)

Figura 2: Mudanças no sinal de subtração:

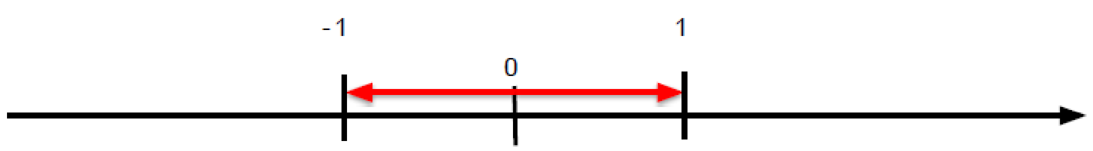
4 minus 3 = 1 → 4 $\overline{\text{mus}}$ 3 = 1 → 4 – 3 = 1

Fonte: CAVALCANTE (2013a)

c) Apresentação do vídeo: no terceiro momento da aula, propõe-se apresentar um vídeo de divulgação como disparador da discussão. A ideia tratada é, em especial, sobre o sinal de subtração, que pode indicar a operação de subtração, mas também o elemento oposto. O vídeo proposto é o “Less than zero (Temporada 1, ep. 21)”.

d) Conceituar os números negativos sob diferentes interpretações, como na reta numérica, nos vetores e em problemas com dinheiro que envolvem dívidas. Neste quarto momento, a ideia é apresentar os números negativos na reta numérica e os números negativos como os elementos opostos ou simétricos em relação ao zero.

Figura 3: números opostos na reta numérica



Fonte: Própria (2018)

e) Ábaco de números inteiros: utilizando o ábaco com dois pinos, atribuímos o negativo a uma cor de disco e o positivo a outra. Através de relações com o dinheiro, podemos apresentar as operações de adição e subtração entre os números inteiros de maneira visual e manipulável, a fim de criar conexões com a matemática simbólica.

Com o ábaco é possível efetuar adições, subtrações e multiplicações, de acordo com as regras de sinais.

Figura 4a: ábaco de nºs inteiros

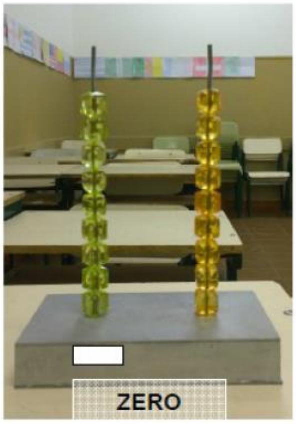
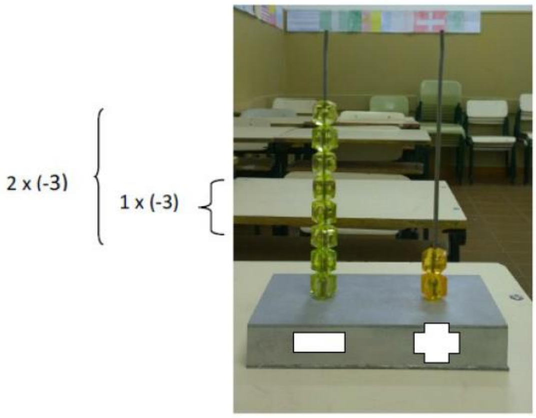


Figura 4b: multiplicação 2. (-3) no ábaco



Fonte: SILVA (2016)

f) Apresentar a regra de sinais para a multiplicação de números inteiros com foco em vetores, para mostrar visualmente a multiplicação por um número negativo pela inversão do sentido do vetor. Considera-se ser uma maneira intuitiva e conceitualmente adequada para explicações de resultados como "menos com menos dá mais", que costumam confundir os alunos.

3. Conclusões

Através das pesquisas e da elaboração deste material, concluiu-se que os números negativos podem ser apresentados de maneiras incompatíveis com o conceito formal. O uso de metáforas e analogias no ensino de Matemática é bem-vindo, mas algumas delas podem dificultar o aprendizado do conjunto dos números inteiros. A dificuldade em trazer situações concretas para o próprio "sinal de menos" é um obstáculo que só será superado com o desenvolvimento adequado do chamado senso numérico, desde o primeiro contato do aluno com o ambiente escolar. Espera-se que esse plano de aula possa trazer à classe perspectivas de discussão em relação à prática didática e ao conjunto dos números inteiros.

Formas previstas de avaliação

Iniciaremos com a avaliação diagnóstica, que conta com uma atividade simples, cujo objetivo é avaliar qual deve ser o ponto de partida de nossas próximas aulas. Além disso, é importante que os alunos resolvam as atividades da aula em pequenos grupos, expondo o raciocínio lógico para resolução. Enquanto isso, passaremos entre os grupos para acompanhar o desenvolvimento dos alunos ao expor o raciocínio da resolução destas atividades. Os discursos oralizados no decorrer da aula também serão sistematizados e analisados, para que os alunos internalizem os objetivos e critérios de avaliação.

Referências

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo, SP: Ed. da Unesp, c1999. 313 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso 22 jul. 2018

CAVALCANTE, R. A origem do sinal de Subtração. **Vivendo entre Símbolos**, 2013a. Disponível em: <https://www.vivendoentresimbolos.com/2013/04/a-origem-do-sinal-de-subtracao.html>. Acesso em: 18 jul. 2018.

___________. A origem do sinal de Adição. **Vivendo entre Símbolos**, 2013b. Disponível em: <https://www.vivendoentresimbolos.com/2013/03/a-origem-do-sinal-de-adicao.html>. Acesso em: 18 jul. 2018.

___________. Como Aprender Regra de Sinais. **Vivendo entre Símbolos**, 2014. Disponível em: <https://www.vivendoentresimbolos.com/2014/09/como-aprender-regra-de-sinais.html>. Acesso em: 18 jul. 2018.

GONÇALVES, H.J.L.; PIRES, C.C. Educação Matemática na Educação Profissional de Nível Médio: análise sobre possibilidades de abordagens interdisciplinares. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 230-254, abr. 2014.

LA TAILLE, Y. O erro na perspectiva piagetiana. **Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas.** São Paulo: Summus, p. 25-44, 1997.

MENDES, D. Regra de Sinais da multiplicação e da divisão sem truques!!!. **Laboratório Sustentável da Matemática**, 2017. Disponível em: <https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2017/12/regra-de-sinais-da-multiplicacao-e-da-divisao-sem-truques.html>. Acesso em: 18 jul. 2018.

LESS than zero (Temporada 1, ep. 21). **Cyberchase** [seriado]. Direção de Larry Jacobs. Produtora Nelvana, 2002. Youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=kPzQWUT7RVg >. Acesso em: 23 jul. 2018.

SILVA, E.G.I. e CONTI, K.C. O ábaco dos números inteiros: auxílio aos estudantes na compreensão dos números negativos e suas operações. **REVEMAT.** Florianópolis, v. 11, n. 1, p. 74-83, 2016.

INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS RACIONAIS NA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

André de Sousa Pinto
Matheus Giunti

Ano escolar: 1ª série do Ensino Médio

Ementa

Construção e definição dos números racionais a partir de segmentos comensuráveis, operações entre números racionais (soma, subtração, produto e divisão), razão e proporção entre grandezas. A Matemática e a Música: Monocórdio de Pitágoras, o temperamento da escala musical, a proporcionalidade entre intervalos e notas musicais.

Objetivos

Espera-se que os alunos compreendam e se apropriem da representação fracionária dos números racionais e do caráter comparativo que esta representação pode proporcionar (estabelecer relações de proporcionalidade entre numerais), a partir da intersecção entre Matemática e Música, evidenciando a relação matemática existente entre as notas musicais.

Recursos empregados

- Lousa e giz: transcrição da teoria, exercícios, exemplos, etc.
- Computador, projetor, caixas de som e Audacity (*software* gratuito): apresentação de imagens, vídeos da plataforma YouTube, de forma a ilustrar os conteúdos abordados. O *software* Audacity será usado para criar padrões sonoros de frequência para exemplificar a recepção, percepção e compreensão dos sons pelo sistema nervoso central de uma pessoa.

Atividades

1. Introdução

Inicialmente, o professor introduzirá e definirá o conjunto dos números racionais a partir da ideia de segmentos comensuráveis, focando na representação fracionária.

O professor deve mostrar as divisões e subdivisões de um segmento a partir de um outro segmento unitário tomado como unidade e assim definir um número racional como uma razão entre dois números inteiros, construídos a partir da proporção entre os segmentos (note que essa ideia exclui a divisão por zero, pois não há um segmento de medida nula).

Feita a definição dos números racionais, o professor deverá apresentar as principais operações utilizando números racionais: soma, subtração, produto e divisão.

Para tal, o professor pode optar por continuar com a ideia de segmentos ou simplesmente utilizar os números com diversos exemplos. Deve-se, ainda, atentar para um nível crescente de dificuldade nos exemplos, começando por frações de mesmo denominador, frações com denominadores primos entre si, frações com denominadores distintos e não primos entre si, etc, tornando gradual, compreensível e assimilável o nível dos exemplos e exercícios.

2. Atividades desenvolvidas: Matemática e Música

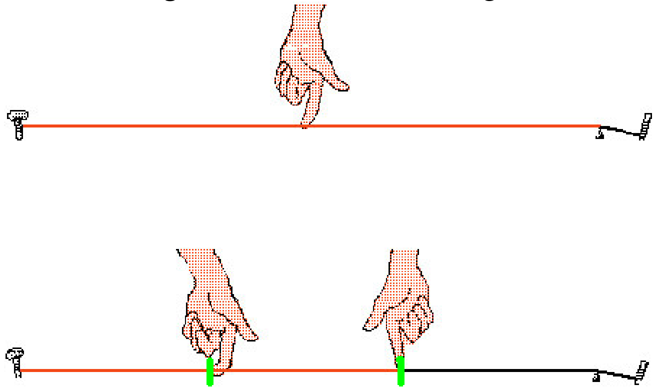
O professor deverá iniciar a atividade ressaltando a presença da matemática no cotidiano nas mais variadas maneiras, inclusive na música. Assim será possível apresentar a observação de Pitágoras sobre a relação harmoniosa entre alguns sons, o que o levou a criar o seu instrumento de experimentação (o monocórdio). Além disso, também será possível explicar a relação matemática entre os intervalos e notas musicais: Pitágoras buscou as relações de comprimentos entre os dois trechos de corda no monocórdio, isto é, razões de números inteiros que gerassem determinados intervalos sonoros.

a) Fundamentação Teórica

O Monocórdio de Pitágoras consiste na primeira experiência musical registrada na história da música. A relação entre notas musicais estabelecidas por Pitágoras era gerada a partir de intervalos de quinta, isto é, dividindo-se a corda em três pedaços iguais e tomando a terça parte. Essa relação entre os sons do segmento total e o da sua terça parte sempre gera um som agradável aos ouvidos humanos (nota fundamental e a sua quinta).

Aqui entra a relação direta entre segmentos comensuráveis:

Figura 1: o Monocórdio de Pitágoras



Fonte: https://arquiteturaemusica.wordpress.com/2014/01/01/pitagoras-e-a-harmonia/

Porém, as notas obtidas dessa maneira pitagórica, geradas por relações aritméticas, produzem a cada oitava notas diferentes das primeiras. Essas notas são sensivelmente desiguais, ou seja, cada novo conjunto de notas é diferente do anterior. Para corrigir essa desafinação, utilizou-se o cálculo de médias aritmética, geométrica e harmônica (SALLES, 2009), gerando a escala temperada:

Tabela 1: escala temperada

Intervalo	Intervalo
1	Primeira
8/9	Segunda
4/5	Terça
3/4	Quarta
2/3	Quinta
3/5	Sexta
8/15	Sétima
1/2	Oitava

Com isso, o professor apresentará alguns conceitos elementares de como o cérebro humano interpreta a frequência das notas musicais e como isso influencia no fato de algumas notas, quando tocadas de forma conjunta (acordes), causam a sensação de harmonia ou de estranheza (NOVAES, 2006). Podem ser exibidos gráficos da frequência de algumas notas musicais a título de curiosidade.

b) Uso do *Software*

Para exemplificar essas sensações que o cérebro tem ao ouvir notas musicais e as relações entre elas, pode-se utilizar o *software* gratuito Audacity. Com ele, pode-se construir composições de pulsos sonoros, exemplificando as frações que representam os intervalos entre as notas musicais de uma escala.

A partir disso, o professor poderá mostrar que os intervalos que produzem sons mais agradáveis aos ouvidos humanos são os que têm frações "mais simples", ou seja, os intervalos de primeira (tônica), quarta, quinta e sexta. E, partindo dessa ideia, mostrar que é possível tocar inúmeras músicas de diversos estilos musicais, os chamados *Four Chor Songs* (músicas de quatro acordes).

Obs:

1) O link a seguir apresenta uma série de vídeos da TV Cultura que serve como embasamento teórico-didático para a atividade: https://goo.gl/xRXbPu
2) Caso o professor não toque instrumentos musicais, há vídeos na plataforma YouTube e aplicativos para *smartphones* e *tablets* que podem ilustrar as ideias aqui apresentadas.

Formas previstas de avaliação

Avaliação continuada durante as aulas e atividades, exercícios com operações entre racionais e construção da tabela de razões entre os intervalos das notas musicais.

Referências

NOVAES, C. F. **Uma abordagem físico-matemática das qualidades fisiológicas do som**. III Bienal da SBM, IME/UFG, 2006.

RIBEIRO, F. C. A escala musical como metodologia para o ensino de frações. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor** PDE, UENP. Paraná, 2013.

SALLES, P. T. **Pitágoras e a Escala Musical**. Departamento de Música da Escola de Comunicações e Artes da Universidade de São Paulo (CMU-ECA/USP). São Paulo, 2009.

SILVA, G. R. **A matemática e a música: uma introdução ao ensino das frações.** Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2011.

NÚMERO RACIONAIS E IRRACIONAIS

Larissa Cardoso Augusto
Thabata Tecla Provin de Almeida

Ano escolar: 1º ano do ensino médio

Ementa

Conceituação e aplicabilidade dos números racionais; Conceituação e aplicabilidade dos números irracionais.

Objetivos

Objetivos Gerais: Fazer estudo da teoria dos números racionais e irracionais, apresentando os principais conceitos em questão. Apresentar e analisar, em seus diferentes contextos, cada um deles.
Objetivos Específicos:

- Compreender a noção de um número racional e de irracional, assim como identificá-los;
- Apresentar o conjunto dos números racionais conhecendo sua representação decimal;
- Compreender o surgimento do conjunto dos números Irracionais, sua representação e a importância deles.

Recursos empregados

- Apresentação em Power Point;
- Vídeo: 1. O Antigo Egito Parte ½ (https://youtu.be/9nudlXiFZSo)
- Uso de materiais manipuláveis: objetos circulares, fita métrica, post-it, folhas com segmentos de reta;
- *Software* GeoGebra.

Atividades

1. Introdução

Os números racionais e irracionais estão presentes em diferentes situações do cotidiano, o que torna a apresentação e trabalho com os mesmos em situações problemas necessários para o desenvolvimento de habilidades e competências dos alunos, para que estes sejam capazes de compreender e aplicar esse conhecimento nos diferentes contextos.

Por tratar-se de uma aula para alunos do 1º ano do ensino médio, adotamos a metodologia expositiva com alguns elementos da metodologia Freireana como a resolução de problemas entre docentes e alunos numa relação horizontal de dialogicidade, a interdisciplinaridade dos conteúdos e a ampliação da visão de mundo a partir da participação ativa dos alunos nos trabalhos desenvolvidos.

Os conceitos que apresentamos estão baseados na história do Egito Antigo, civilização precursora na resolução de problemas da vida cotidiana, da economia e da agricultura através de termos matemáticos. Além disso, aborda-se a história da Escola

Pitagórica, fundada por Pitágoras em 570 A.C, que proporcionou importante desenvolvimento da Matemática, especialmente do estudo dos números como, por exemplo, os números irracionais.

2. Atividades desenvolvidas

a) Apresentação do tema

Aula inicia-se de forma expositiva e dialogada, com apresentação em PowerPoint sobre o surgimento dos números racionais e irracionais, explicação do conceito e exemplificação de cada um deles. O vídeo: "O Antigo Egito - Parte ½" pode ser apresentado como complemento às explicações da aula.

b) Atividade em grupo

Atividade prática com números racionais que valorizam a experiência, o conhecimento prévio e auxiliam na construção de novos conhecimentos e no trabalho em grupo. Nesta dinâmica serão formados grupos de 4 ou 5 alunos que receberão uma folha contendo dois segmentos de reta e vários pedaços de papel colorido, cortados previamente em dois tamanhos diferentes. Os alunos devem medir o comprimento dos dois segmentos usando como unidade de medida os retalhos coloridos. A ideia é verificar se é possível medir os dois segmentos com apenas retalhos de um tamanho, ou se são necessários os dois tamanhos para isso. O objetivo é descobrir a maior medida comum para os dois segmentos e obter a razão (fração) entre as medidas.

c) Perímetro de figuras circulares

Dando continuidade à atividade anterior, os grupos devem medir os comprimentos do raio e do perímetro da circunferência em algumas figuras circulares. Feitas as medidas, os grupos devem encontrar a razão entre o perímetro da circunferência e o diâmetro, encontrando uma aproximação para o número π.

d) Uso do GeoGebra

Semelhante ao item c, a atividade é, agora, individual. Cada aluno vai medir o raio e o perímetro de uma circunferência, usando o *software* GeoGebra. O objetivo é incentivar o envolvimento do aluno com o *software* e ajudar na visualização e entendimento da atividade anterior e dos números irracionais.

e) Sistematização dos conhecimentos construídos nas atividades práticas.

3. Conclusões

A preparação de uma aula voltada para alunos do 1º ano de ensino médio com materiais manipuláveis foi um desafio por tratar-se de um tema difícil e abstrato. Além disso, avaliou-se que seriam necessárias ministrar ao menos duas aulas para explicar e consolidar o conhecimento sobre números Racionais e Irracionais, para aumentar o nível de qualidade da aprendizagem. Contudo, conclui-se que é possível abordar a matemática de modo menos tecnicista e mais interdisciplinar sem afetar o currículo escolar vigente.

Formas previstas de avaliação

Participação individual; Participação em trabalho em grupo; Avaliação contínua durante as aulas e as atividades propostas.

Referências

Conjuntos numéricos. Disponível em: <https://www.estudopratico.com.br/conjuntos-numericos/>. Acesso em: 13 jul. 2018.

Origem do números irracionais. Disponível em <https://www.somatematica.com.br/irracionais.php>. Acesso em: 13 jul. 2018.

O começo dos números racionais. Disponível em: <https://matematicaracionais.blogspot.com/p/o-comeco-dos-numeros-racionais.html>. Acesso em: 13 jul. 2018.

FIGUEIREDO, D. G. **Números irracionais e transcendentes**. SBM, 2002. Coleção iniciação cientifica.

Escola Pitagórica. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/escpita.htm>. Acesso em: 12 jul. 2018.

FUNÇÕES

FUNÇÃO POLINOMIAL DO PRIMEIRO GRAU

Gabriel Henrique Lana Lourenço
Luis Felipe Holanda de Sá

Ano escolar: 1º ano do Ensino Médio

Ementa

Função afim; Função crescente e decrescente; Conceito de zero de função (raiz da função); Domínio e Imagem.

Objetivos

- Compreender o conceito de função, assim como função crescente e decrescente;
- Compreender o conceito de domínio e imagem, assim como a sua aplicação na análise de uma função afim.

Recursos empregados

Quadro, giz, projetor multimídia, PowerPoint e *Software* GeoGebra.

Atividades

1. Introdução

Primeiramente explicar o que é uma função linear usando como exemplo um carro ou uma pessoa andando em velocidade constante, de modo a demonstrar que a razão entre a variação do eixo y pela variação do eixo x seja constante.

Apresentação do coeficiente angular (a) da função, voltando ao exemplo inicial da aula, para definir que $\Delta y/\Delta x$ é dado como o valor do coeficiente angular, o qual pode ser apresentado como a tangente do ângulo de inclinação.

Definição de função crescente ($a > 0$) e função decrescente ($a < 0$).

A partir disso, o GeoGebra será utilizado pelos alunos, em conjunto com o professor, para apresentar exemplos com variações do valor do coeficiente angular da função para demonstrar como a variação deste pode alterar a forma da função.

Apresentação do coeficiente linear (b) da função, demonstrando como a variação deste pode alterar a forma da função. *Destacar a situação em que $b = 0$, caso no qual a função assume a forma de $f(x) = ax$. Caso $a = 1$, assume a forma de $f(x) = x$ ($y = x$), sendo uma **função identidade**.

Definição de domínio e imagem, com o auxílio do GeoGebra.

Apresentar exercícios para melhor compreensão do assunto destacado.

2. Descrição da Situação de Ensino

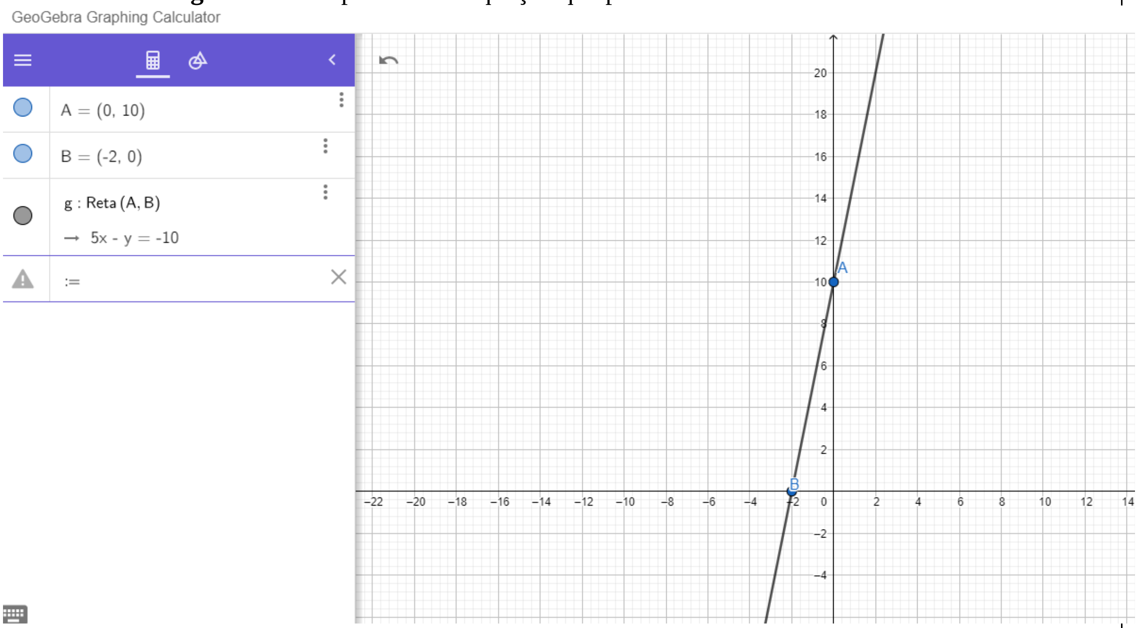
- Situação de ensino: “Uso de função afim para determinar o volume de um determinado reservatório, em relação ao tempo de esvaziamento”
- Objetivos: O objetivo da questão é fazer com que o aluno trabalhe o tema exposto em aula, relacionando com algo que ocorre no mundo real ou na sociedade, para melhor compreensão do conteúdo.
- Recursos: GeoGebra, projetor, computador, lousa e giz.

- Desenvolvimento:

Primeiro apresentaremos no slide uma explicação sobre o conteúdo que será abordado em aula. No caso, explicaremos sobre estes temas: coeficiente angular, coeficiente linear, domínio e imagem de função, reta crescente e decrescente e também função identidade. Em caso de alguns conteúdos será possível o uso do giz e da lousa.

Após a explicação, para buscar uma melhor compreensão do tema, mostraremos algumas funções com o auxílio do *software* GeoGebra, e pediremos para que os alunos mexerem no *software* instalado nos computadores, no caso achar uma reta a partir de dois pontos, por exemplo.

Figura 1: Exemplo de uma equação que pode ser utilizada no GeoGebra



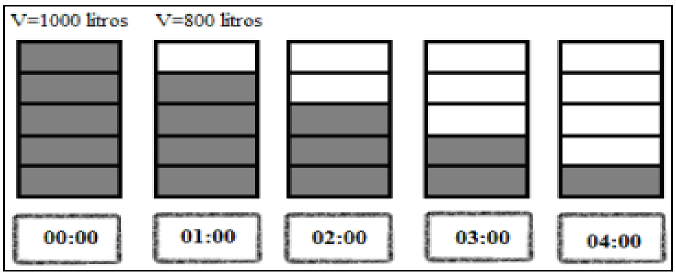
Fonte: Construção dos autores

Em seguida, pediremos aos alunos que façam uma atividade, que relaciona tudo que foi apresentado em aula.

Exercício:

Um reservatório de água, com capacidade de 1000 litros está cheio. O registro é aberto para esvaziá-lo e um cronômetro, com tempo em horas, é acionado no instante em que se inicia o escoamento constante, conforme a figura abaixo. Observe que o desenho mostra o reservatório e os visores do cronômetro.

Figura 2: ilustração do exercício



a) Observando a figura anterior, complete a tabela abaixo:

Tabela 1: Tempo (h) X Volume (l)

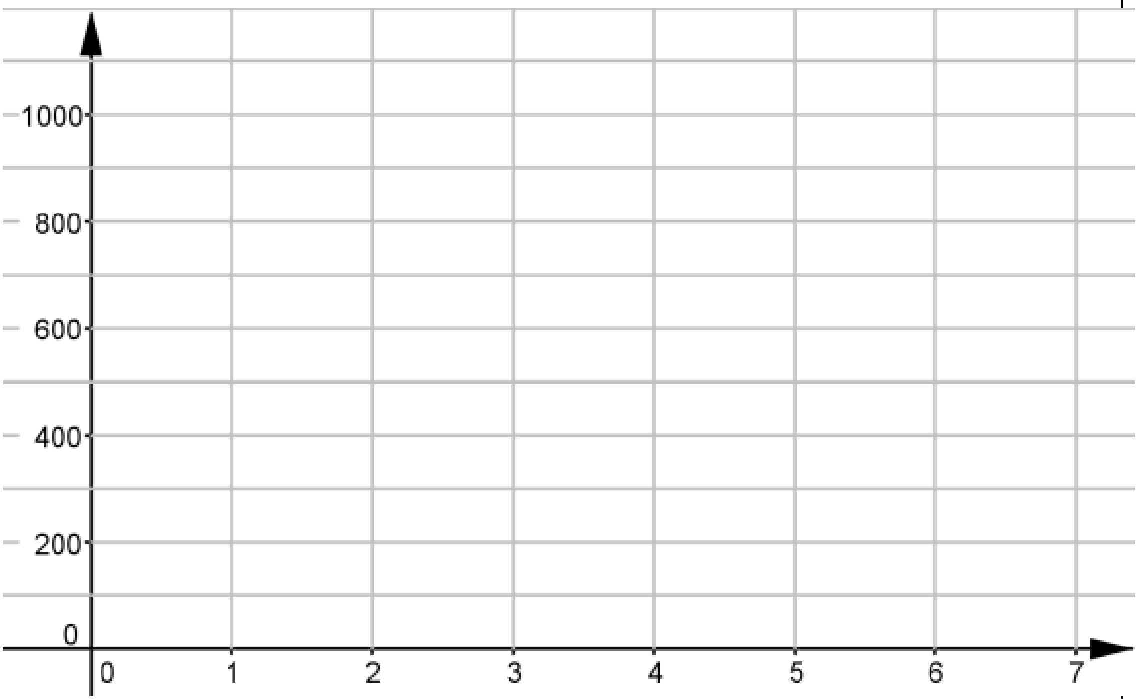
Tempo (horas)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
Volume (litros)	1000		800						

b) Qual o volume de água que sai do reservatório por hora?

c) Para tempos superiores a 5 horas, qual seria o volume de água no reservatório?

d) Represente no plano cartesiano os dados obtidos da tabela anterior. Considere o tempo no eixo das abscissas e o volume do tanque no eixo das ordenadas.

Figura 3: Plano Cartesiano



e) Encontre uma equação que relacione o volume (**V**) no reservatório com o tempo (**t**) a partir do instante que o mesmo começou a ser esvaziado.

f) Usando a equação encontrada no item (e), calcule o volume em 0,5 h, 1,5 h e 2,5 h e verifique se os valores coincidem com aqueles que você completou na tabela?

g) Qual o domínio e a imagem da função?

Formas previstas de avaliação

Cada aluno será avaliado com base nas competências necessárias para a compreensão do conteúdo, através da atividade proposta em aula.

Referências

ALRO, Helle & SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BRASIL, SEB, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.** Brasília: Ministério da Educação – Secretaria da Educação Básica, 1999.

__________. **PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2008.Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf . Acesso em 15 ago. 2018.

_________. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio.** Brasília: MEC, 2017.Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_ embaixa _site.pdf . Acesso em 15 ago. 2018.

FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Caio Augusto Navarro
Sara dos Santos Costa

Ano escolar: 1º ano do ensino médio

Ementa

Aplicação de funções quadráticas no cotidiano; cálculo das raízes de funções quadráticas; montagem e análise de gráficos; comportamento das funções quadráticas.

Objetivos

Compreender a linguagem algébrica; descrever situações em que o conceito é visto; conjecturar aplicações; organizar-se e trabalhar em grupos; resolver problemas sobre funções quadráticas; transferir o conceito para diferentes âmbitos do conhecimento; compreender, analisar e traçar gráficos; compreender e analisar o comportamento das funções quadráticas.

Recursos empregados

- *Software* GeoGebra;
- Vídeo sobre a história das funções quadráticas;
- Apresentação em PowerPoint.

Atividades

1. Introdução

A relação de dependência entre diferentes grandezas é um assunto fundamental a ser trabalhado em contextos significativos. Sabe-se que uma das dificuldades apresentadas pelos alunos, no processo de aprendizagem, é a aplicação da matemática no meio em que eles estão inseridos, tanto de formas mais abrangentes, presentes nas aplicações cotidianas, como nas abstrações demandadas para uma compreensão mais completa do tema trabalhado. Dada a situação descrita, enfatiza-se a importância do uso de materiais e de atividade diferentes que possam explicitar, de forma intuitiva e lúdica, as relações apontadas e suas representações matemáticas.

2. Atividades desenvolvidas

a) Contextualização do tema

Primeiramente, executa-se uma retomada do tema, apresentando a aplicabilidade do mesmo na sociedade, por meio de apresentação expositiva, na forma de slides. Com o intuito de realizar uma breve contextualização histórica do conceito de função será apresentado aos alunos, no início da aula, um vídeo. Os alunos irão perceber que tal conceito teve início há 4000 anos atrás, mas apenas nos três últimos séculos houve um desenvolvimento da noção de função que temos atualmente, com estreita ligação ao Cálculo e Análise.

Mostrando que os babilônios e os egípcios já faziam tabelas, nas quais representavam relações entre variáveis, é possível desmistificar a ideia de que o conceito matemático foi criado do nada, por um único gênio brilhante e que não teve nenhum desenvolvimento teórico e histórico. É de suma importância que o educando saiba que tal desenvolvimento durou séculos e que teve contribuição de diversas culturas e gerações. Mostrando assim, que a matemática é uma criação humana, podendo ser uma ferramenta para o mesmo.

Após a contextualização, será abordado os conceitos já vistos pelos alunos. A definição de função quadrática como sendo função $f: R \to R$, dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$. Retomaremos que o gráfico de uma função quadrática ou polinomial de 2º grau é uma curva denominada parábola, uma figura geométrica plana, sendo o conjunto de pontos cuja distância do eixo x é sempre a mesma que de um ponto F (foco).

b) Atividade em Grupo

Será então, aplicada a atividade que tem como objetivo o aluno desenvolver a habilidade de compreender, analisar e traçar gráficos de funções quadráticas. A sala será dividida em grupos de quatro a cinco alunos. Cada grupo recebe duas folhas: uma de papel sulfite e a outra de papel milimetrado. Na primeira, o grupo escreverá duas funções quadráticas (à escolha do grupo), sendo que uma delas deve ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, enquanto para a outra, deve-se apresentar coordenadas do plano cartesiano que possibilitem a construção do gráfico da mesma. Na segunda folha, o grupo deverá traçar as duas funções escolhidas.

Feito isso, os grupos trocarão as folhas sulfite com os demais e, então, traçarão as funções recebidas no chão da sala de aula, com uso de giz. O professor, a todo momento, passará de grupo em grupo, observando as discussões, interferindo quando achar necessário, respondendo indagações dos alunos e estimulando a discussão dentro do grupo.

Os alunos precisarão desenvolver algumas formas de traçar a curva da função. Uma vez que a técnica não foi imposta pelo professor. Os mesmos, ao trocar ideias e conjecturas para o desenvolvimento da atividade, compreenderão que há uma relação entre as duas variáveis e dependendo da forma da função o gráfico terá formas distintas.

Posteriormente, os grupos comparam os gráficos traçados no papel milimetrado com aqueles traçados no chão, ocorrendo a análise dos resultados e discussão sobre a atividade. Nesse momento, é papel do professor coordenar a discussão e mostrar que algumas verdades impostas têm explicações, que serão compreendidas na própria construção da função, como por exemplo: “se $a > 0$, então a concavidade é para cima” e “se $a < 0$, então a concavidade é para baixo”. Percebendo assim, que não há necessidade de apenas decorar tais informações.

Ao discutir diferentes formas de realizar a atividade propostas e tendo que explicar aos colegas como realizou a mesma, o aluno está adquirindo a capacidade discursiva e argumentativa e compreendendo o conteúdo matemático.

c) Atividade com o GeoGebra

Para finalizar a aula, o professor apresenta aos alunos o *software* GeoGebra, que possibilita a construção de gráficos de funções de forma intuitiva. Traça-se as funções escolhidas pelos alunos na atividade anterior comparando, mais uma vez, os resultados. Então, discute-se sobre o comportamento das funções, mostrando como movimentá-la pelo plano e qual a relação entre a mudança dos coeficientes da função com a mudança do gráfico, esclarecendo como os coeficientes interferem no comportamento da função. O uso do computador possibilita ao aluno uma visão diferente do mesmo conteúdo, podendo proporcionar um ambiente de aprendizagem diferente para melhor compreensão do tema.

3. Conclusões

A proposta de uso de *softwares* de geometria dinâmica no processo de ensino aprendizagem de função quadrática contribui para a aprendizagem, pois na sociedade tecnológica atual os alunos se mostram cada vez mais confortáveis com o uso de computador e de *softwares*. O uso de recursos tecnológicos digitais no contexto da educação matemática é fundamental e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999) já enfatizaram tal importância para melhoria da qualidade do ensino aprendizagem, permitindo surgir novas formas de pensar e aprender.

Usando várias metodologias a escola consegue realizar seu papel social como unidade significativa no processo de crescimento da concepção de mundo dos indivíduos como cidadãos. O educando consegue desenvolver o conhecimento de função quadrática, relacionando a história do seu desenvolvimento, contextualizando com relações do cotidiano, e compreendendo sua relação também com a geometria. Resultando assim, como propõe a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), pensamentos e argumentos mais críticos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum.

Formas previstas de avaliação

Participação dos alunos em todas as etapas da atividade; resultados apresentados nas construções dos gráficos das funções.

Referências

BRASIL, MEC - SEB. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC> Acesso em 10 de julho de 2018.

BRASIL. MEC - SEMTEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: MEC,1999.

COSTA, A.C. **Conhecimentos dos Estudantes Universitários sobre o Conceito de Função.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC-SP, 2004.

D´AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.** 2 ed., Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS: UMA INTRODUÇÃO

Ismael Cizzoto
Marcos Paulo de Oliveira

Ano escolar: 1º ano do ensino médio

Ementa

Funções exponenciais; Potenciação; Raciocínio lógico; Resolução de problemas.

Objetivos

- Apresentar os marcos históricos no desenvolvimento da potenciação, chegando até funções exponenciais.
- Apresentar, através da resolução de problemas e da modelagem matemática as funções exponenciais de forma prática.

Recursos empregados

- Lousa e giz para interação com a turma e também para desenvolvimento de cálculos;
- Computador e projetor para apresentação da aula em PowerPoint;
- Jogo Torres de Hanói (um para cada grupo de alunos).

Atividades

1. Introdução

Por se tratar de uma aula introdutória ao assunto funções exponenciais, a matéria não será apresentada com fórmulas, mas sim através da resolução de problemas e da modelagem matemática empregada em um jogo conhecido como a Torre de Hanói. Através dessa atividade será alcançada a lei de formação da função exponencial.

2. Atividades desenvolvidas

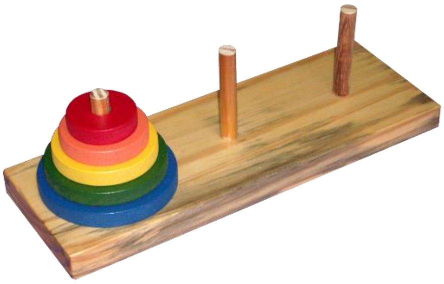
a) Apresentação da história dos exponenciais.

Sabendo da importância da história da matemática no processo de ensino e aprendizagem, a aula se inicia com a apresentação da história do surgimento das potenciações, que mais tarde deram origem às funções exponenciais. Através de pesquisas, foi elaborado um material contendo os primeiros indícios de uso dos exponenciais ao longo do desenvolvimento das civilizações e seu uso e aplicação em cada caso. São apresentados os indícios históricos de uso das potenciações nos povos egípcios, babilônios e gregos, passando pelas mudanças de notações, até chegarmos no surgimento da notação usada atualmente, que surgiu em 1637, com a publicação da obra *La Géométrie* de René Descartes.

b) Atividade com o Jogo Torres de Hanói

Em um segundo momento, é apresentado à turma o jogo Torres de Hanói, que consiste em uma base com 3 pinos, nos quais são dispostos discos. As regras do jogo são apresentadas aos alunos: inicialmente, colocam-se os discos no pino da esquerda, com os maiores sob os menores. Deve-se transferir todos os discos para o pino da direita utilizando o do meio como auxiliar, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior sobre um menor.

Figura 1: Jogo Torres de Hanói



Fonte: http://sematifrnspp.blogspot.com/p/campeonato.html

Então é solicitado à turma que se reúnam em grupos de 4 alunos, no máximo. Cada grupo recebe um jogo e deve realizar as seguintes atividades:

1) Tentar jogar com 1, 2, 3, 4 e 5 discos.

2) Chamando de *n* o número de discos na partida e de J o menor número de movimentos feitos para vencê-la, tentar preencher a seguinte tabela:

n	J
1	
2	
3	
4	
5	

c) Lei de formação da função

No terceiro momento da aula, com base nos resultados obtidos pela turma, o professor desenha um gráfico de *J* x *n* na lousa e pede que os alunos, observando o gráfico e a tabela, tentem responder a pergunta: Vocês saberiam descrever alguma fórmula que descreva o número mínimo de lances para solucionar o jogo a partir do número de discos na partida? Como vocês chegaram a essa hipótese?

Através dos dados da tabela e do gráfico desenhado, o professor realiza a dedução, da lei de formação geral que descreve o fenômeno estudado. Observando os seguintes passos:

$$J_n = 2.J_{n-1} + 1$$

$$J_n + 1 = 2.\ J_{n-1} + 2$$

$$J_n + 1 = 2.(J_{n-1} + 1)$$

Chamando $(J_n + 1)$ de A_n, temos:

$$A_n = 2.A_{n-1}$$

$$A_n = 2.2.A_{n-2} = 2^2.A_{n-2}$$
$$A_n = 2^2.2.A_{n-3} = 2^3.A_{n-3}$$
$$A_n = \ldots.. = 2^{n-1}.A_{n-(n-1)} = 2^{n-1}.A_1$$

Como $A_1 = J_1 + 1 = 2$, temos:
$$A_n = 2^{n-1}.2 = 2^n$$

E como $A_n = J_n + 1$,
$$J_n + 1 = 2^n$$
$$J_n = 2^n - 1$$

3. Conclusões

O uso de material manipulável facilita a aprendizagem pois permite a visualização de determinadas propriedades matemáticas. Dentre os materiais possíveis de serem usados em sala de aula, os jogos despertam muito interesse nos alunos, permitem o trabalho em grupo e contextualizam o assunto abordado. O jogo Torres de Hanói tem um apelo histórico, além de propor um desafio bastante motivador para os alunos.

Formas previstas de avaliação

Participação do aluno na atividade proposta, assim como nas discussões durante a resolução dos problemas e na modelagem matemática dos dados obtidos com a atividade.

Referências

RODRIGUEZ, C. I.; QUEIROZ, M. L. B.; REZENDE, E. Q. F. **Experimento prático - Torres de Hanói.** Campinas: UNICAMP. Disponível em: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/22388>

RICHARTZ, M. **Potenciação – Um Estudo Didático**. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática). Florianópolis: UFSC, 2005. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96531/Marize_Richartz.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso: Agosto/2018.

DESCOBRINDO A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Rafael Keniti Rodrigues
Yasmin da Gama Costa

Ano escolar: 1ª série do Ensino Médio

Ementa

Potenciação e radiciação, função exponencial.

Objetivos

- Revisar propriedades de potenciação e radiciação;
- Entender o conceito de função exponencial, suas propriedades e representações gráficas.

Recursos empregados

Quadro, giz, papel cartão cortado em quadrados de 2 cm, folhas com instruções para atividade.

Atividades

1. Situação de ensino: Revisão

- Objetivos:

Identificar possíveis deficiências no conteúdo de potenciação e radiciação por meio de revisão.

- Recursos: Quadro e giz.
- Desenvolvimento:

Nessa aula o professor irá revisar as propriedades de potenciação e radiciação, que são importantes para um melhor entendimento e resolução das atividades do assunto seguinte. É possível seguir o roteiro abaixo com as propriedades. Esse trabalho pode ser feito individualmente, pois é apenas para revisar os conteúdos já estudados. O tempo previsto é de 50 minutos, mas se o professor perceber que a aula está fluindo bem, sem muitas dúvidas, pode realizar essa parte em menos tempo. Segue abaixo algumas propriedades da potenciação e radiciação:

a) Potência de expoente inteiro

Seja *a* um número real e *n* um número inteiro, definimos:

$$a^0 = 1, se\ a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, se\ n > 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad = \ se\ a \neq 0$$

Na potência a^n, o número a é chamado de base da potência e o número n é chamado de expoente.

b) Propriedades das potências de expoente inteiro

Dados os números reais a e b e os números inteiros m e n, e obedecidas as condições para que existam as potências, temos:

P1. $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$ **P2.** $a^m \div a^n = a^{m-n}$ **P3.** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

P4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ **P5.** $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

c) Radiciação no conjunto dos reais

No radical $\sqrt[n]{a}$ o número n é chamado de **índice do radical** e o número a é chamado de **radicando.**

1° caso:

Sendo n um número natural não nulo, dizemos que a raiz n-ésima de um número real não negativo a é o número real não negativo b se, e somente se, $b^n = a$.

Em símbolos, sendo $n \in N^* \ e \ a \in R_+$, temos:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a, com \ \ b \in R_+$$

2° caso:

Se n é um número natural ímpar, dizemos que a raiz n-ésima de um número real negativo a é o número real negativo b se, e somente se, $b^n = a$.

Em símbolos, sendo $n \in N \ com \ n \ ímpar \ e \ a \in R_-^*$, temos:

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$, com b obrigatoriamente negativo.

d) Propriedades dos radicais com radicandos não negativos

Sendo $a \ e \ b$ números reais não negativos e $n, k \ e \ p$ números naturais não nulos, temos:

P1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ **P2.** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, com \ b \neq 0$ **P3.** $\sqrt[nk]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^p}$

P4. $(\sqrt[n]{a})^q = \sqrt[n]{a^q}, com \ q \in R$ **P5.** $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

e) Potência de expoente racional

Sendo a um número real positivo e os números inteiros $k \ e \ n$, com $n \geq 1$, definimos:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

2. Situação de ensino: Eliminando Quadrados

- Objetivos:
  - Estudar um modelo discreto de função exponencial;
  - Construir gráficos de funções exponenciais com os dados obtidos no experimento.
- Recursos:

Papel cartão dupla face, marrom e verde; Tesoura; Régua (de 30cm é mais apropriada); Lápis; Borracha; Calculadora

Sobre uma mesa, lançamos quadradinhos de papel cujas faces possuem cores distintas (uma face pode ser verde e a outra marrom). Em seguida, retiramos todos aqueles que caírem sobre a mesa com a cor marrom voltada para cima. Repetimos o processo várias vezes até sobrar apenas um quadradinho. Com este experimento prático, construímos tabelas e gráficos que relacionam o número de jogadas e a quantidade restante de pedaços de papel.

- Desenvolvimento:

a) Em casa

O professor pode solicitar aos alunos para trazerem prontos de casa quadradinhos de papel cartão. É necessário que os quadradinhos tenham as faces de cores diferentes e mesmas medidas, por exemplo, 2 cm por 2 cm. Uma folha comum deste tipo de papel mede 50 cm por 70 cm e rende 875 quadradinhos, ou seja, é suficiente para três grupos confeccionarem 240 quadradinhos cada.

Figura 1: material usado

FIG. 1

Figura 2: material pronto

FIG. 2

b) Na classe

Organize a classe em duplas para que, durante a execução do experimento, cada aluno conte uma das cores dos quadradinhos lançados. As duplas devem ter 240 quadradinhos e uma Folha do Aluno.

c) O problema

Ao lançar 240 quadradinhos aleatoriamente sobre uma mesa e retirar todos os que ficaram com a face marrom para cima, quantos restarão depois do primeiro lance? Repetindo o procedimento com os quadradinhos que sobraram, quantos restarão depois do segundo lance? E depois do quinto? Existe alguma relação entre esses valores?

d) Jogar e separar

1. Os quadradinhos devem cair aleatoriamente. Para isso, proponha que os alunos soprem todos da palma da mão, como na figura a seguir:

Figura 3: fase do jogo

FIG. 3

2. Em seguida, separe todos aqueles com a cor marrom virada para cima. Os alunos devem contar esses quadradinhos, como na figura abaixo:

Figura 4: fase do jogo

FIG. 4

3. Todos que caíram com o lado marrom para cima devem ser retirados;

4. Em seguida, os alunos devem repetir esse procedimento 7 vezes e anotar os valores obtidos através da experiência na tabela da Folha do Aluno, como abaixo:

Tabela 1: jogo

Lançamento (i)	Quadrados restantes (Q_i)
0	240
1	116
2	57
3	31
4	18
5	9
6	4
7	1

TABELA 1

e) Construção do gráfico

Usando os dados da tabela 1, os alunos deverão representar esses pontos em um gráfico, da seguinte maneira: no eixo x devem estar os lançamentos e o eixo y deve conter os quadrados restantes correspondentes a cada lançamento.

Figura 5: Construção do gráfico

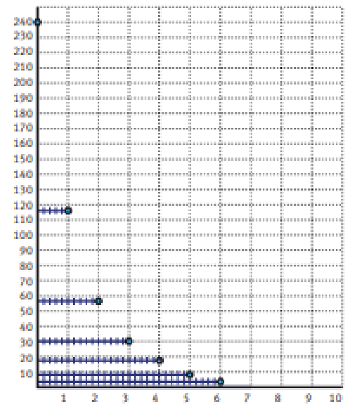


FIG. 5

f) Análise do quociente

Depois de preencher a tabela e traçar o gráfico, os grupos devem encontrar o quociente da divisão das quantidades iniciais e finais para cada lançamento. Denotaremos por Q_{i-1} a quantidade inicial e por Q_i a quantidade final em cada lance, onde o índice i representa o número do lançamento. Veja o exemplo da tabela abaixo:

Tabela 2: Análise do quociente

Lançamento (i)	Quadrados restantes (Q_i)	Quociente ($\frac{Q_i}{Q_{i-1}}$)
0	240	-
1	116	0,48
2	57	0,49
3	31	0,54
4	18	0,58
5	9	0,5
6	4	0,44
7	1	0,25

TABELA 2

Neste experimento o quociente $\frac{Q_i}{Q_i-1}$ não é um valor constante para todos os lançamentos; é sempre menor que 1 e quase sempre próximo a 0,5. Quando em algum modelo matemático encontramos $\frac{Q_i}{Q_i-1}$ igual a uma constante b, podemos escrever que $Q_i = b \times Q_{i-1}$, para todo i.

Para exemplificação, vamos começar com 240 quadradinhos e pensar em uma situação ideal, ou seja, que metade deles irá cair com a face marrom para cima. Assim, o quociente $\frac{Q_i}{Q_i-1}$ será uma constante igual a b, isto é,

$$\frac{Q_i}{Q_{i-1}} = b,$$

e teremos $Q_0 = Q(0) = 240$ antes de fazer qualquer jogada.
Após a primeira jogada, $i = 1$, teremos $Q_1 = Q(1) = Q_0 \cdot b = 240 \cdot b$
De maneira análoga, para $i = 2$:

$$Q_2 = Q(2) = Q_1 \cdot b = (240 \cdot b) \cdot b = 240 \cdot b^2$$

Com o quociente constante, é possível obter a quantidade de quadradinhos restantes em qualquer jogada através da generalização:

$$Q_i = Q(i) = Q_{i-1} \cdot b = (240 \cdot b^{i-1}) \cdot b = 240 \cdot b^i.$$

g) Fechamento

A seguir, o professor deve guiar os grupos para obterem uma função exponencial caso o valor encontrado para o quociente $\frac{Q_i}{Q_{i-1}}$ fosse uma constante igual a b com 0 < b < 1. O aluno deve encontrar Q_i para i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, mantendo o quociente $\frac{Q_i}{Q_{i-1}}$ constante e igual a b e $Q_0 = 240$. Deve ser encontrada a expressão $Q_1 = 240 \cdot b^1$. Para isso, seguir a sugestão posta no item anterior.

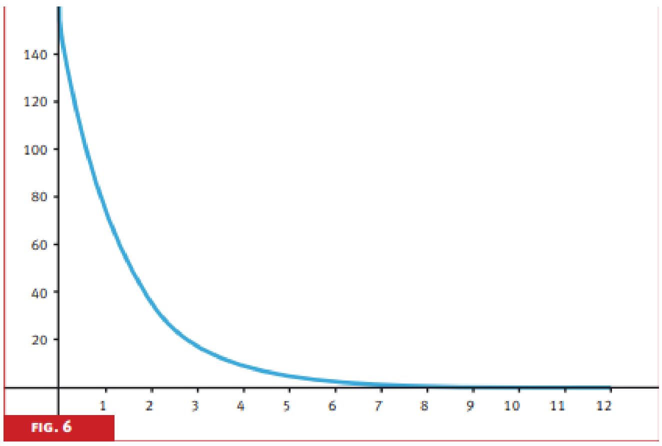
A tabela 2 e as expressões acima podem ser interpretadas como termos de uma progressão geométrica de razão b. A fórmula do termo geral nada mais é do que a expressão de uma exponencial de base b, veja:

$$Q_n = b \cdot Q_{n-1} = 240 \cdot b^n.$$

h) Obtenção do gráfico

Vamos agora construir o gráfico da função $Q_n = Q(n) = 240 \cdot b^n$ para $b = 0{,}5$, ou seja, $Q(n) = 240 \cdot 0{,}5^n$. Fique atento para que os alunos utilizem nos eixos escalas diferentes para a construção dos gráficos. Veja o gráfico abaixo: ele é côncavo para cima e a função é decrescente.

Figura 6: Gráfico da função exponencial



O experimento fornecerá aos alunos funções exponenciais do tipo $Q(n) = 240 \cdot 0{,}5^n$. Para obter bases diferentes, basta sugerir que cada grupo retire uma porcentagem dos quadradinhos que ficarem com a face marrom para cima. A tabela a seguir mostra algumas porcentagens e suas respectivas bases:

Tabela 3: Porcentagens

Porcentagem de quadradinhos marrons retirados	Base da função exponencial
100%	1/2
90%	11/20
80%	3/5
70%	5/8
60%	7/10
50%	3/4
40%	4/5
30%	17/20

TABELA 2

As funções da forma $Q(t) = Q_0 \cdot b^t$ são chamadas funções exponenciais de base b, onde Q_0 é a quantidade inicial quando t = 0, e b é o fator de variação na quantidade Q quando t aumenta de uma unidade.

3. Situação de ensino: Propriedades da função exponencial e exercícios

- Objetivo:

Nessa aula tem-se como objetivo explicar a definição formal de funções exponenciais e suas propriedades. E a aplicação de alguns exercícios.

- Recursos: Quadro e giz
- Desenvolvimento:

a) Definição:

Segundo Barroso (2008, p. 174) a definição de função exponencial pode descrita como Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é classificada como função exponencial quando existe um número real a, com a > 0 e a ≠1, tal que $f(x) = a^x$ para todo x pertencente aos reais.

b) Exemplos: $f(x) = 2^x$, $f(x) = (0,5)^x$, $f(x) = (\sqrt{2})^x$

Observações: note que as condições de existência, de fato, devem ser respeitadas.

c) Exemplos onde as condições de existência não são respeitadas:

$f(x) = 1^x = 1$, logo essa função seria uma constante.

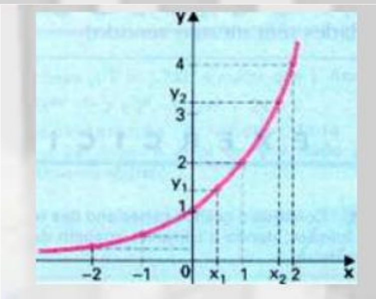
$f(x) = (-2)^x$, que não representaria uma função exponencial, pois não pode ser calculada para valores como x = ½, por exemplo.

d) Comportamento do Gráfico

Para a > 1 temos um comportamento crescente da função como podemos ver na imagem abaixo.

Figura 7: gráfico da função $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	1/4	1/2	1	2	4

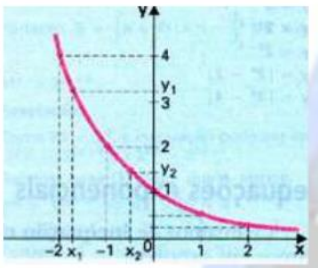


Fonte: https://canalcederj.cecierj.edu.br/012016/dd9237178e1215c3407a0f6043b403c2.pdf

Já para $0 < a < 1$ temos um comportamento decrescente da função como podemos ver na imagem abaixo.

Figura 8: gráfico da função $(1/2)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	12	1	1/2	1/4



Fonte: https://canalcederj.cecierj.edu.br/012016/dd9237178e1215c3407a0f6043b403c2.pdf

4. Anexo para a 2ª Situação de ensino

Figura 9: anexo da situação de ensino 2.

Comentários iniciais

Vamos lançar quadradinhos de duas cores e ver quantos sobram depois de retirar os que ficaram com a face marrom para cima. Antes de começar a jogar:

Pense e discuta com sua dupla

Ao lançar 220 quadradinhos aleatoriamente sobre uma mesa e retirar todos os que ficaram com a face marrom para cima, quantos restarão depois do primeiro lance? Repetindo o procedimento com os quadradinhos que sobraram, quantos restarão depois do segundo lance? E depois do quinto? Existe alguma relação entre esses valores?

____

____

____

Procedimento

Etapa 1- Jogar e separar.
Preencha a tabela de acordo com os valores obtidos ao jogar, contar e descartar os quadradinhos.

Lançamento (i)	Quadrados restantes (Qi)
0	220

Etapa 2- Construção do gráfico.
Represente os valores da tabela acima em um plano cartesiano i ×Qi.

Etapa 3 - Análise do quociente.
Complete a tabela abaixo com os dados obtidos no experimento:

Lançamento (i)	Quadrados restantes (Qi)	Quociente ($\frac{Q_i}{Q_{i-1}}$)
0	240	

Analisando o Quociente – Eles apresentam valores parecidos? Se sim a qual valor eles se aproximam? Se esse valor fosse uma constante, qual seria a expressão que representaria o Q_i ?

-Utilizando a expressão encontrada anteriormente, analise esses dois casos, se necessário faça o esboço do gráfico.

1. Se esse quociente estiver entre 0 e 1 qual seria o comportamento do gráfico?
2. E se fosse maior que 1?

Formas previstas de avaliação

A avaliação será feita observando o envolvimento dos alunos na atividade e a compreensão dos conceitos e métodos abordados, assim como o preenchimento das tabelas e a construção dos gráficos.

Referências

BARROSO. J. M. **Volume 1: Conexões com A Matemática - Ensino médio**. Editora Moderna, São Paulo, 2010. 1ª edição.

GONÇALVES, V.G., BAIERL, M.T. Formação Continuada em Matemática: Função Exponencial. Disponível em: https://canalcederj.cecierj.edu.br/012016/dd9237178e1215c3407a0f6043b403c2.pdf. Acesso em: 08 jul. 2018.

ZORAIDE M. C. SOARES, M. **Eliminando Quadrados**. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1008>. Acesso em: 08 jul. 2018.

LOGARITMOS

Bruno Barbosa de Oliveira
Felipe Fischernes Dias

Ano escolar: 1º ano do ensino médio

Ementa

Contextualização histórica do surgimento dos logaritmos com base nas tabelas de cálculo; definições e propriedades dos logaritmos; relações entre logaritmos com outros conhecimentos científicos.

Objetivos

Objetivo geral: apresentar aos alunos o conceito de função logarítmica.
Objetivos específicos:

- Apresentar a definição e as propriedades dos logaritmos, juntamente com problemas matemáticos que requeiram uso de tais definições e propriedades.
- Capacitar os alunos na manipulação de expressões envolvendo logaritmos e inserir tecnologias e/ou recursos que utilizem tais conceitos.

Recursos empregados

Computador, projetor e caixas de som para apresentação em PowerPoint e de vídeo. Lousa.

Atividades

1. Introdução

O estudo das funções ocupa grande parte do currículo de matemática no ensino médio. Este conteúdo é importante pois, além de servir de escopo para diversos outros ramos da matemática ou soluções de problemas, servem de base e ferramenta para diversas outras ciências, como a física ou a química, por exemplo. Diante disso é necessário construir uma base sólida desses conceitos, para que os alunos tenham o domínio que os possibilitem melhor desempenho quando tais conceitos forem empregados em outras ocasiões.

2. Atividades desenvolvidas

a) Problema desafio

A aula inicia-se apresentando o plano da aula (descrito nos slides do PowerPoint): qual conceito será ensinado e qual será a estrutura utilizada para a aula (desafio, contextualização histórica, definições e propriedades, resolução de problemas e aplicações). Antes de entrar na contextualização, é apresentado aos alunos um slide com o seguinte problema, que consiste de uma expressão que envolve conceitos de função exponencial (supondo que estes conceitos tenham sido vistos anteriormente em outras aulas):

Qual a ordem de grandeza do número dado pela seguinte expressão 2^{2018}*?*

Então, é dado um tempo para que os alunos tentem resolver com seus próprios conhecimentos. Após isso, fazer uma breve análise, identificando as possíveis soluções e prosseguir com a aula, citando que serão ensinados conceitos que ajudariam a resolver tal problema.

b) Contextualização histórica

É mostrado aos alunos, em seguida, um vídeo que contextualiza historicamente o desenvolvimento dos logaritmos. Este vídeo pode ser acessado através de um link nos slides do PowerPoint, por exemplo. O vídeo sugerido chama-se “Logaritmo: um pouco de sua história” e está disponível no seguinte link: <https://www.youtube.com/watch?v=yYDEjh9j7wk>

Neste vídeo, em particular, tem-se a contextualização do surgimento dos logaritmos com base na busca de simplificação de operações como multiplicações e divisões entre números muito grandes, o que levou ao desenvolvimento das tábuas de calcular. O vídeo também menciona os matemáticos John Napier e John Briggs, que são os responsáveis pelo desenvolvimento dos logaritmos. Nos slides do PowerPoint foram exibidos seus respectivos retratos e uma pequena biografia de ambos.

Os estudos dos logaritmos, de acordo com a maioria dos referencias históricos, surgiu da necessidade de encontrar maneiras de simplificar as operações de multiplicação e divisão com números muito grandes. Por volta do século XVII, os cientistas perdiam muito tempo realizando cálculos muito complexos. John Napier, matemático da época, estudou como resolver esse tipo de problema por cerca de 20 anos. Embora muitos outros matemáticos tenham feito contribuições para o desenvolvimento dos logaritmos, John Napier seja, talvez, o nome mais importante. Naquela época eram construídas tabelas de cálculo, que facilitavam essas operações, sob as quais se fundam as bases dos logaritmos.

c) Tabelas de cálculo

Na lousa, pretende-se demonstrar como funcionavam as tábuas de cálculo. Para tanto, deve-se relembrar os conceitos de progressão aritmética (PA) e progressão geométrica (PG), explicar (conforme a figura 1) que a linha superior é uma PA e a inferior é uma PG. Após isso, mostrar que a soma de dois números da linha superior dá um resultado que também está na linha superior. Tomando os números correspondentes a esses na linha inferior, pode se trocar a soma por multiplicação: os números representam os fatores e seu respectivo produto. Por fim, construir uma tabela na lousa, a partir das explicações dadas na figura 1.

Figura 1: PA e PG com termos correspondentes.

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394

Para efetuar, por exemplo, 256 x 32, basta observar que:

- 256 na segunda linha corresponde a 8 na primeira;
- 32 na segunda linha corresponde a 5 na primeira;
- como 8+5=13,
- 13 na primeira linha corresponde a 8192 na segunda.

Assim, 256x32=8192 resultado esse que foi encontrado através de uma simples operação de adição.

A fim de que os números da progressão geométrica estivessem bem próximos, para ser possível usar interpolação e preencher as lacunas entre os termos na correspondência estabelecida, evitando erros muito grosseiros, Napier escolheu para razão o número $b = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$, que é bem próximo de 1. Segundo Eves, para evitar decimais, ele multiplicava cada potência

por 10^7. Então, se $N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, ele chamava L de "logaritmo" do número N.

Assim, o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ é 1.

Fonte: <http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm>

Porém, pode-se perguntar: e se a multiplicação não estiver nas tábuas de calcular? Bom, esse foi um dos problemas encontrados por Napier, que buscou sua solução de modo a aproximar a razão da progressão geométrica para 1, com a finalidade de preencher a coluna da PG, o máximo possível. Então ele adotou uma razão:

$$1 - (1/10^7) \approx 0{,}9999999.$$

Para resolver o problema das casas decimais que se repetem, ele multiplicou as potências obtidas por essa razão por 10^7. Assim ele construiu uma tabela com a primeira linha composta por expoentes L e a segunda linha composta por números N, resultando na seguinte forma:

$$N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

onde o número L é chamado de logaritmo do número N. Mais tarde foram criadas outras tábuas de logaritmo, utilizando outras bases e então chegamos aos logaritmos decimais utilizados hoje em dia.

d) Definições e propriedades

A última função trabalhada com os alunos antes da introdução à função logarítmica terá sido a função exponencial. Para apresentar a função f(x) = Log (x), dentro do conjunto estudado até então pelos estudantes (números Reais), as três condições terão de ser satisfeitas:

- A base deverá ser diferente de 1;
- A base deverá ser maior que 0;
- O logaritmando deverá ser maior que 0;

As 3 propriedades básicas da função logarítmica que serão utilizadas nesta aula introdutória serão:

- Soma e Subtração de Log;
- Multiplicação e divisão de Log;

- O logaritmando elevado a uma potência *m* e a "transferência" desta potência como fator multiplicativo de todo o Log.

São exibidas nos slides as definições e propriedades dos logaritmos como seguem abaixo:

Definição: $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$, sendo: $a > 0, b > 0, e\ a \neq 1.$

Onde:

a= base do logaritmo

b= logaritmando ou antilogaritmo

x= logaritmo

Consequências da definição:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^m = m$$

$$\log_a b = \log_a c \leftrightarrow b = c$$

Propriedades:

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^m = m.\log_a x$$

Mudança de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Tais propriedades devem ser demonstradas pelo professor. Após as propriedades, deverão ser exibidos alguns problemas resolvidos nos slides, como por exemplo:

$$\text{Log}_? 27 = 3 \qquad \log_2 32 = ? \qquad \log_5 ? = 2$$

e) Resolução de problemas

O professor deve questionar se os alunos conseguem, nessa etapa da aula, responder ao problema inicial, baseando-se nos conceitos ensinados. Nesta etapa pode-se aproveitar e esclarecer aos alunos que no logaritmo de base 10 pode ser ocultada a base. Usualmente é utilizado somente o termo "log". Após a discussão das possibilidades de resolução, o professor pode apresentar a seguinte solução:

Qual a ordem de grandeza do número dado pela seguinte expressão 2^{2018}?

***Resolução**: dado 2^{2018}, chamaremos de x o valor a ser estimado: $x = 2^{2018}$*

Extrair log (de base dez), nos dois lados da igualdade: $\log x = \log 2^{2018}$

Utilizando a terceira propriedade dos logaritmos: log x = 2018 · log 2

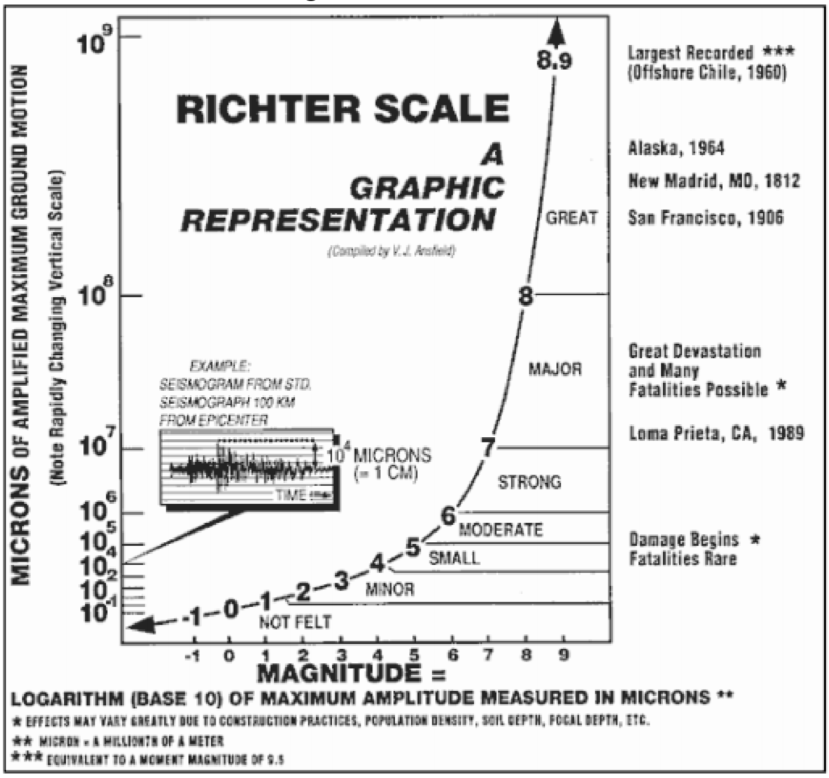
Resolvendo o lado direito com auxílio de uma calculadora: log x = 607,47

Utilizando a definição de logaritmo, podemos afirmar que uma boa aproximação para a ordem de grandeza: ***x ≈ 10^{607}.*** *Ou seja, a ordem de grandeza de x é 10^{607}*.

f) Aplicações

Apresentar nos slides do PowerPoint alguns gráficos de funções logarítmicas como inversa da função exponencial, citando alguns exemplos de tecnologias ou métodos que utilizam as funções logarítmicas, como: a escala Richter, que mensura tremores sísmicos e utiliza uma escala logarítmica; taxa de liberação de fármacos no organismo, na área de farmacologia; cálculos de decaimento radioativo. Essas ideias finais devem ser apresentadas de modo qualitativo e podem ser exploradas em outras aulas ou atividades futuras. Algumas ilustrações podem ser adicionadas, como auxilio, como por exemplo, abaixo uma descrição da escala Richter:

Figura 2: Escala Richter



Fonte: https://www.quora.com/Why-isn-t-the-Richter-scale-a-linear-scale

Encerrar a aula com abertura pra possíveis dúvidas, e dar continuidade explorando a parte tecnica melhor em aulas futuras.

3. Conclusões

Para concluir, enfatiza-se que: deve-se ater ao fato que a aula é introdutória, portanto, não se objetivou o aprofundamento algébrico e técnico. Pressupõem-se que o conceito "função exponencial" seja um pré-requisito essencial para a compreensão da aula proposta. Uma visão interessante é ver logaritmos como um expoente isolado, desse modo o aluno é capaz de tornar o conceito muito mais intuitivo, e manter a mesma "base" que é vista na função exponencial. É interessante usar vídeos que ajudam a aproximar ou concentrar os alunos nos conteúdos, ao tratar de conteúdos que apresentam certo grau de abstração.

Formas previstas de avaliação

A aula tem caráter introdutório, logo a avaliação deve ser formativa. Esta modalidade de avaliação verifica se o aluno está atingindo gradativamente os objetivos previstos por meio de conceitos, habilidades e atitudes. É uma avaliação processual e continuada. Isso significa que sua prática acompanha integralmente o processo de ensino/aprendizagem (RODRIGUES, FRANCO e BRAGA, 2006). Portanto o professor deve identificar tais características durante a aula, circulando entre os alunos, lembrando que para esse tipo de avaliação, é essencial que professor consiga manter certo nível de diálogo.

Referências

BORGES, I. **Logaritmo: um pouco de sua história**. (vídeo). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=yYDEjh9j7wk. Acesso em: 31/07/2018.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (PCNEM). Brasília: MEC, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/acompanhamento-da-frequeencia-escolar/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211. Acesso em 31/07/2018.

BRUNING, E. M., JUNKERFUERBOM, M. A., KLÜBER, T. E. Uma experiência na elaboração de aulas de logaritmo com base na teoria dialética ferramenta-objeto – **Anais do XII EPREM** – Encontro Paranaense de Educação Matemática. Campo Mourão: SPEM, 2014.

RODRIGUES, A.; FRANCO, L. R. H. R.; BRAGA, D. B. **Capítulo 9 - Tipos de Avaliação. In: Livro Digital - UNIFEI EaD.** Itajubá: UNIFEI, 2006.

SÁ, R. **História dos Logaritmos**. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/historia-dos-logaritmos/> Acesso em: 31/07/2018.

USP, Pró-reitora de Graduação. **Um pouco da História dos Logaritmos.** Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm. Acesso em: 30/07/2018.

CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO

Aryssa Victoria Shitara
Claudio Quessada Cabello

Ano escolar: 1º ano do Ensino Médio.

Ementa

Funções Periódicas. Funções Seno e Cosseno. Gráfico de Funções Senoidais.

Objetivos

- Compreender funções periódicas.
- Identificar as propriedades das funções senoidais: amplitude, período e fase.
- Resolver problemas com funções trigonométricas da forma $y = a + b\,sen(cx + d)$ e $y = a + b\cos(cx + d)$.
- Construir o gráfico de uma função trigonométrica da forma $y = a + b\,sen(cx + d)$ e $y = a + b\cos(cx + d)$ com o auxílio de uma tabela de valores de x e y.

Recursos empregados

- Quadro e giz ou pincel para lousa branca.
- Computador, projetor, e ferramenta de construção de gráficos *online* (no caso, GeoGebra).
- Problemas com base no livro *Matemática: Paiva*.

Atividades

1. Introdução: desenvolvimento do tema

No tema proposto, levaremos o aluno a investigar propriedades de funções seno e cosseno, através da construção de gráficos de diversas funções, verificando a relação entre a parametrização da função e o respectivo gráfico.

Modelaremos um problema como uma função, utilizando os conceitos de domínio, imagem e par ordenado, assim mostrando a relação trigonométrica de seno e cosseno como funções, que levam uma variável em um domínio a um valor em um contradomínio.

O tema será explorado através de duas situações de ensino diferentes, sendo a primeira uma atividade exploratória que leve a este modelamento de uma função trigonométrica. A segunda atividade será uma investigação da importância de cada coeficiente das funções $y = a + b\,sen(cx + d)$ e $y = a + b\cos(cx + d)$, desenvolvendo os gráficos de funções dessa forma para que se forme os conceitos de amplitude, período e fase.

Serão mostrados motivos que levaram à observação e construção de funções periódicas, com exemplos do seu uso em diversas áreas próximas ao cotidiano do aluno, como ondas sonoras e corrente elétrica. Essa fase inicial tem por objetivo aproximar o aluno do tema, e refletir sobre fatos de seu dia a dia que poderiam ser representados dessa forma.

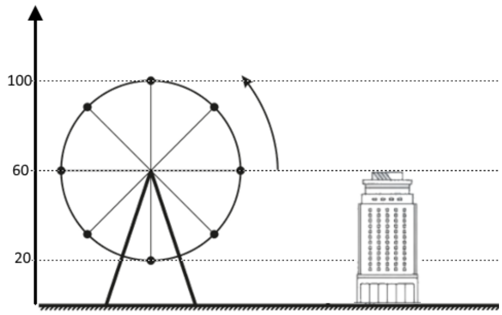
2.Atividades desenvolvidas

a) Descrição da Situação de Ensino 1:

- Situação de ensino: Problemas motivadores de funções trigonométricas
- Objetivos: Relembrar as relações trigonométricas, perceber a necessidade de modelar o problema como uma função dependente de uma variável.
- Metodologia: Entregar as folhas de enunciado aos alunos e explicar a atividade. Pedir que resolvam e, posteriormente, compartilhem seus resultados, representando-os no GeoGebra. Na lousa, desenhar o gráfico da função seno.
- Desenvolvimento: Será dado aos alunos o seguinte problema:

  Uma pessoa foi convidada pelos amigos para andar em uma roda gigante, para ver de cima a cidade. No entanto, um prédio se encontra na frente da paisagem. (Nota: O gráfico está em metros). Considerando que as pessoas entram no assento mais baixo e que a roda gigante gira 15° por minuto no sentido anti-horário, pede-se:

Figura 1: Ilustração do problema



a) *Em quantos minutos elas estarão acima do prédio para ver a paisagem?*
b) *E caso o prédio tivesse 80m de altura?*
c) *Se a roda gigante gira a 30° por minuto, após quanto tempo as pessoas atingem a altura original do prédio?*
d) *Quantos minutos se passariam para ultrapassar o prédio caso a altura do prédio e a rotação tivessem seus valores iniciais, mas a roda gigante tivesse o dobro de seu diâmetro original?*
e) *Se o diâmetro da roda gigante medir seu valor inicial, mas a roda gigante estiver 20m a mais acima do solo, quanto tempo depois os amigos estarão à altura original do prédio?*
f) *É possível representar a altura da pessoa em função do tempo? Se sim, coloque os pontos em um gráfico para cada situação dos itens de a) a e).*

- O professor deve dividir a turma em grupos (de preferência, no máximo quartetos) para discutir a resolução do problema, e então pedir para compartilharem com os colegas o pensamento usado para solucionar o problema. Introduzirá, então, formalmente, o conceito de função trigonométrica, desenhando na lousa o gráfico da função seno.
- Segue a resolução do problema proposto:

a) A roda gigante gira 15° por minuto e tem raio de 40m. Da posição mais baixa do assento (a 20m do chão) até alcançar a altura do prédio (60m), percorre 90°. Assim, temos como possíveis resoluções:

i) Uma proporção: $\frac{90º}{t} = \frac{15º}{1\,minuto} \Rightarrow$ t = 6 minutos.

ii) 60m = 40 * sen(-90° + 15º * t) + 20m + 40m ⇒ t = 6 minutos.

iii) 60m = -40 * cos(15º * t) + 20m + 40m ⇒ t = 6 minutos.

b) A roda gigante gira 15° por minuto e tem raio de 40m. Da posição mais baixa do assento (a 20m do chão) até alcançar a altura do prédio (80m), percorre 120°. Logo, temos como possíveis resoluções:

i) Uma proporção: $\frac{120º}{t} = \frac{15º}{1\,minuto} \Rightarrow$ t = 8 minutos.

ii) 80m = 40 * sen(-90° + 15º * t) + 20m + 40m ⇒ t = 8 minutos.

iii) 80m = -40 * cos(15º * t) + 20m + 40m ⇒ t = 8 minutos.

c) A roda gigante gira 30° por minuto e tem raio de 40m. Da posição mais baixa do assento (a 20m do chão) até alcançar a altura do prédio (60m), percorre 90°. Desse modo, são possíveis resoluções:

i) Uma proporção: $\frac{90º}{t} = \frac{30º}{1\,minuto} \Rightarrow$ t = 3 minutos.

ii) 60m = 40 * sen(-90° + 30º * t) + 20m + 40m ⇒ t = 3 minutos.

iii) 60m = -40 * cos(30º * t) + 20m + 40m ⇒ t = 3 minutos.

d) A roda gigante gira 15° por minuto e tem o dobro de seu diâmetro original (ou seja, seu raio é agora de 80m), da posição mais baixa do assento (a 20m do chão) até alcançar a altura do prédio (60m), percorre 60°. Portanto, temos como possíveis resoluções:

i) Uma proporção: $\frac{60º}{t} = \frac{15º}{1\,minuto} \Rightarrow$ t = 4 minutos.

ii) 60m = 80 * sen(-90° + 15º * t) + 20m + 80m ⇒ t = 4 minutos.

iii) 60m = -80 * cos(15º * t) + 20m + 80m ⇒ t = 4 minutos.

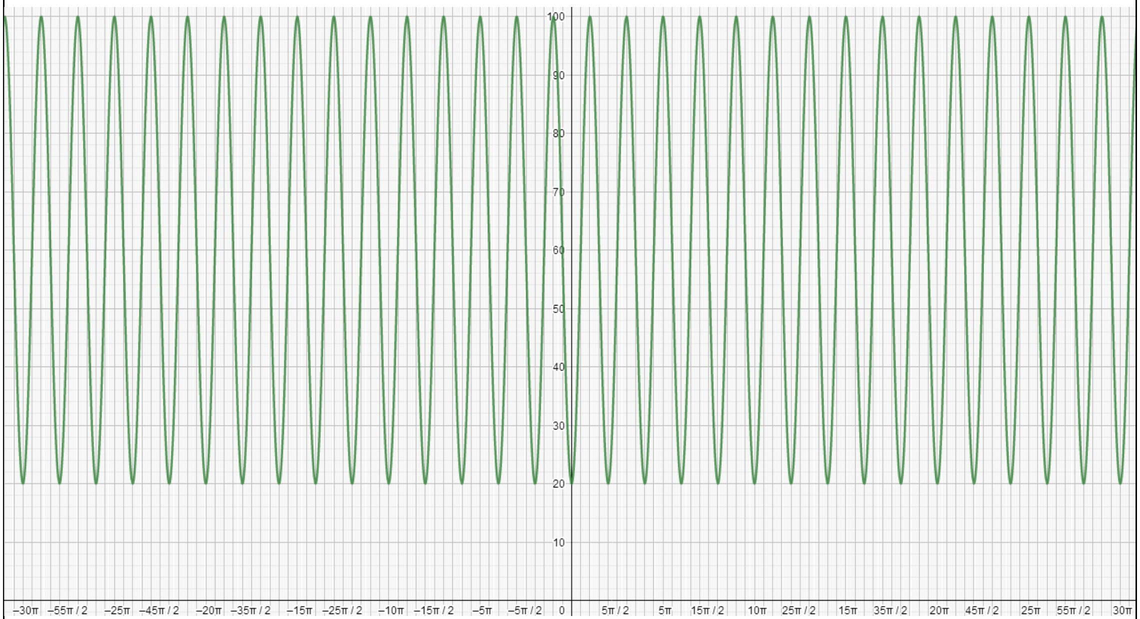
e) A roda gigante gira 15° por minuto e tem raio de 40m. Da posição mais baixa do assento (a 40m do chão) até alcançar a altura do prédio (60m), percorre 60°. Dessa forma, são possíveis resoluções:

i) Uma proporção: $\frac{60º}{t} = \frac{15º}{1\,minuto} \Rightarrow$ t = 4 minutos.

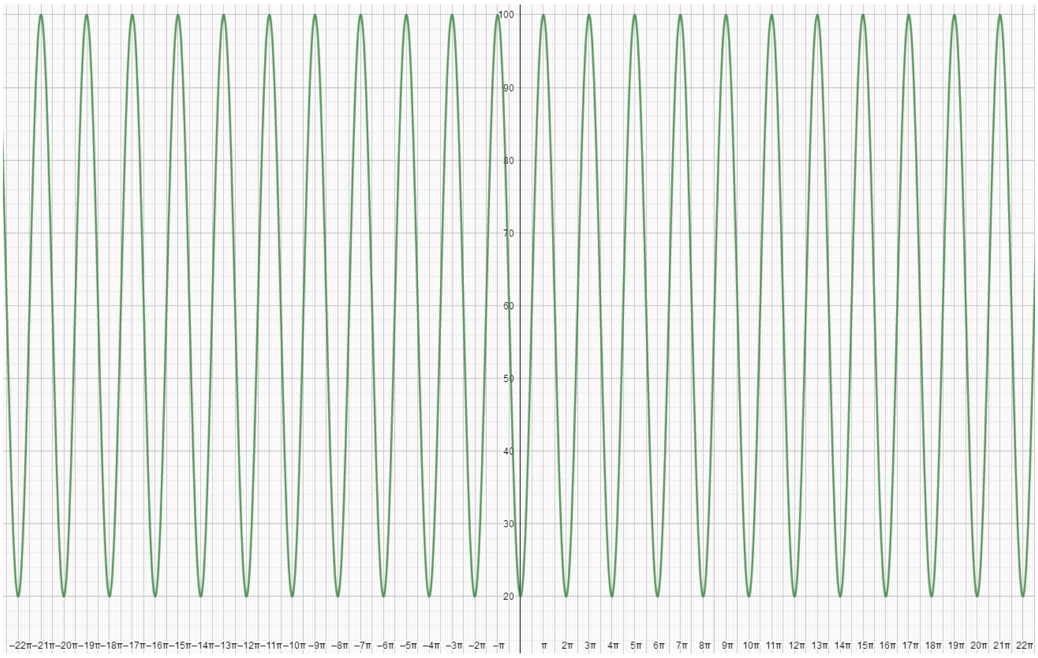
ii) 60m = 40 * sen(-90° + 15º * t) + 40m + 40m ⇒ t = 4 minutos.

iii) 60m = -40 * cos(15º * t) + 40m + 40m ⇒ t = 4 minutos.

Gráfico da função para os itens a) e b): $f(x) = -40cos(x) + 60$



1ª ampliação do gráfico da função para os itens a) e b): $f(x) = -40cos(x) + 60$



2ª ampliação do gráfico da função para os itens a) e b): $f(x) = -40cos(x) + 60$

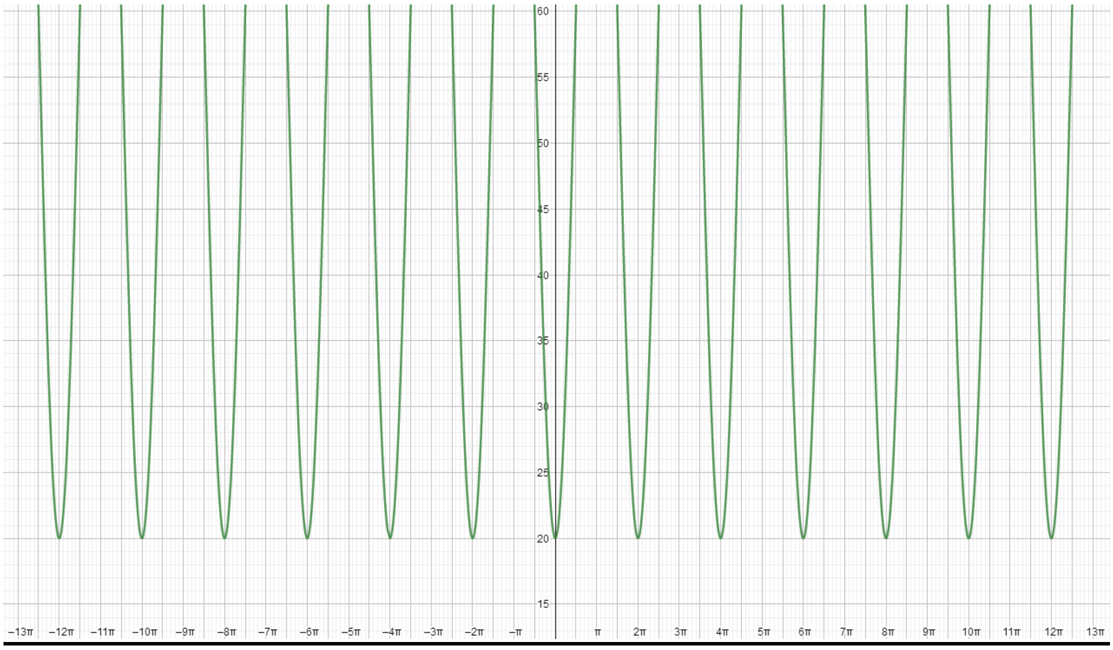
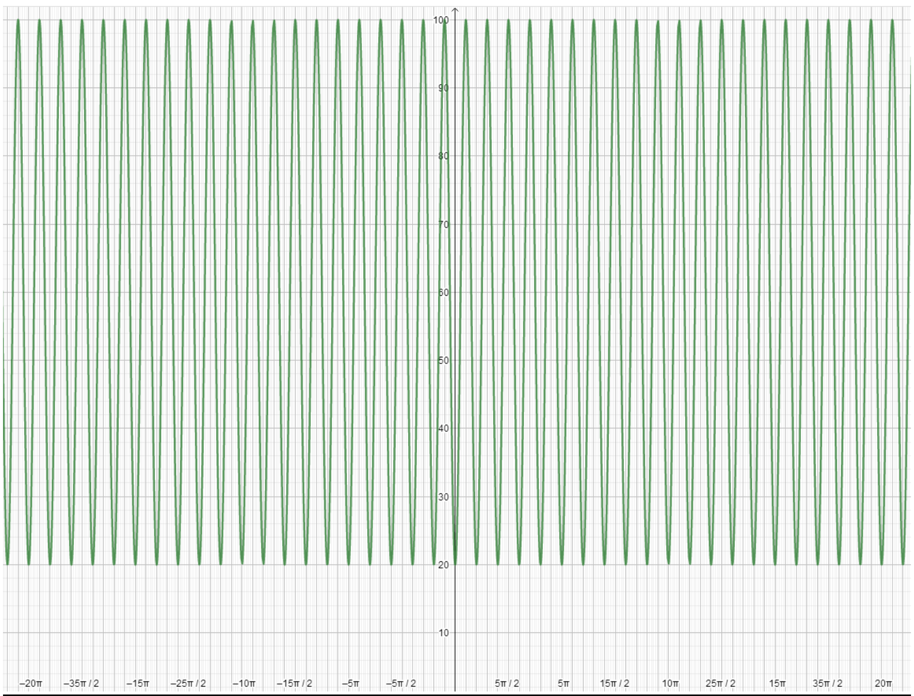
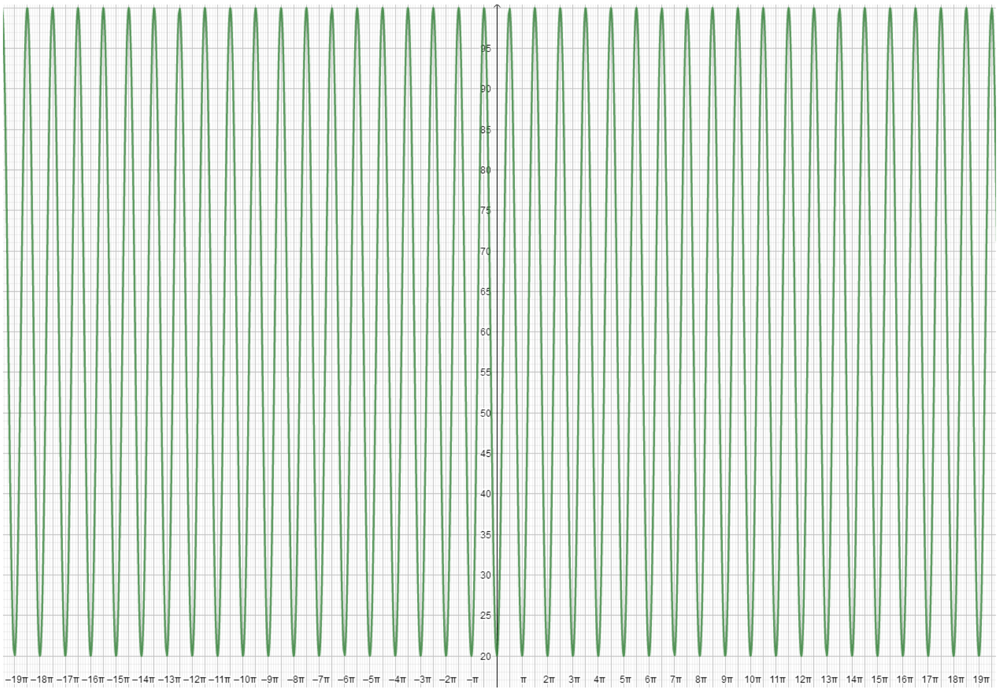


Gráfico da função para o item c): $f(x) = -40cos(2x) + 60$



1ª ampliação do gráfico da função para o item c): $f(x) = -40cos(2x) + 60$



2ª ampliação do gráfico da função para o item c): $f(x) = -40cos(2x) + 60$

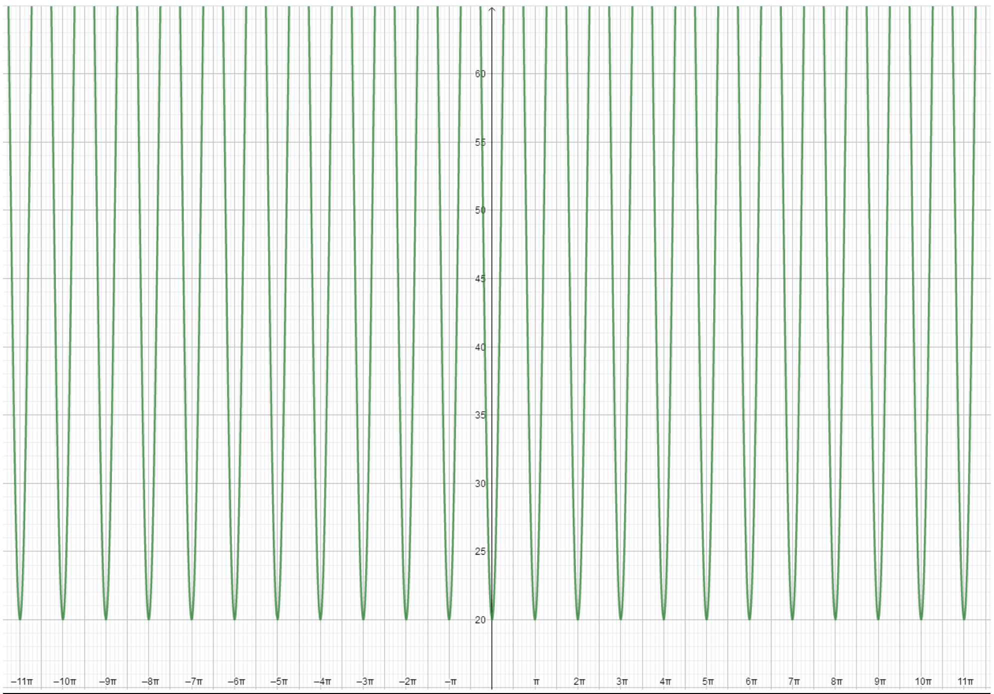
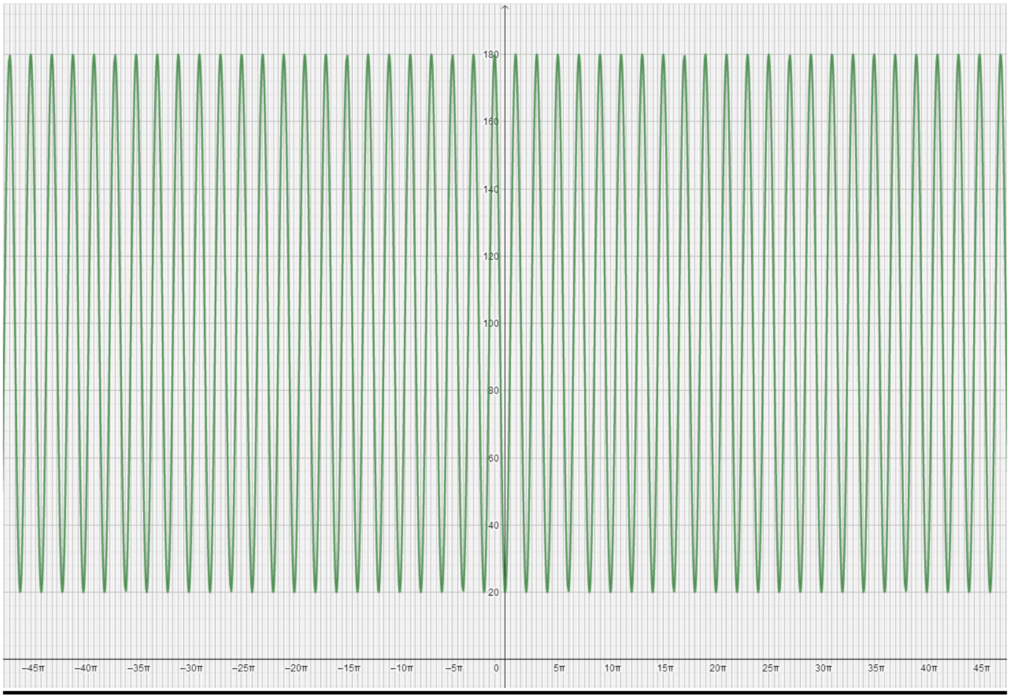


Gráfico da função para o item d): $f(x) = -80cos(x) + 100$



Ampliação do gráfico da função para o item d): $f(x) = -80cos(x) + 100$

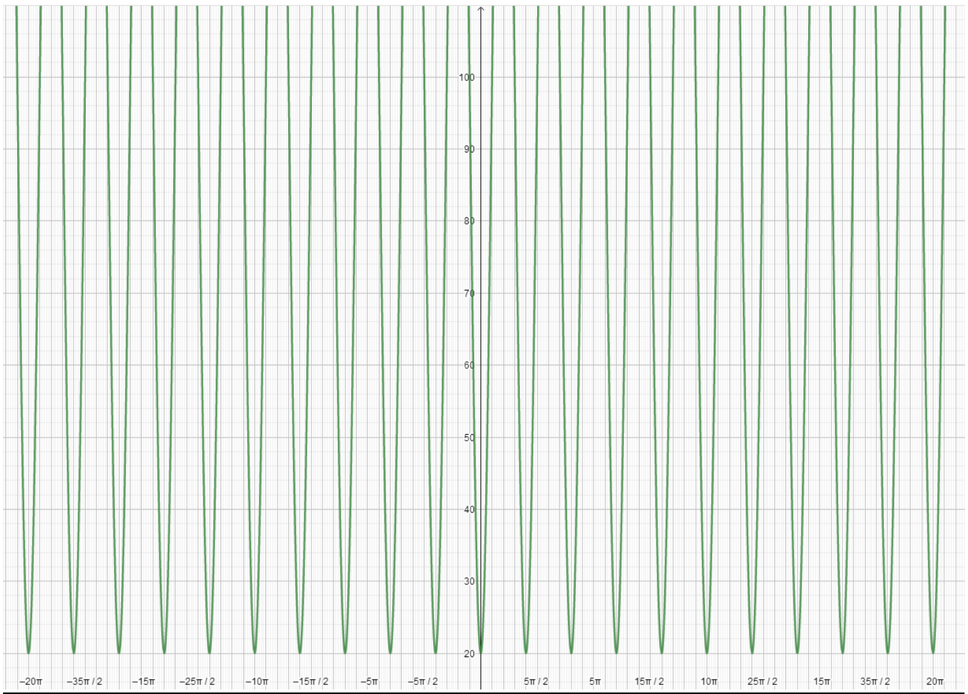
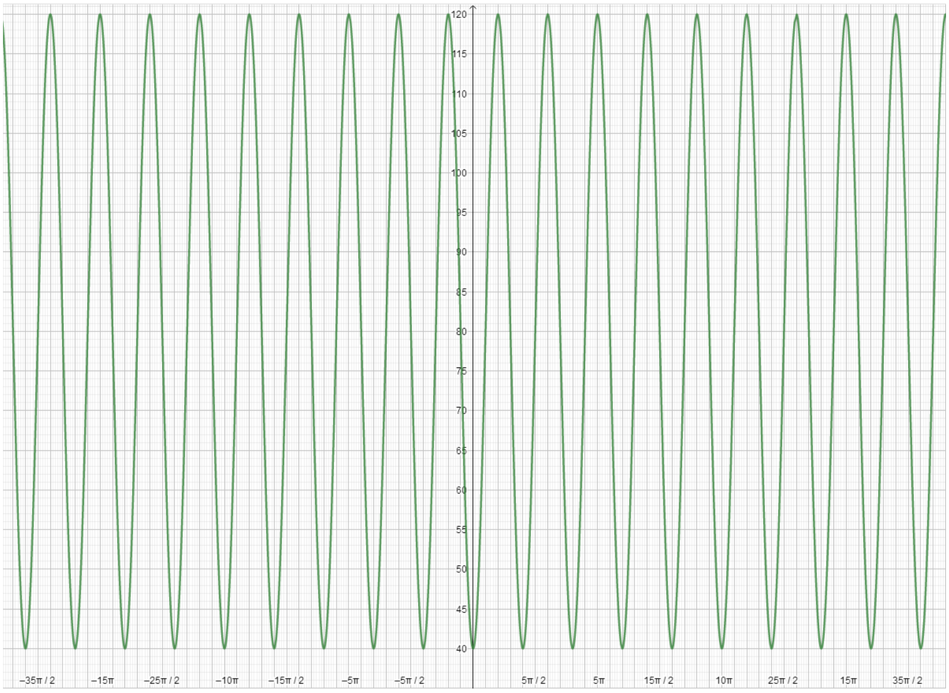
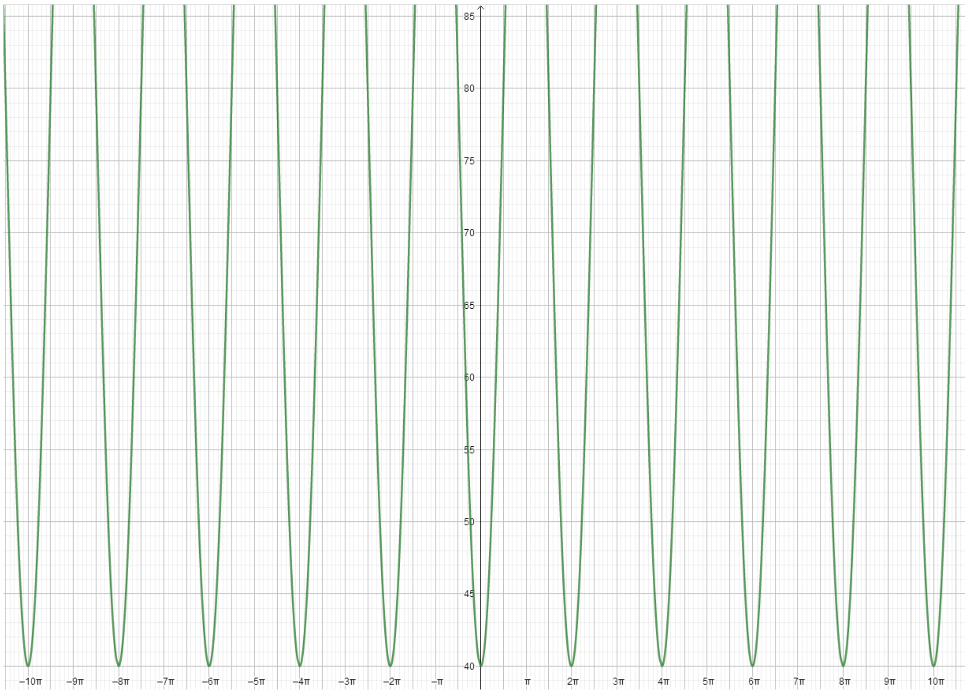


Gráfico da função para o item e): $f(x) = -40cos(x) + 80$



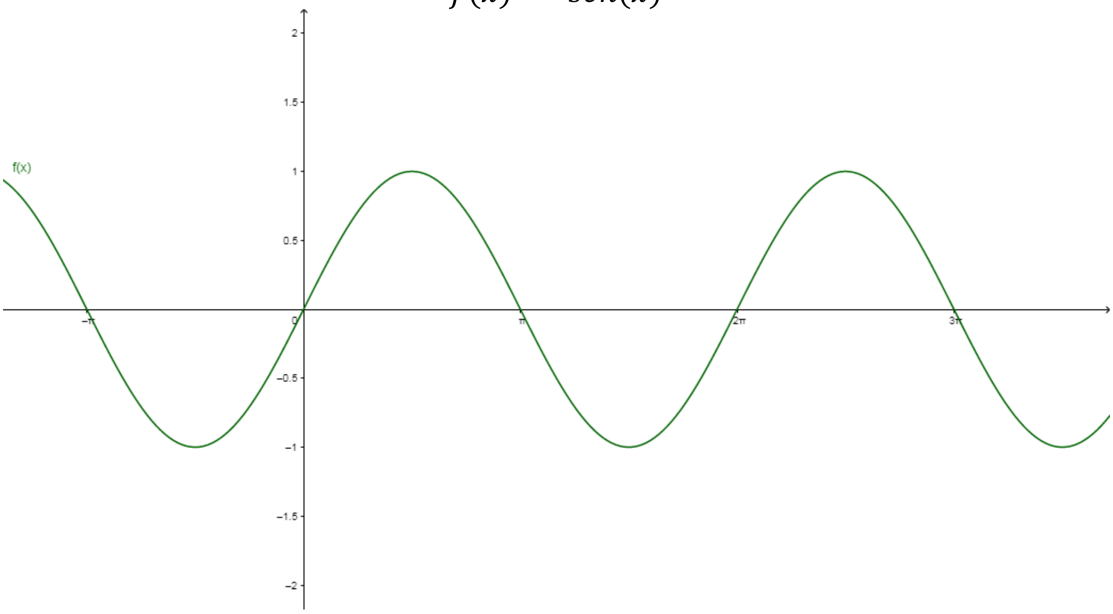
Ampliação do gráfico da função para o item e): $f(x) = -40cos(x) + 80$



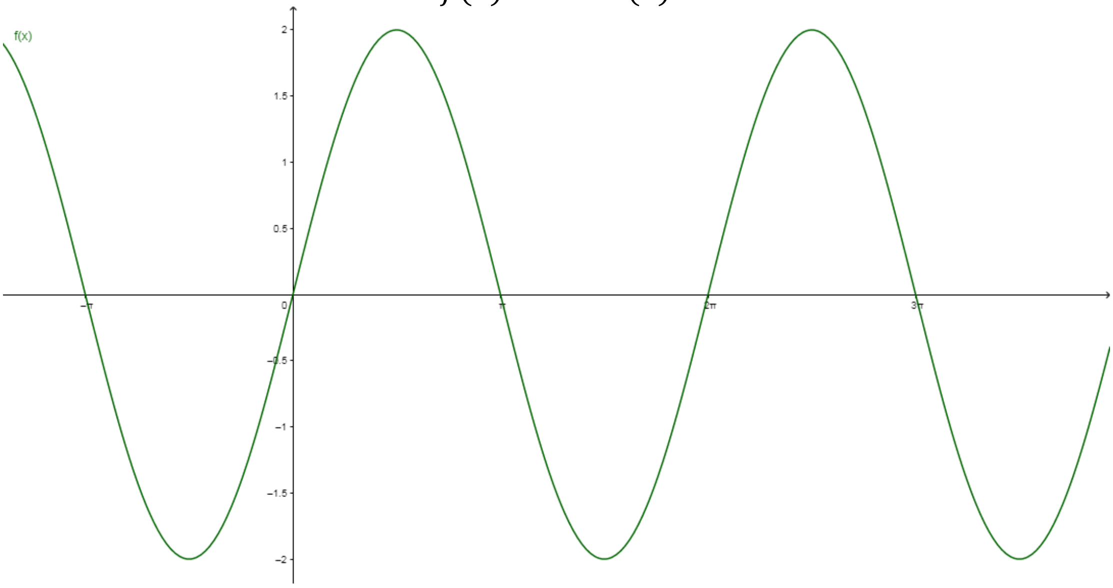
b) Descrição da Situação de Ensino 2:

- Situação de ensino: Manipulação de funções no GeoGebra.
- Objetivos: Compreender a representação algébrica e gráfica das funções trigonométricas, e as propriedades dessas funções
- Metodologia: Exibição do GeoGebra no projetor, explorando as funções trigonométricas seno, na aula 2, e cosseno, na aula 3, com base no livro *Matemática: Paiva* e conforme o artigo *Função trigonométrica: um enfoque aplicado ao ensino técnico* (vide referências).
- Ainda, no fim da terceira aula, seria proposta uma Avaliação para fixação do conteúdo.

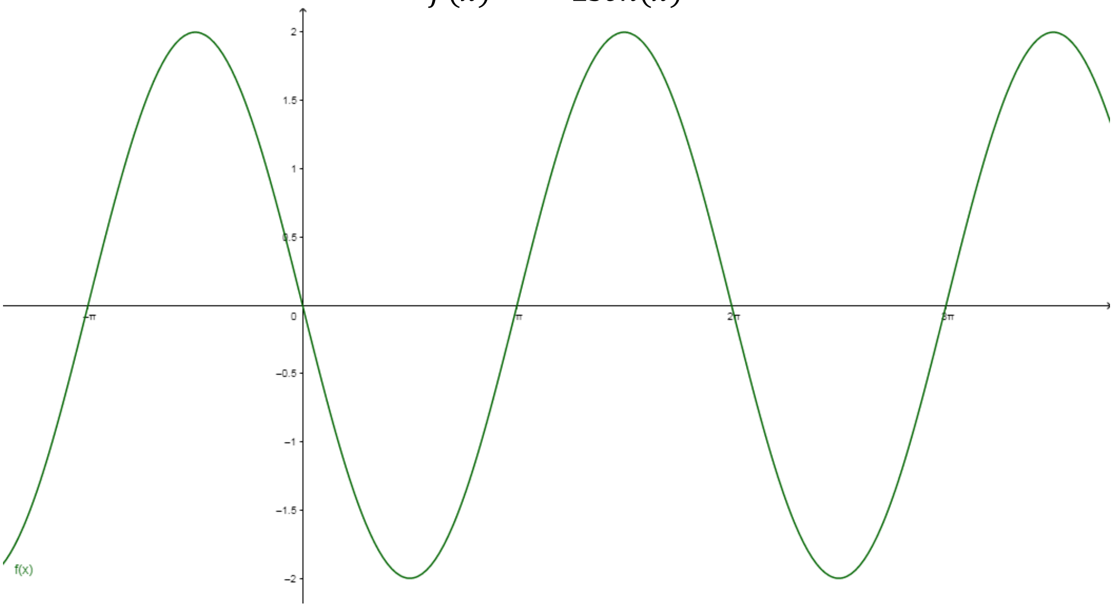
$$f(x) = sen(x)$$



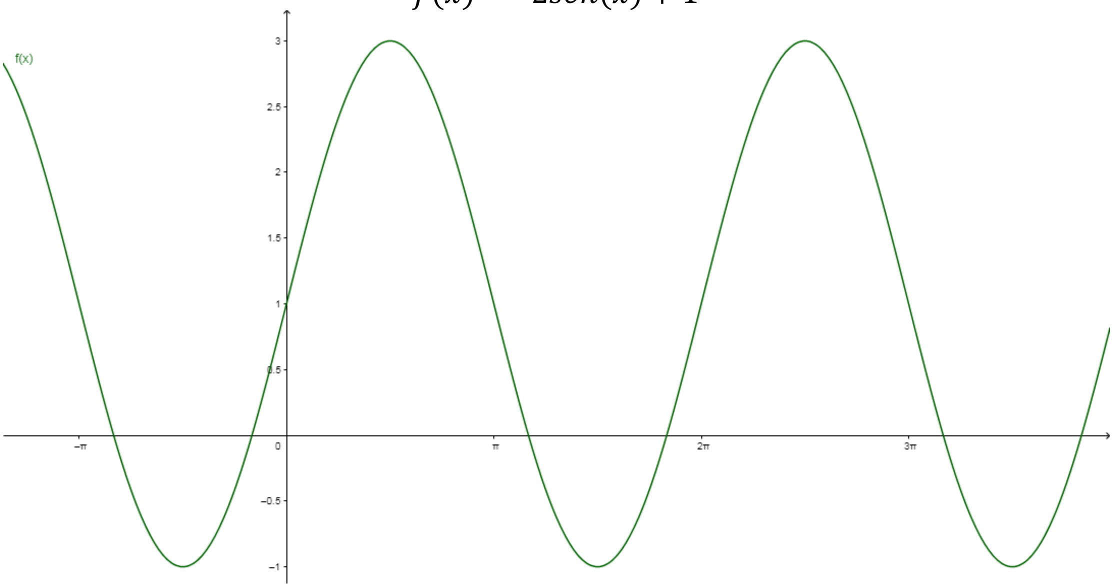
$$f(x) = 2sen(x)$$



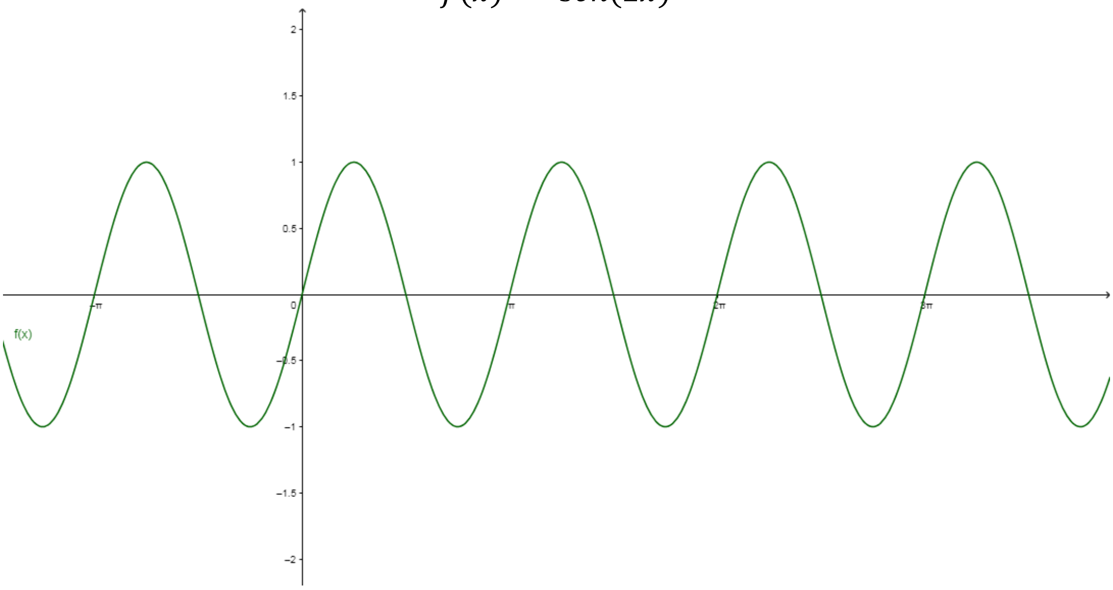
$$f(x) = -2sen(x)$$



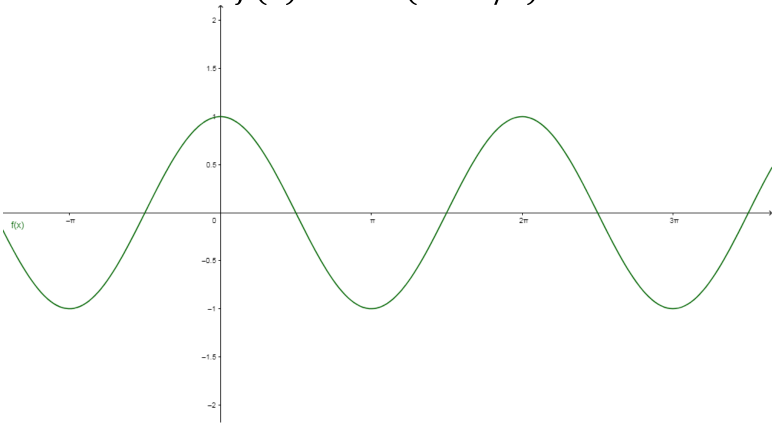
$$f(x) = 2sen(x) + 1$$



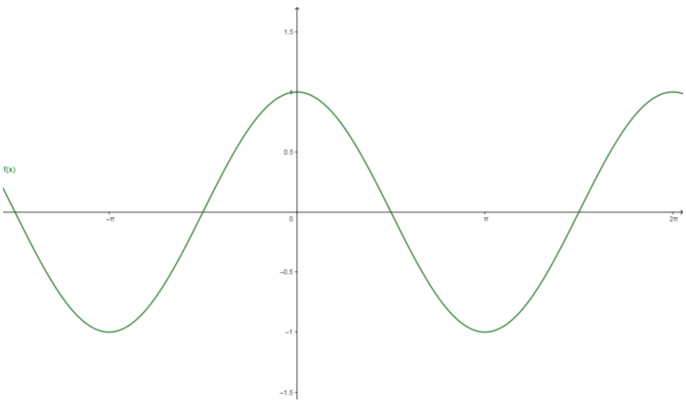
$$f(x) = sen(2x)$$



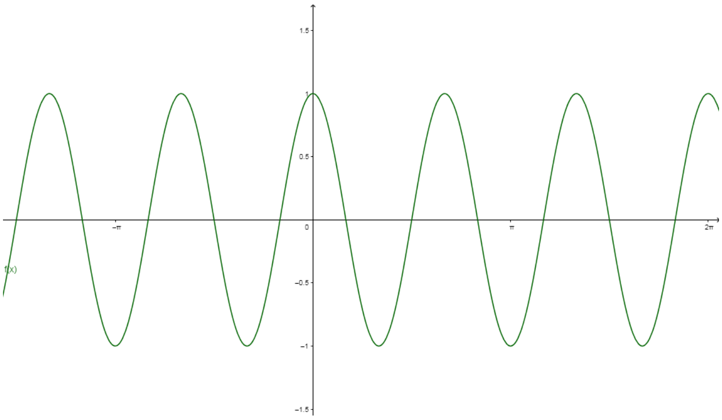
$$f(x) = sen(x + \pi/2)$$



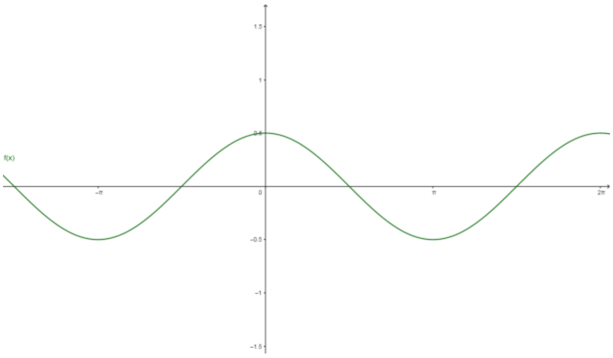
$$f(x) = cos(x)$$



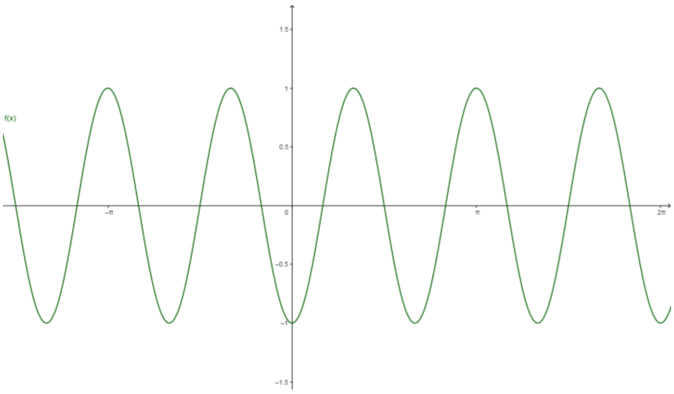
$$f(x) = cos(3x)$$



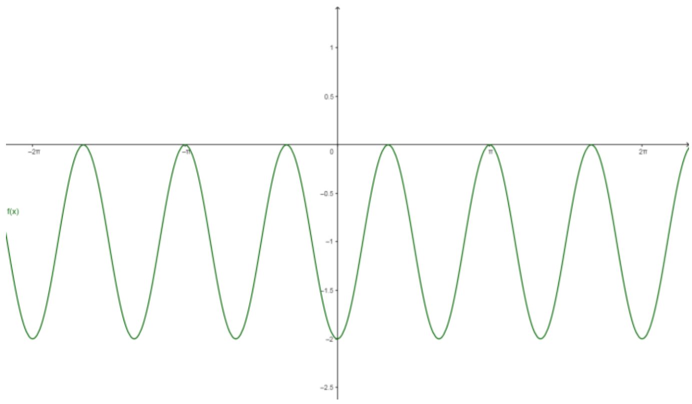
$$f(x) = 1/2cos(x)$$



$$f(x) = cos(3x - \pi)$$



$$f(x) = cos(3x - \pi) - 1$$



- Desenvolvimento: Plotar cada uma das funções acima e analisar a diferença em relação com o gráfico na lousa, relacionando os coeficientes da equação $y = a + b\ sen(cx + d)$ com a amplitude (b), período (2π/c) e fase (d/c).

Uso do GeoGebra para a função genérica.

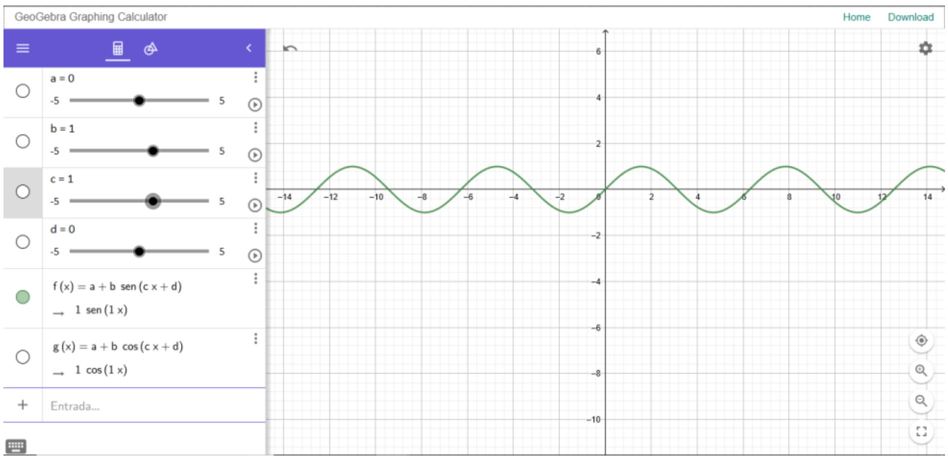
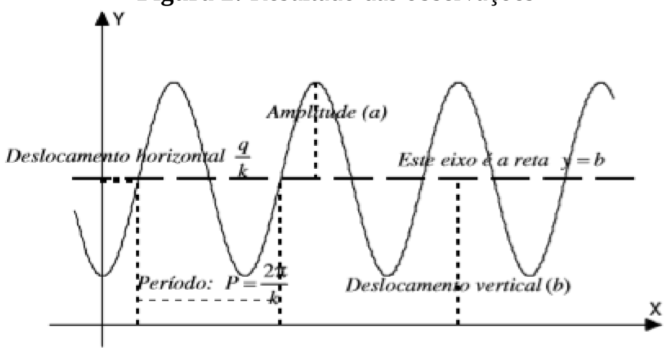


Figura 2: Resultado das observações



Fonte: ALBÉ, FILIPPSEN. 2018, p.15.

Formas previstas de avaliação

- Entregar folhas para que desenhem o gráfico das funções $y = 1/2 + sen(x - \pi/3)$ e $y = 1 + 2cos(2x + \pi/4)$.
- Pedir que representem graficamente a função $y = a + b\,cos(cx + d)$, considerando $a<0$, $b>1$, $c>1$ e $-2\boldsymbol{\pi} < d < 0$. Dica: Considerar um coeficiente por vez.

Referências

ALBÉ, M.M., FILIPPSEN, R. M. J. **Função Trigonométrica: Um Enfoque Aplicado Ao Ensino Técnico**. Revista Liberato, v. 7, 2006. Disponível em: <http://www.liberato.com.br/sites/default/files/arquivos/Revista_SIER/v.%207%2C%20n.%208%20%282006%29/2.%20FUN%C7%C3O%20TRIGONOM%C9TRICA%20UM%20ENFOQUE%20APLICADO%20AO%20ENSINO.pdf>. Acesso em: 5 de julho de 2018.

BRASIL, MEC, SEB. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação – Secretaria da Educação Básica, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 5 de julho de 2018.

__________ Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/Secretaria da Educação Básica. Brasília: MEC/SEF, v.2, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 5 de julho de 2018.

___________ Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf> Acesso em: 5 de julho de 2018.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio.** v.1, 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva.** v.1, Parte III, 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

FUNÇÃO TANGENTE

Gabriel de Paula Soares
Tawany Oliveira Santos

Ano escolar: 2º ano do ensino médio

Ementa

Revisão das relações trigonométricas no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico. Função tangente – gráfico.

Objetivos

Introduzir a função tangente através da construção do seu gráfico.

Recursos empregados

Círculo trigonométrico, triângulos de E.V.A., régua e transferidor.

Atividades

1. Introdução

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o professor deve ensinar matemática a partir de uma abordagem investigativa, de forma a estimular o pensamento crítico do aluno. Com a aula introdutória aqui proposta, o aluno parte da abordagem investigativa para poder chegar à sistematização da teoria e, através da reflexão feita pelos alunos, estimula-se também o pensamento crítico, atingindo-se, assim, alguns dos objetivos propostos pela BNCC.

2. Atividades desenvolvidas

a) Revisão dos conceitos já conhecidos

Revisar conceitos de seno e cosseno e pedir aos alunos para calcularem a razão entre o cateto oposto e cateto adjacente, em triângulos retângulos cortados em uma folha de E.V.A. que serão dados aos alunos, com os ângulos já indicados.

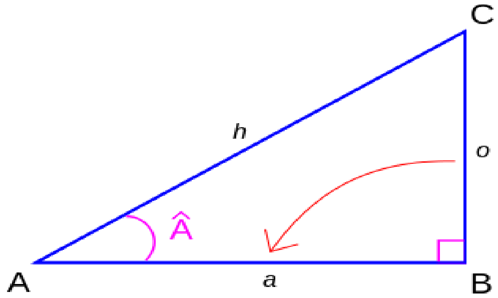
b) Definição de Tangente

Após a atividade, apresentar a definição de tangente para que eles possam visualizar o que calcularam.

Definição:

A tangente de um ângulo pode ser definida pela razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente, tal como mostra a figura abaixo:

Figura 1: definição de tangente de um ângulo no triângulo retângulo.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tangente

Como consequência desta definição, a tangente também pode ser definida como a razão do seno pelo cosseno, através de algumas aplicações algébricas. Sendo:

- Co = cateto oposto ao ângulo Â;
- Ca = cateto adjacente ao ângulo Â;
- Hip = hipotenusa do triângulo

$$\text{Seno} = \frac{\text{Co}}{\text{Hip}} \qquad \text{Cosseno} = \frac{\text{Ca}}{\text{Hip}} \qquad \text{Tangente} = \frac{\text{Co}}{\text{Ca}}$$

$$\frac{\text{Seno}}{\text{Cosseno}} = \frac{\text{Co}}{\text{Hip}} \cdot \frac{\text{Hip}}{\text{Ca}} = \frac{\text{Co}}{\text{Ca}} = \text{Tangente}$$

Ou seja: $tg\alpha = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$

c) Abordagem histórica

A função tangente foi muito usada durante os período das grandes navegações, para orientação marítima. Os instrumentos que aplicavam esse conceito para seu funcionamento eram, por exemplo, o quadrante, o astrolábio e a balestilha.

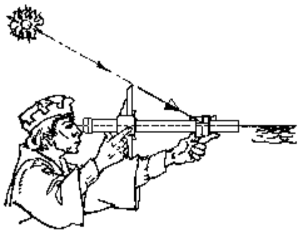
Figura 2: Quadrante

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm11/quadrante.htm

Figura 3: Astrolábio

Fonte: https://science-track.com/web/pt/puzzles-3d/27-puzzle-3d-astrol%C3%A1bio.html

Figura 4: Balestilha



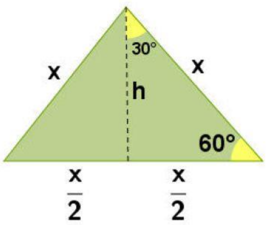
Fonte: https://www.ancruzeiros.pt/ancdrp/balestilha

O significado da palavra "tangente" Vem do Latim tangens, "o que toca", do verbo tangere, "tocar, manusear". A definição de "tangente a um círculo" aparece no livro III da obra Elementos, escrita por Euclides por volta 300 a.C. Ele define a tangente como sendo a reta que toca o círculo de modo que não o corta ao ser prolongada.

d) Cálculo da tangente para os ângulos notáveis de 30°, 45° e 60°.

Para os ângulos de 30° e de 60° é possível calcular a tangente a partir dos lados e da altura de um triângulo equilátero:

Figura 5: Cálculo de tg(30°) e de tg(60°)



$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

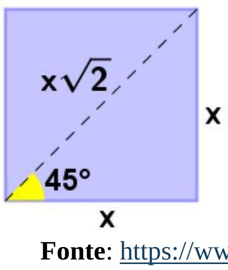
$$tg(30^o) = \frac{x/2}{h} = \frac{x/2}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg(60^o) = \frac{h}{x/2} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x/2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{x} = \sqrt{3}$$

Fonte: https://www.infoescola.com/trigonometria/tangente/

Para o ângulo de 45°, calcula-se a tangente a partir dos lados e da diagonal de um quadrado:

Figura 6: Cálculo de tg(45°)



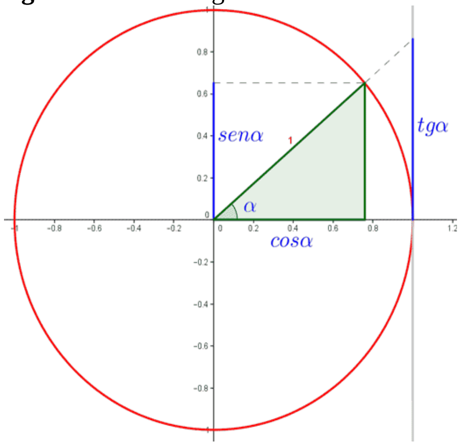
$$tg(45^o) = \frac{x}{x} = 1$$

Fonte: https://www.infoescola.com/trigonometria/tangente/

e) O Círculo trigonométrico

Os valores de seno e cosseno podem ser encontrados no círculo de raio unitário, chamado de círculo trigonométrico, sendo que o seno de um ângulo pode ser lido eixo y e o cosseno no eixo x. A tangente do ângulo também pode ser representada no círculo trigonométrico, traçando-se uma reta paralela ao eixo y, e que tangencia o círculo, tal como mostra a figura abaixo:

Figura 5: Cíclulo trigonométrico



Fonte: https://www.matematica.pt/faq/circulo-trigonometrico.php

Os alunos devem agora verificar se os valores que encontraram para a tangente dos ângulos marcados nos triângulos (atividade a) são os mesmos que podem ser encontrados no círculo trigonométrico.

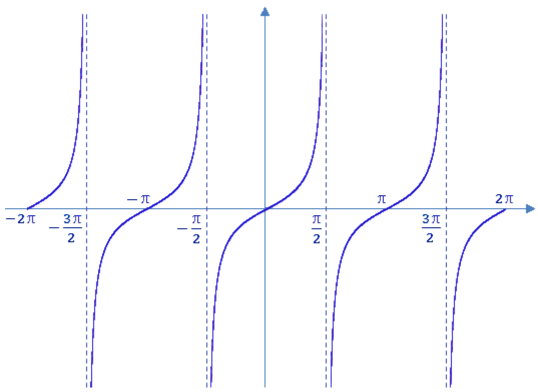
Com o círculo trigonométrico é possível encontrar a tangente para os ângulos maiores que 90°. Também é possível verificar que para os ângulos de 90° e de 270°, a tangente tende ao infinito. Esse fato pode ser também verificado calculando-se a razão entre seno e cosseno para estes ângulos. Como cos 90° = cos 270° = 0, e não se pode dividir por zero, então não temos nenhum número real que resulte em tg(90º) e tg(270°).

f) Função tangente

Assim como outras funções trigonométricas, a tangente também possui um gráfico próprio, porém em alguns pontos seu valor não é definido, pois, tem-se uma razão onde o denominador é zero no caso os ângulos de 90° e de 270°, e não existe divisão por zero.

Para construir o gráfico da função tangente, adotamos os ângulos em radianos e podemos usar o círculo trigonométrico para encontrar os valores da tangente. o gráfico de f(x) = tg(x) é dado por:

Figura 6: Gráfico da função tangente.



Fonte: https://hpdemat.apphb.com/FuncaoTrigonometrica

g) Resolução de problemas

- Do ponto A, uma pessoa observa o topo de um prédio sob um ângulo de 30º. Determine a altura do prédio, sabendo que a pessoa está a 22,5 metros dela.
- Para medir a largura de um rio, um engenheiro utilizou como referência dois

pontos que ele demarcou em uma margem do rio, e um arbusto, localizado na margem oposta, conforme o esquema que receberam. Qual é, aproximadamente, a largura do rio?

- Um poste de 4 metros de altura projeta uma sombra de $4\sqrt{3}$ metros sobre o solo. Qual é a inclinação dos raios luminosos que originaram a sombra?

3. Conclusões

O tema função tangente tem muitas aplicações. É fácil levar o aluno a compreender o assunto quando a metodologia de trabalho em aula privilegia as atividades práticas, as aplicações e a contextualização histórica. A discussão dos modos de resolver os problemas e os resultados encontrados pelos alunos é fundamental para que o incentivar o pensamento crítico.

Formas previstas de avaliação

Propõe-se que os alunos resolvam alguns problemas envolvendo a função tangente em algumas situações cotidianas.

Referências

BEZERRA, K. **Razões Trigonométricas**. Disponível em: https://www.estudopratico.com.br/razoes-trigonometricas/. Acesso em 20/07/2018.

INTEGRANDO CONHECIMENTO (Blog). **Origem: seno, cosseno e tangente**. Disponível em: https://www.integrandoconhecimento.com/single-post/2016/04/14/Origem-seno-cosseno-e-tangente. Acesso em 19/07/2018.

NOÉ, M. **Introdução à Trigonometria**. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/introducao-trigonometria.htm. Acesso em 18/07/2018.

NOVO TELECURSO. **A Trigonometria do triângulo retângulo - Matemática - Ens. Médio.** Disponível em**:** https://www.youtube.com/watch?v=UQOpQdQSavc. Acesso em 19/07/2018.

SILVA, D.D. **Tangente**. Disponível em: https://www.infoescola.com/trigonometria/tangente/. Acesso em 20/07/2018.

USP, Pro-reitoria de Graduação. **Um pouco da História da trigonometria**. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm. Acesso em 19/07/2018.

WIKIPÉDIA. **Funções trigonométricas**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_trigonom%C3%A9trica. Acesso em 19/07/2018.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Heytor Oliveira de Siqueira
Satomi Eguchi

Ano escolar: 2º ano do Ensino Médio

Ementa

História da matemática: funções trigonométricas. Introdução das funções: seno, cosseno e tangente, com os seus respectivos gráficos. Bingo das funções trigonométricas.

Objetivos

- Introduzir as funções trigonométricas.
- Construir gráficos de funções trigonométricas.

Recursos empregados

Projetor multimídia, lousa, caneta para lousa ou giz, cartelas do bingo.

Atividades

1ª aula: Introdução ao assunto - funções trigonométricas

- Situação de ensino: "A história das funções trigonométricas e suas aplicações em fenômenos naturais"
- Objetivos:
  Criar um ambiente que apoie a aprendizagem do aluno no assunto principal: As Funções Trigonométricas, que será trabalhado posteriormente.
- Recursos: Projetor multimídia para a exposição do conteúdo ou lousa e giz.
- Desenvolvimento:
  Essa aula é totalmente expositiva e é realizada pelo docente.

Primeiramente, o docente deverá realizar uma apresentação que insira o aluno num ambiente que o ajude a entender que os conceitos matemáticos que eles trabalharão, as funções trigonométricas, não surgiram espontaneamente. Nessa etapa é importante enfatizar os problemas que levaram a sua formulação ou as etapas necessárias para o seu surgimento (trigonometria e função).

Segue uma lista de referências sugestiva para elaborar a apresentação: Roque (2012), Boyer (2018) e Costa (2018).

Para finalizar, o docente será responsável por separar e apresentar exemplos atuais que utilizam as funções trigonométricas e que estejam presentes na realidade dos alunos. Aconselha-se utilizar os fenômenos naturais aprendidos na Física, tais como: movimentos periódicos (relógio de pêndulo), as ondas mecânicas e a eletricidade. Não é necessário que o docente explique os fenômenos, mas que consiga passar aos seus alunos como as funções trigonométricas se encaixam nesses exemplos.

No final desta aula, espera-se que os alunos se sintam instigados a pensarem nas funções trigonométricas.

2ª aula: As funções trigonométricas

- Situação de ensino: "A introdução das funções: seno, cosseno e tangente. E o comportamento dos seus gráficos."
- Objetivos: Introduzir as funções trigonométricas e aprender a construir os seus gráficos.
- Recursos: Projetor multimídia para a exposição do conteúdo ou lousa e giz.
- Desenvolvimento:
  Essa aula será expositiva e apresentada pelo docente.

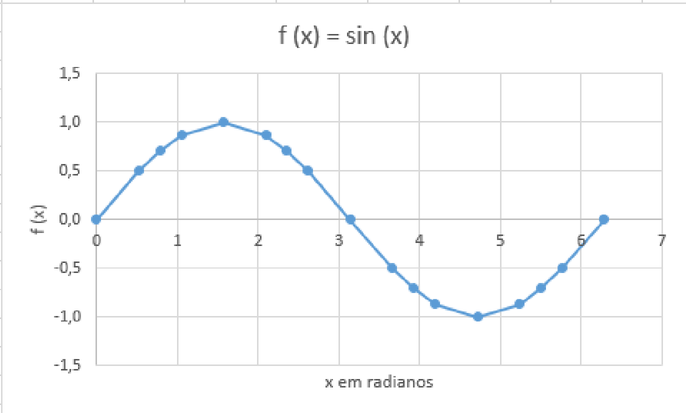
O docente deverá apresentar as três funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente, construindo um dos gráficos dessas três funções com o auxílio de uma tabela, aconselha-se a função seno. Os conceitos aprendidos em trigonometria serão fundamentais nessa etapa, tais como os ângulos notáveis e a relação de radianos e grau.

A tabela deverá ser construída da seguinte forma: três colunas, sendo a primeira contendo o valor em grau, a segunda a conversão em radianos e a terceira o valor da função trigonométrica. Após o preenchimento das colunas, o docente deverá plotar o gráfico da função.

Segue o exemplo:

Figura 1: Exemplo da construção final do gráfico da função seno realizado no Excel.

	Radianos	f (x) = sin (x)
0	0	0,0
30	0,5	0,5
45	0,8	0,7
60	1,0	0,9
90	1,6	1,0
120	2,1	0,9
135	2,4	0,7
150	2,6	0,5
180	3,1	0,0
210	3,7	-0,5
225	3,9	-0,7
240	4,2	-0,9
270	4,7	-1,0
300	5,2	-0,9
315	5,5	-0,7
330	5,8	-0,5
360	6,3	0,0



Fonte: Construção dos autores

Além disso, deverá ser apresentado ao aluno a ideia de periodicidade no gráfico, visto que os exemplos dados na primeira aula envolvem tal conceito.

Construído um dos gráficos, o docente poderá pedir para os alunos construírem o gráfico de outra função trigonométrica, por exemplo a função cosseno, visto que o gráfico dessa função possui maior semelhança com a função seno.

Após um certo tempo, o docente deverá perguntar aos alunos as semelhanças e diferenças que eles notaram na construção desse gráfico. E por fim, deverá ser construído os gráficos das funções restantes.

3ª aula: Atividade

- Situação de Ensino: "Bingo das funções trigonométricas"
  A atividade realizada será uma adaptação do material idealizado por MENDES et al (2009). O jogo foi desenvolvido para no máximo 36 alunos (18 duplas).
- Objetivo: Estimular os alunos a fazerem contas e aproximações sem o uso da calculadora. Além disso, reforçar a construção dos gráficos das Funções: Seno, Cosseno e Tangente.

- Metodologia: Para a criação das cartelas do bingo, foi utilizada como base a tabela a seguir:

Tabela 1: Funções com suas respectivas respostas.

Ângulos	f(x) = -1 + cos (x)	f(x) = -3 + sen (x)	f(x) = tan (2x)	f(x) = 3 - cos (x)	f(x) =2 – tan (x)	f(x) = 2 + cos (4x)
30	-0,1	-2,5	1,7	2,1	1,4	1,5
150	-1,9	-2,5	-1,7	3,9	2,6	1,5
210	-1,9	-3,5	1,7	3,9	1,4	1,5
330	-0,1	-3,5	-1,7	2,1	2,6	1,5
45	-0,3	-2,3	Não existe	2,3	1	1
135	-1,7	-2,3	Não existe	3,7	3	1
225	-1,7	-3,7	Não existe	3,7	1	1
315	-0,3	-3,7	Não existe	2,3	3	1
60	-0,5	-2,1	-1,7	2,5	0,3	1,5
120	-1,5	-2,1	1,7	3,5	3,7	1,5
240	-1,5	-3,9	-1,7	3,5	0,3	1,5
300	-0,5	-3,9	1,7	2,5	3,7	1,5
Ângulos	**f(x) =3sen(x)**	**f(x) = cos(4x)**	**f(x) =1 – cos (x)**	**f(x) = 1 - sen(3x)**	**f(x) = sen (3x)**	**f(x) = 4 + tan (2x)**
30	1,5	-0,5	0,1	0	1	5,7
150	1,5	-0,5	1,9	0	1	2,3
210	-1,5	-0,5	1,9	2	-1	5,7
330	-1,5	-0,5	0,1	2	-1	2,3
45	2,1	-1	0,3	0,3	0,7	Não existe
135	2,1	-1	1,7	0,3	0,7	Não existe
225	-2,1	-1	1,7	1,7	-0,7	Não existe
315	-2,1	-1	0,3	1,7	-0,7	Não existe
60	2,6	-0,5	0,5	1	0	2,3
120	2,6	-0,5	1,5	1	0	5,7
240	-2,6	-0,5	1,5	1	0	2,3
300	-2,6	-0,5	0,5	1	0	5,7

- As funções selecionadas foram resolvidas em todos os ângulos notáveis (incluindo todos os quadrantes).
- Foram confeccionadas 18 cartelas para o bingo, apresentadas abaixo:

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________

f(x) = 4 + tan (2x)
Funções: g(x) = -3 + sen (x)
h(x) = 3 - cos (x)

-2,5	3,4	2,1
2,3	-2,1	2,5
-3,9	5,7	-2,3

RASCUNHO

____
____
____
____
____

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________

f(x) = 2 + cos (4x)
Funções: g(x) = sen (3x)
h(x) =2 – tan (x)

2,6	1,4	0,7
3,7	-0,7	0,3
1,5	0	-1

RASCUNHO

____
____
____
____
____

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________________

Funções:
f(x) = 1 – cos (x)
g(x) = cos(4x)
h(x) = 1 - sen(3x)

1,7	1	1,9
0,3	0,5	0
2	0,1	-0,5

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________________

Funções:
f(x) = -1 + cos (x)
g(x) = tan (2x)
h(x) = 1 - sen(3x)

0	-0,5	-0,3
-1,7	1	-1,5
-0,1	1,7	0,3

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________________

Funções:
f(x) = 3sen (x)
g(x) = cos (4x)
h(x) = 1 - cos (x)

2,1	2,6	0,1
1,9	-0,5	-1,5
-1	1,7	0,5

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________________

Funções:
f(x) = -1 + cos (x)
g(x) = sen (3x)
h(x) = 2 – tan (x)

-0,5	3,7	1,4
2,6	-1	0,3
-1,7	3,7	-2,6

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome:

Funções:
$f(x) = 3sen(x)$
$g(x) = -1 + cos\ (x)$
$h(x) = 2 + cos\ (4x)$

-0,5	1	-2,6
-0,1	-1,7	2,1
2,6	1,5	-1,9

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome:

Funções:
$f(x) = 3sen(x)$
$g(x) = 1 – cos\ (x)$
$h(x) = 4 + tan\ (2x)$

1,5	1,7	5,7
0,1	2,3	2,1
5,7	-2,6	1,9

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome:

Funções:
$f(x) = tan\ (2x)$
$g(x) = 3 - cos\ (x)$
$h(x) = sen\ (3x)$

1,7	2,3	1
0,7	3,9	2,1
0	-1,7	-0,7

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: 10

Funções:
$f(x) = -3 + sen\ (x)$
$g(x) = cos(4x)$
$h(x) = 1 - sen(3x)$

1	2	-2,3
-2,5	-0,5	0
-1	0,3	-3,9

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________________

Funções:
f(x) = 1 – cos (x)
g(x) = sen (3x)
h(x) = 4 + tan (2x)

1,7	0,3	-1
0,1	5,7	0
1	1,5	2,3

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________________

Funções:
f(x) = -1 + cos (x)
g(x) = -3 + sen (x)
h(x) = tan (2x)

-3,9	-1,9	-2,3
-1,7	-2,1	-0,3
-0,5	-0,1	1,7

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________________

Funções:
f(x) = 2 – tan (x)
g(x) = 3sen (x)
h(x) = cos (4x)

1	2,1	1
1,4	-0,5	-1
-2,6	3	1,5

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________________

Funções:
f(x) = 1 – cos (x)
g(x) = 1 - sen (3x)
h(x) = 4 + tan (2x)

2,3	0	0,5
0,1	5,7	1,5
0,3	1,9	1

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________

Funções:
f(x) = -3 + sen (x)
g(x) = tan (2x)
h(x) = 3sen(x)

2,6	-3,9	-1,7
-2,1	-2,5	2,1
1,7	-3,7	-1,5

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________

Funções:
f(x) = 3 - cos (x)
g(x) = 2 – tan (x)
h(x) = cos(4x)

0,3	1	2,5
3,9	-0,5	1,4
-1	2,1	3

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________

Funções:
f(x) = 3 - cos (x)
g(x) = sen (3x)
h(x) = 2 + cos (4x)

0	1,5	3,9
2,1	3,7	-1
2,5	1	0,7

RASCUNHO

Práticas de Ensino de Matemática I
Universidade Federal do ABC

Nome: ______________________

Funções:
f(x) = -3 + sen (x)
g(x) =2 – tan (x)
h(x) = 2 + cos (4x)

1,5	-2,5	-3,7
0,3	3	-3,9
1	1,4	-2,1

RASCUNHO

Para a montagem destas cartelas, foi selecionado de maneira arbitrária 3 funções diferentes. Foram escolhidos 9 resultados das funções em diferentes ângulos da tabela 1 e estes foram dispostas nos quadrados. Foi também reservado uma área de Rascunho, para auxiliar os estudantes na resolução das funções.

Também foram confeccionados os quadros com todos os ângulos, que deverão ser cortados e dobrados em tamanhos iguais, para serem sorteados.

Figura 3: Números para o sorteio

30	45	60
150	135	120
210	225	240
330	315	300

Fonte: construção dos autores

- Desenvolvimento: Os estudantes deverão formar duplas. Assim, será entregue a cada dupla uma cartela, contendo três funções diferentes.
  Em seguida, deverá ser explicado as regras do jogo.

Regras do Jogo

1) Cada dupla deverá acompanhar o jogo em somente uma cartela por vez.
2) Só poderá sortear um novo ângulo quando todas duplas realizarem as contas para as 3 funções escritas na cartela.
3) Um mesmo ângulo poderá apresentar respostas nas três funções.
4) A dupla deverá marcar em sua cartela somente se o ângulo sorteado apresentar relação com as respostas das funções em sua cartela.
5) Para validar sua resposta, a dupla deverá marcar dentro do quadrado correspondente, o ângulo e qual função foi a relacionada, f(x), g(x), h(x).
6) A dupla vencedora é aquela que marcar a cartela cheia.

Após o entendimento de todos os estudantes, pode-se iniciar a atividade. O primeiro passo é sortear um dos ângulos e informá-los o valor. Deixar que resolvam as 3 funções com o ângulo sorteado e auxiliá-los se for necessário. Após todos terem as respostas, marcar em suas cartelas caso esteja presente o resultado. Podendo assim, sortear novamente um outro ângulo, repetindo os passos anteriores, até que uma dupla preencha a cartela inteira.

Ao finalizar o jogo, o docente deverá pedir às duplas que escolham uma das funções de sua cartela e construa o gráfico correspondente, de período completo. O gráfico deverá ser entregue ao docente para que ele avalie as possíveis dificuldades que eles estão tendo nessa construção.

Formas previstas de avaliação

O instrumento de avaliação será a “Atividade Bingo”, onde será observado se o estudante possui o domínio ou dificuldade na realização das contas das funções e na construção de seus gráficos.

Observação: Não é necessário que o estudante marque a cartela inteira para mostrar um entendimento pleno do conteúdo, mas marcar todos os resultados obtidos com relação às funções colocadas.

Referências

BOYER, C. B. **Resumos Literários – Conhecimento Específico - A História da Matemática.** Disponível em: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/30355601/a_historia_da_matematica.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1534370441&Signature=3ewqHYF1CDbpfAHk96ziqRGBuuU%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DHistoria_de_las_matematicas.pdf. Acesso em: 15/08/2018.

______ **Um pouco da História da Trigonometria.** Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm. Acesso em: 15/08/2018.

COSTA, N. M. L. **A História da Trigonometria.** Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo5/mod3_pdf/historia_triogono.pdf. Acesso em: 15/08/2018.

MENDES, P. W.; MOÇO, P. P.; MACHADO, C. C.; NOVELLO, T. P. **Uso de material concreto no ensino de trigonometria.** Disponível em: http://www.repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/1015/uso%20de%20material%20concreto%20no%20ensino%20de%20trigonometria.pdf?sequence=1. Acesso em: 15/08/2018.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Tárcila Oliveira de Miranda
Tássia Oliveira de Miranda

Ano escolar: 2º ano do Ensino Médio

Ementa

Definição de seno, cosseno e tangente. Construção da circunferência trigonométrica. Gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

Objetivos

Compreender o significado das funções seno, cosseno e tangente e sua periodicidade.

Recursos empregados

- Quadro e giz para explicar o ciclo trigonométrico, a conversão de graus para radianos e como representar valores maiores do que 360º;
- GeoGebra para construir o ciclo trigonométrico, consultar valores de seno, cosseno e tangente e visualizar os gráficos das funções trigonométricas;
- Roteiro impresso com os exercícios.

Atividades

1. Descrição de situação: Construção do ciclo trigonométrico

- Objetivos:

Construir a circunferência trigonométrica e aprender a conversão de graus para radianos.

- Metodologia:

Opção 1: Uso do GeoGebra (caso a escola tenha computadores suficientes disponíveis para os alunos)

Apresentar o GeoGebra aos estudantes, mostrando as principais ferramentas e algumas possibilidades de uso. A seguir, será introduzida a ideia do ciclo trigonométrico para que então o professor e os alunos possam fazer sua construção no *software*. Explicar a conversão de graus para radianos.

Opção 2: Uso de quadro e giz (caso a escola não possua computadores)

Apresentar a ideia do ciclo trigonométrico aos alunos e fazer sua construção na lousa com o uso de compasso, régua e giz. Os alunos devem desenhar o ciclo trigonométrico nos cadernos. Explicar a conversão de graus para radianos.

- Desenvolvimento:

Opção 1: Uso do GeoGebra (caso a escola tenha computadores suficientes disponíveis para os alunos)

Explicar que o ciclo trigonométrico (ou circunferência trigonométrica) é uma circunferência de raio r = 1, perímetro igual a 2π e centro na origem (ponto O) de um plano cartesiano de eixos x e y. Construir no GeoGebra a circunferência trigonométrica, explicando aos alunos o porquê de cada etapa. Explicar a relação do perímetro 2π com a representação dos graus radianos. Relembrar a representação das razões trigonométricas no ciclo e associar isto ao raio unitário da circunferência.

Opção 2: Uso de quadro e giz (caso a escola não possua computadores)

Desenhar uma circunferência trigonométrica na lousa e explicar aos alunos a conversão de graus para radianos, associando esta explicação ao perímetro da circunferência, que é 2π. Representar as razões trigonométricas no ciclo para retomar conceitos vistos na 1ª série do Ensino Médio, e associar a representação ao raio unitário da circunferência. Os alunos também deverão construir o ciclo em seus cadernos. Sugerir que os alunos utilizem o decímetro como raio da circunferência, de modo que o raio seja unitário (isto é, um decímetro).

2. Descrição de situação: Funções seno, cosseno e tangente

- Objetivos:

Mostrar que qualquer número real possui representação no ciclo trigonométrico e as funções seno, cosseno e tangente.

- Metodologia:

Utilizando a circunferência trigonométrica construída na aula anterior no GeoGebra ou no caderno, explicar como representar os números reais no ciclo. Mostrar aos alunos que os números reais estão relacionados a valores de seno, cosseno e tangente e convidá-los a escolher um número qualquer, encontrar os valores do seno e cosseno através da circunferência e conferir em uma calculadora. Explorar valores de ângulos em todos os quadrantes e em vários períodos, observando que alguns senos, cossenos e tangentes são iguais. É importante esclarecer que seno, cosseno e tangente são funções e não valores quaisquer, de modo que só existem se houver um ângulo.

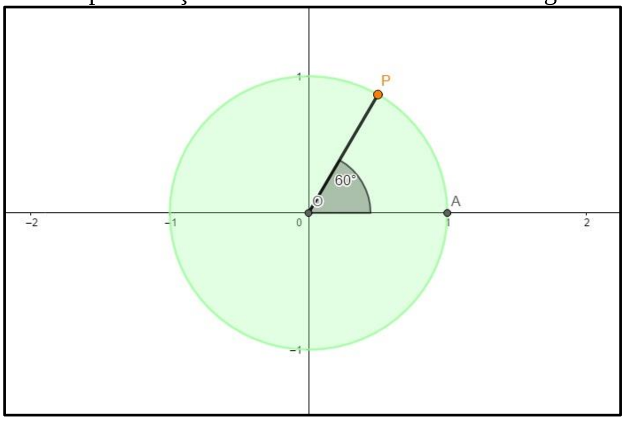
- Desenvolvimento:

Dado um número real qualquer que chamaremos de α, este número pode ser representado no ciclo trigonométrico da seguinte forma a partir do ponto A (1,0):

  - se $\alpha > 0$: percorrer uma distância α no ciclo trigonométrico em sentido anti-horário e marcar um ponto P no final;
  - se $\alpha < 0$: percorrer uma distância α no ciclo trigonométrico em sentido horário e marcar um ponto P no final.

O segmento $\overline{OP}$ (da origem O até P) forma o ângulo α com o segmento $\overline{OA}$ que pode ser visto na Figura 1. O ponto P é a imagem do número real α no ciclo trigonométrico[2].

Figura 1: Representação de um número real no ciclo trigonométrico



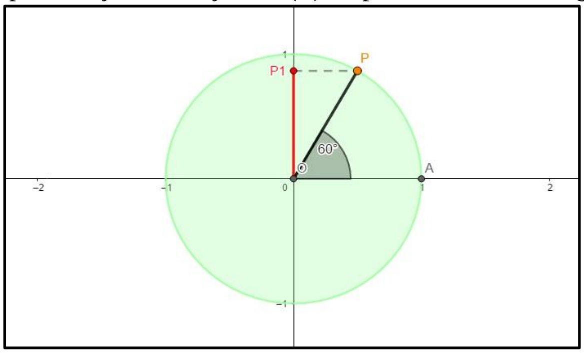
[2] Adaptado de IEZZI, 2013.

Explicar aos alunos que para valores superiores a 360°, é necessário iniciar uma nova volta na circunferência. Dado um número $\alpha > 360°$, a divisão de α por 360º resultará em um quociente q e um resto r. O quociente representa o número de voltas completas na circunferência e o resto é o valor correspondente de α na circunferência em uma nova volta. A ideia de voltas irá introduzir o conceito de periodicidade que será trabalhado na situação de ensino 3.

a) Função seno

Como já apresentado, o ponto P(x,y) é a imagem do número real α no ciclo trigonométrico. Utilizando a coordenada y do ponto P e a coordenada x como 0, obtemos um ponto P_1. Traçando um segmento $\overline{OP_1}$ (da origem até P_1), a medida deste segmento é o que chamamos de seno de α, que escrevemos sen(α). A função seno relaciona cada número real α ao seu seno no ponto P_1[3]. A representação de sen(α) pode ser vista na Figura 2.

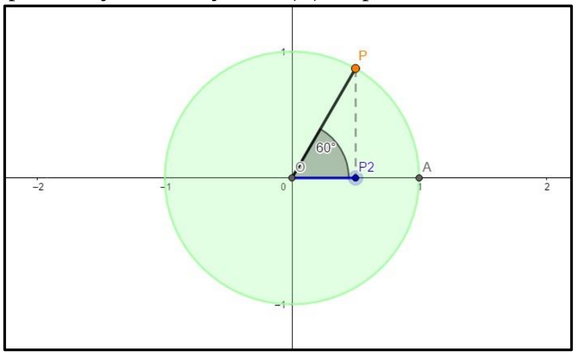
Figura 2: Representação da função sen(α) no ponto P_1 do ciclo trigonométrico.



b) Função cosseno

Como já apresentado, o ponto P é a imagem do número real α no ciclo trigonométrico. Utilizando a coordenada x do ponto P e a coordenada y como 0, obtemos um ponto P_2. Traçando um segmento $\overline{OP_2}$ (da origem até P_2), a medida deste segmento é o que chamamos de cosseno de α, que escrevemos cos(α). A função cosseno relaciona cada número real α ao seu cosseno no ponto P_2[4]. A representação de cos(α) pode ser vista na Figura 3.

Figura 3: Representação da função cos(α) no ponto P_2 do ciclo trigonométrico

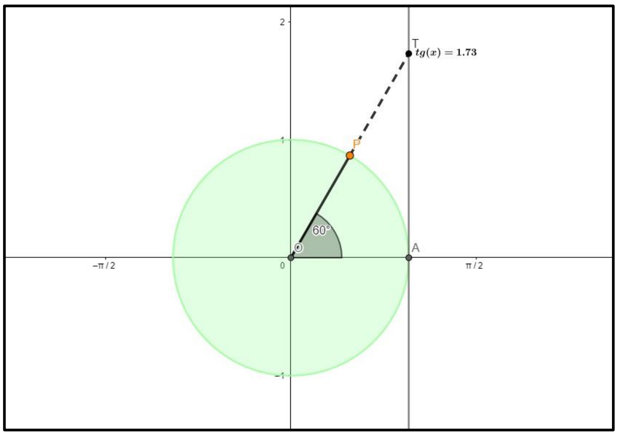


[3] Adaptado de IEZZI, 2013.
[4] Adaptado de IEZZI, 2013.

c) Função tangente

No ciclo trigonométrico, traçar uma reta tangente à circunferência, paralela ao eixo y, passando pelo ponto A. Notar que o segmento $\overline{OP}$ faz parte de uma reta que intercepta a reta tangente em um ponto T. A medida do segmento $\overline{AT}$ é o valor de tg(α)[5]. A Figura 4 representa a função tg(α).

Figura 4: Representação da função tg(α) no ponto T



3. Descrição de situação: Gráfico das funções seno, cosseno e tangente

- Objetivos:

Compreender o porquê da tangente de 90º ser indefinida e associar os pontos da circunferência com os pontos dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

- Metodologia:

Na circunferência trigonométrica, traçar uma reta tangente e verificar a relação $\frac{sen(x)}{cos(x)} = tg(x)$. Explicar porque os ângulos de 90º, 270º e seus correspondentes em outros períodos não possuem tangente definida. Mostrar, através de recursos gráficos, que cada ponto da circunferência é equivalente a um ponto da função senoidal, mostrar que a função senoidal é periódica (ideia de várias voltas no círculo) e que a função cossenoidal é similar a senoidal, entretanto deslocada no eixo horizontal. Explicar aos alunos que o domínio da função é infinito, e a imagem é [-1, 1], com auxílio da visualização do gráfico. Esta aula pode ser realizada com o uso do GeoGebra ou com lousa e giz.

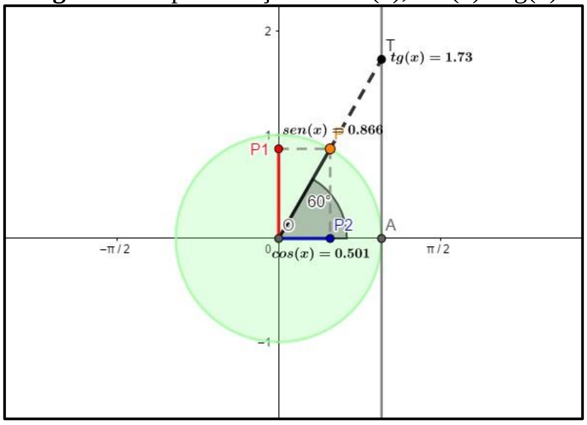
- Desenvolvimento:

a) Tangente

Considerando o número real x, retomar os conceitos de sen(x), cos(x) e tg(x) apresentados na situação de ensino 2. Em seguida, com auxílio do gráfico, encontrar o seno e o cosseno de um ângulo, e verificar a relação $\frac{sen(x)}{cos(x)} = tg(x)$. Na Figura 5, temos a tangente, o seno e o cosseno do ângulo 60º.

[5] Adaptado de IEZZI, 2013.

Figura 5: Representação de sen(x), cos(x) e tg(x)

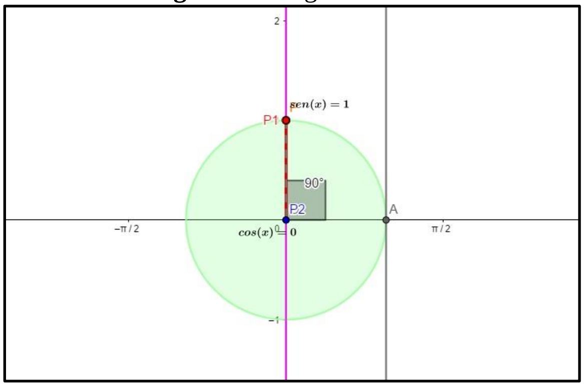


b) Atividade: **s**olicitar que os alunos façam as representações propostas no Roteiro 1.

Após a realização da atividade, os alunos devem construir uma reta paralela à reta tangente, passando pelo centro da circunferência, conforme Figura 6. Lembrar os alunos que retas paralelas não possuem intersecção no plano e, portanto, a reta desenhada jamais encontrará a reta tangente.

Deste modo, não há tangente do ângulo de 90º. Solicitar que a turma verifique o seno e cosseno de 90º, e que a relação $\frac{sen(x)}{cos(x)} = tg(x)$ não pode existir, pois o cosseno de 90º é igual a zero, e não existe divisão por zero.

Figura 6: Tangente de 90º



c) Periodicidade

Com os valores encontrados na atividade previamente realizada, discutir os valores de sen(x), cos(x) e tg(x), explicando a ideia de período das funções, e porque os valores se repetem. Perguntar aos alunos os valores encontrados em suas tabelas, e o seno e cosseno de alguns outros valores (os alunos podem utilizar calculadora se desejarem). Com as respostas dos alunos, inserir alguns pontos (x, sen(x)) e (x, cos(x)) no gráfico (Figura 7), e perguntar se é possível observar uma forma característica. Em seguida, incluir no gráfico as funções sen(x) e cos(x) (Figura 8), de modo que os alunos observem que a distribuição dos pontos (x, sen(x)) segue o formato da curva da função sen(x), e o mesmo ocorre com os pontos (x, cos(x)) e a função cos(x).

Figura 7: Pontos no gráfico

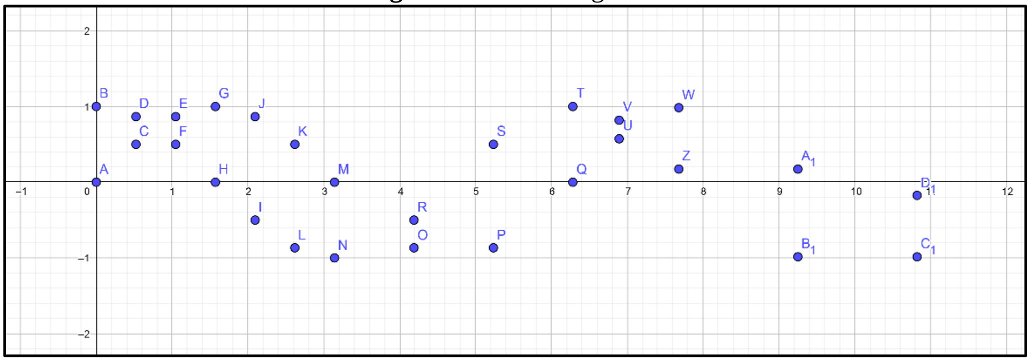
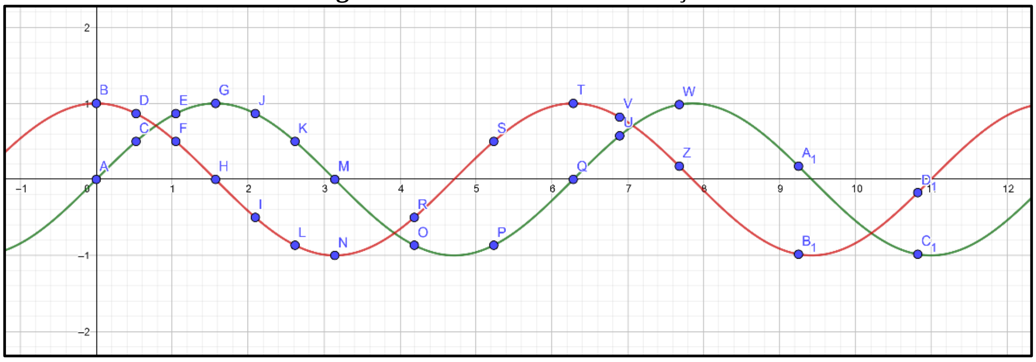


Figura 8: Pontos e curvas das funções



Com esta construção, os alunos podem visualizar a periodicidade das funções, e a similaridade das formas. Caso haja computadores disponíveis, sugerir que os alunos observem no GeoGebra (Figuras 9 e 10), com a ferramenta de diminuir zoom, que a onda é infinita no eixo x, e portanto, que o domínio dessas funções trigonométricas são os números reais, e observar que o valor máximo de seno e cosseno sempre é 1 e que o mínimo é -1. Portanto, a imagem de sen(x) e cos(x) vai de -1 a 1.

Caso a escola não tenha computadores, discutir com a turma sobre a figura desenhada na lousa, testando valores de sen(x) e cos(x) na calculadora para x cada vez maiores, de modo que compreendam que o domínio é todos os números reais, e que a imagem sempre terá o formato da lousa, e portanto vai de -1 a 1.

Figura 9: Gráfico da função sen(x)

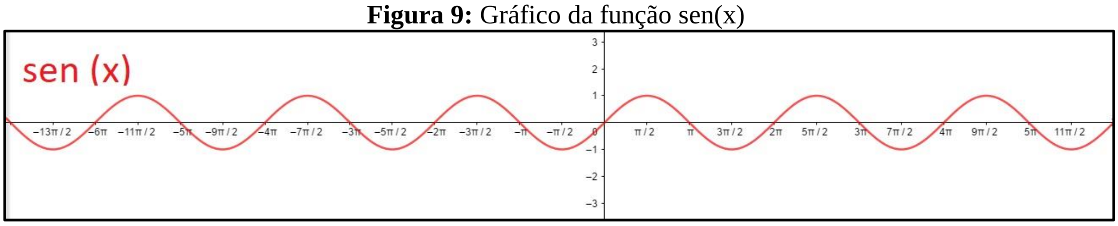
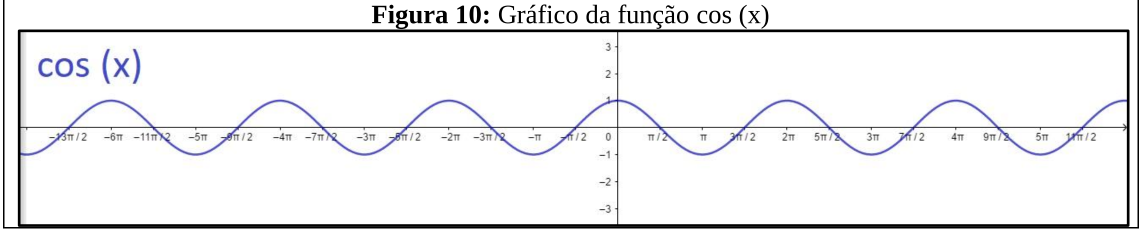
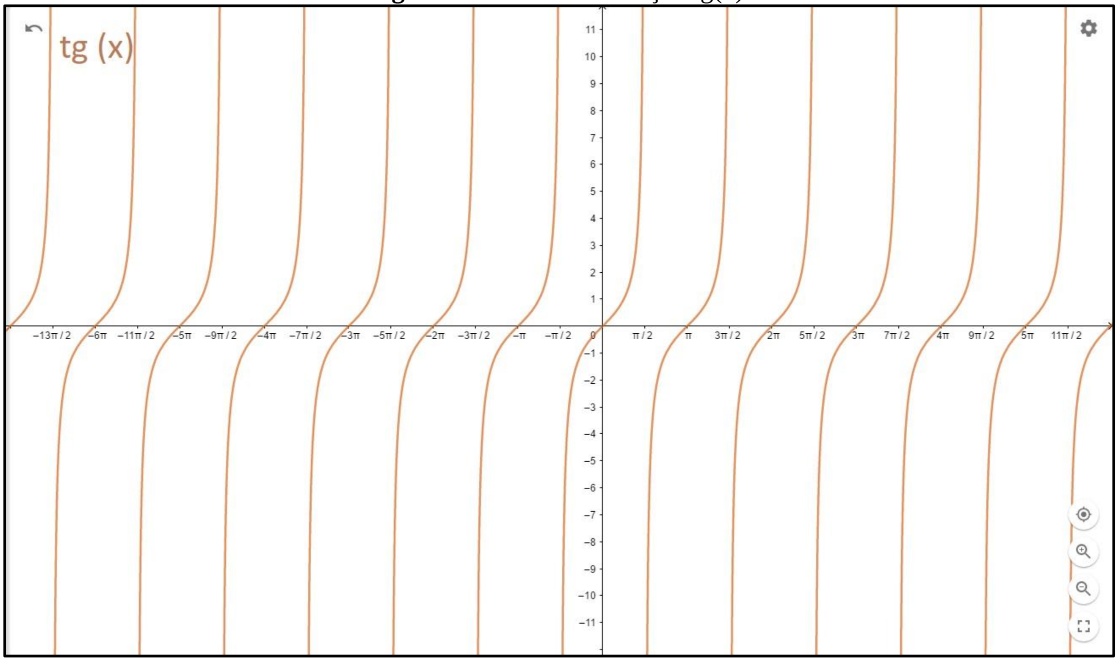


Figura 10: Gráfico da função cos (x)



Já para a função tg(x), notamos que ela não está definida para x $\geq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (90º + k.180º), sendo k $\in N$. Logo, o domínio são os reais exceto quando x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Quanto a imagem, é infinita pois quando x tende a $\frac{\pi}{2} + k\pi$, a reta que intercepta a reta tangente a intercepta em um ponto T cuja ordenada é cada vez maior[6]. O gráfico da função tg(x) está representado na Figura 11.

Figura 11: Gráfico da função tg(x)



Formas previstas de avaliação

Realização da atividade (Roteiro 1) e participação na discussão.

Roteiro 1 - Funções seno, cosseno e tangente

1) Represente os seguintes ângulos x na circunferência trigonométrica e determine os valores das funções sen(x), cos(x) e tg(x) para cada um deles.

x	sen(x)	cos(x)	tg(x)
0°			
30°			
420°			
90°			

[6] Adaptado de IEZZI, 2013

120°			
-210°			
180°			
-150°			
240°			
270°			
300°			
-30°			

2) O que você observou sobre os valores possíveis de x e os valores assumidos por sen(x), cos(x) e tg(x)?

3) Qual o mínimo e o máximo valor assumido por sen(x), cos(x) e tg(x)?

	sen(x)	cos(x)	tg(x)
Mínimo			
Máximo			

4) Quando x é 90° ($\frac{\pi}{2}$ rad) e 270° ($\frac{3\pi}{2}$ rad) a tangente não está definida. Por quê?

Referências

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar 3**: Trigonometria. 9 ed. - São Paulo: Atual, 2013,